ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА.

ПЛАТОНОВА М. В.   ЦЫКИН С. В.

Аннотация. В работе предложено два способа аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка. В первом случае используется математическое ожидание функционала от некоторого точечного случайного поля, а во втором – математическое ожидание функционала от нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечный момент порядка $2m+2$.

We suggest two approaches to construct an approximation a solution of the Cauchy problem for the higher–order Schrödinger equation. In the first approach we compute an expectation of a certain point process functional while in the second one we compute an expectation of a certain functional of a normed sum of i.i.d. random variables with finite moments of the order $2m+2$.

1. Введение

Хорошо известно, что для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности ($\sigma \in \mathbf{R}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x) = \varphi(x) \tag{1}$$

справедливо вероятностное представление

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi\big(x + \sigma w(t)\big). \tag{2}$$

Здесь $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Начальная функция φ предполагается непрерывной и ограниченной.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 28C20, 60H05, 60G57.

Key words and phrases. Уравнение Шрёдингера, пуассоновские случайные меры, предельные теоремы.

Работа первого автора (параграф 4) выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-11-01136). Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00443а).

Математическое ожидание в правой части формулы (2) может быть записано в виде интеграла по мере Винера P_W в пространстве $C_0([0,\infty))$ непрерывных функций h, удовлетворяющих условию $h(0)=0$,

$$u(t,x)=\int_{C_0([0,\infty))}\varphi\big(x+\sigma w(t)\big)dP_W(w(\cdot)).$$

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении (1) число σ является комплексным, именно $\sigma=e^{\frac{i\pi}{4}}$. В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$-i\,\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

и носит название уравнение Шрёдингера (см. [9], стр. 331). Представление (2) в этом случае теряет смысл, так как мы должны подставить комплексную переменную в функцию вещественного аргумента.

Формально решение задачи Коши для уравнения (3) может быть записано с использованием интеграла (обычно его называют континуальным или функциональным интегралом) по так называемой мере Фейнмана. Мера Фейнмана является комплекснозначной конечно-аддитивной функцией, заданной на алгебре цилиндрических множеств. Именно, для каждых $0<t_1<\cdots<t_n<T$ и каждого борелевского множества $A\subset\mathbf{R}^n$ мера $P(U_{t_1,\dots,t_n,A})$ цилиндрического множества $U_{t_1,\dots,t_n,A}\subset\Omega$ вида

$$U_{t_1,\dots,t_n,A}=\{h\in C_0[0,T]:(h(t_1),h(t_2),\dots,h(t_n))\in A\}\,,$$

равна (здесь $x_0=0,\ t_0=0$)

$$\frac{e^{-\frac{in\pi}{4}}}{(2\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^n(t_j-t_{j-1})^{1/2}}\int_A e^{\frac{i}{2}\sum_{j=1}^n\frac{(x_j-x_{j-1})^2}{t_j-t_{j-1}}}dx_1\dots dx_n. \tag{4}$$

Известно (см., например, [1]), что комплекснозначная мера P, заданная формулой (4) на алгебре цилиндрических множеств, не может быть продолжена до счетно-аддитивной функции на σ–алгебре, порожденной цилиндрическими множествами. Это означает, что в данном случае функциональный интеграл не является интегралом по σ–конечной мере в пространстве траекторий. Тем не менее, интеграл по мере Фейнмана может быть корректно определен для достаточно широкого класса функций (не только для цилиндрических). Подробное изложение теории интегрирования по мере Фейнмана можно найти в книге [10], в ней же содержится обширный обзор литературы по теории интеграла Фейнмана. Отметим ещё, что этот подход не является вероятностным.

Далее, в работах [3], [4], [5] был предложен уже чисто вероятностный метод построения аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера (3) средними значениями функционалов от стохастических процессов. Были построены два типа аппроксимации решения задачи Коши. В первом случае решение аппроксимируется средними значениями функционалов от пуассоновского точечного поля, а во втором случае — средними значениями функционалов от нормированных сумм независимых случайных величин с общим симметричным распределением и конечным четвертым моментом.

Целью данной работы является построение вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка
$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}},$$
где m – натуральное число. Решения таких уравнений исследовались в работах [12], [13]. В настоящей работе мы используем методы, предложенные в [4]. Мы построим два типа аппроксимации решения задачи Коши средними значениями функционалов от стохастических процессов. Первый из них в качестве стохастического процесса использует интеграл по пуассоновскому точечному полю, а второй – нормированные суммы независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным моментом порядка $2m+2$.

Отметим еще, что в работе авторов [8] была построена аппроксимация решения задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера, содержащего в правой части дробную производную порядка $\alpha \in (1, 2)$.

Авторы выражают благодарность Н. В. Смородиной за внимание к работе и полезные замечания.

2. Основные обозначения и определения

Прямое преобразование Фурье в настоящей работе определяется как
$$\widehat{\varphi}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{ipx}\, dx,$$
а, соответственно, обратное преобразование как
$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)\, e^{-ipx}\, dp.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ обозначим пространство Соболева функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно (см. [11], стр. 146). Стандартная норма в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$\|\psi\|_k^2 = \sum_{l=0}^{k} \int\limits_{\mathbf{R}} |\psi^{(l)}(x)|^2\, dx.$$

Нам удобно использовать в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ другую норму, эквивалентную стандартной (см. [11], стр. 190),

$$\|\psi\|_{W_2^k(\mathbf{R})}^2 = \int\limits_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k})\, |\widehat{\psi}(p)|^2\, dp.$$

Оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-ipx}\, A(p)\, \widehat{\varphi}(p)\, dp,$$

называется псевдодифференциальным оператором с символом $A(p)$.

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l}$$

обозначается соответствующая операторная норма.

Через $\mathbf{C}$ обозначим комплексную плоскость, а через $\mathbf{C}_+$ и $\mathbf{C}_-$ – верхнюю и нижнюю полуплоскости, соответственно.

3. Аппроксимация решения задачи Коши средними значениями функционалов от пуассоновского точечного поля

Пусть m – произвольное натуральное число. Рассмотрим задачу Коши

$$i\, \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(-1)^m}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \quad u(0, x) = \varphi(x). \tag{5}$$

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $[0, \infty) \times [0, \infty)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\, \nu(dt, dx) = dt\, \mu(dx),$$

где мера μ имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{dx}{x^{1+2m}}.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс $\xi_\varepsilon(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon, e\varepsilon]} x \nu(ds, dx),$$

где e – основание натурального логарифма.

Представим начальную функцию φ в виде

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где P_+, P_- – проекторы Рисса, определяемые на $L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R})$ как

$$P_+\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp, \quad P_-\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp. \qquad (6)$$

Отметим, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция φ_- аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость.

Положим

$$\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)}.$$

Так выбранное комплексное число σ принадлежит верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$ и $\operatorname{Re}\sigma > 0$.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, которая действует на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}\left[(\varphi_- * h_\varepsilon)\big(x - \sigma\xi_\varepsilon(t)\big) + (\varphi_+ * h_\varepsilon)\big(x + \sigma\xi_\varepsilon(t)\big)\right], \qquad (7)$$

где функция $h_\varepsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\begin{aligned}\widehat{h}_\varepsilon(p) &\\ = \exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(i|p|\sigma x + \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} + \ldots + \frac{(i|p|\sigma x)^{2m-1}}{(2m-1)!}\Big)\,d\mu(x)\Big) &\\ \cdot \exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\,d\mu(x)\Big).&\end{aligned}$$

Отметим, что функция $\widehat{h}_\varepsilon(p) \in L_q(\mathbf{R})$ при всех $1 \leqslant q \leqslant \infty$, так как $\operatorname{Re}(i\sigma)^{2m+1} > 0$.

Теорема 1. *1. Оператор P_ε^t является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$r_{\varepsilon,t}(p) = \exp\Big(-\frac{itp^{2m}}{(2m)!}\Big)\,H(t,\varepsilon,p),$$

где

$$H(t,\varepsilon,p)= \exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x}-1-i|p|\sigma x-\frac{(i|p|\sigma x)^2}{2}-\ldots-\frac{(i|p|\sigma x)^{2m}}{(2m)!} -\frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big)\,d\mu(x)\Big). \quad (8)$$

2. Для любых t, ε, p *справедливо неравенство*

$$\big|H(t,\varepsilon,p)\big|\leqslant 1.$$

Доказательство. Обозначим через $a_j(t)$, $j=1,\ldots,2m+1$ семиинварианты случайной величины $\xi_\varepsilon(t)$

$$a_1(t)=t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}x\frac{dx}{x^{1+2m}}=\frac{t\varepsilon^{-2m+1}(e^{2m-1}-1)}{(2m-1)e^{2m-1}},$$

$$\ldots$$

$$a_{2m+1}(t)=t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}x^{2m+1}\frac{dx}{x^{1+2m}}=t\varepsilon(e-1).$$

При фиксированных ε, t в области $\{z\in\mathbf{C}:\ \operatorname{Im}z>0\}$ справедливо неравенство

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp\,e^{i|p|z}\widehat{h}_\varepsilon(p)\widehat{\varphi}(p)\Big| \leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp\,\Big|e^{-i|p|\sigma a_1(t)-\frac{(i|p|\sigma)^2a_2(t)}{2!}-\ldots-\frac{(i|p|\sigma)^{2m-1}a_{2m-1}(t)}{(2m-1)!}-\frac{(i|p|\sigma)^{2m+1}a_{2m+1}(t)}{(2m+1)!}}\widehat{\varphi}(p)\Big| \leqslant C(\varepsilon,t)\|\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})}. \quad (9)$$

Здесь мы воспользовались тем, что в показателе экспоненты вещественная часть коэффициента при $|p|^{2m+1}$ отрицательная, так как $\operatorname{Re}(i\sigma)^{2m+1}>0$ и $a_{2m+1}(t)>0$.

Из (9) следует, что при каждом фиксированном ε величина, стоящая под знаком математического ожидания в (7), ограничена. Используя теорему Фубини, получаем

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} dp\, e^{-ipx}\widehat{\varphi_+}(p)\widehat{h}_\varepsilon(p)\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma\xi_\varepsilon(t)}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dp\, e^{-ipx}\widehat{\varphi_-}(p)\widehat{h}_\varepsilon(p)\mathbf{E}\, e^{ip\sigma\xi_\varepsilon(t)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)\widehat{h}_\varepsilon(p)\mathbf{E}\, e^{i|p|\sigma\xi_\varepsilon(t)}.$$

Последнее равенство означает, что оператор P_ε^t является псевдодифференциальным оператором с символом

$$r_{\varepsilon,t}(p) = \mathbf{E}\, e^{i|p|\sigma\xi_\varepsilon(t)}\cdot\widehat{h}_\varepsilon(p)$$

$$= \exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x}-1-i|p|\sigma x-\frac{(i|p|\sigma x)^2}{2}-\ldots-\frac{(i|p|\sigma x)^{2m-1}}{(2m-1)!}\Big)\,d\mu(x)\Big)$$

$$\cdot\exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\,d\mu(x)\Big) = \exp\Big(-\frac{itp^{2m}}{(2m)!}\Big)\,H(t,\varepsilon,p),$$

где функция $H(t,\varepsilon,p)$ определена формулой (8).

Для доказательства п. 2 теоремы нам потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Для любого $x\geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re}\Big(e^{i\sigma x}-1-i\sigma x-\ldots-\frac{(i\sigma x)^{2m}}{(2m)!}-\frac{(i\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big)\leqslant 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$d^{-1} = \cos\big(\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2m})\big) > 0.$$

Масштабным преобразованием переменной x утверждение леммы можно свести к следующему неравенству: при $x\geqslant 0$

$$\mathrm{Re}\Big(e^{i\sigma xd}-1-i\sigma xd-\ldots-\frac{(i\sigma xd)^{2m}}{(2m)!}-\frac{(i\sigma xd)^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big)\leqslant 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \mathrm{Re}\Big(\exp(ix\sigma d) - \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{(ix\sigma d)^j}{j!}\Big).$$

Легко показать, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 0, \ldots, f^{(2m+1)}(0) = 0$.

Вычислим производную порядка $2m+2$ функции $f(x)$

$$f^{(2m+2)}(x) = \mathrm{Re}\Big((i\sigma d)^{2m+2} \exp(ix\sigma d)\Big)$$
$$= d^{2m+2} e^{-x\tan(\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2m}))} \cos\big(x + \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\big).$$

Производная $2m+2$–го порядка неотрицательна на промежутках

$$x \in \Big[\frac{\pi}{2m} + 2\pi k, \pi + \frac{\pi}{2m} + 2\pi k\Big],\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

и неположительна на промежутках

$$x \in \Big[-\pi + \frac{\pi}{2m} + 2\pi k, \frac{\pi}{2m} + 2\pi k\Big],\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом, производная $2m+1$–го порядка $f^{(2m+1)}(x)$ не убывает на промежутках

$$x \in \Big[\frac{\pi}{2m} + 2\pi k, \pi + \frac{\pi}{2m} + 2\pi k\Big],\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

и не возрастает на промежутках

$$x \in \Big[-\pi + \frac{\pi}{2m} + 2\pi k, \frac{\pi}{2m} + 2\pi k\Big],\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Вычислим производную порядка $2m+1$ функции $f(x)$

$$f^{(2m+1)}(x) = \mathrm{Re}\Big((i\sigma d)^{2m+1} \exp(ix\sigma) - (i\sigma d)^{2m+1}\Big)$$
$$= d^{2m+1} e^{-x\tan(\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2m}))} \cos\big(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\big) - \cos\big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\big) d^{2m+1}.$$

Легко видеть, что производная $f^{(2m+1)}(x)$ может обладать лишь конечным числом нулей на промежутках

$$x \in \Big[-\pi + \frac{\pi}{2m} + 2\pi k, 2\pi k\Big], \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Вычислим производную порядка $2m$ функции $f(x)$

$$f^{(2m)}(x) = \mathrm{Re}\Big((i\sigma d)^{2m} \exp(ix\sigma) - (i\sigma d)^{2m} - (i\sigma d)^{2m+1} x\Big)$$
$$= d^{2m} e^{-x\tan(\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2m}))} \sin x - x d^{2m+1} \cos\big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\big).$$

Для доказательства утверждения осталось заметить, что $f^{(2m)}(x) < 0$ (при $x \geqslant 0$) на промежутках

$$x \in \Big[-\pi + \frac{\pi}{2m} + 2\pi k, 2\pi k \Big], \quad k = 1, 2, \dots,$$

а значит и $f(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant 0$. □

Доказательство второго утверждения теоремы немедленно следует из леммы 1.

□

Из теоремы 1 следует, что генератор G_ε полугруппы P_ε^t есть тоже псевдодифференциальный оператор с символом

$$\widehat{g}_\varepsilon(p) = -\frac{i\, p^{2m}}{(2m)!} + \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} - \dots - \frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!} \Big)\, d\mu(x).$$

Через P^t обозначим полугруппу

$$P^t = \exp\Big(\frac{it(-1)^{m+1}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \Big).$$

По определению полугруппа P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (5) (см., например, [9], стр. 331 и [14]).

Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ функция $u_\varepsilon(t, x) = P_\varepsilon^t \varphi(x)$ аппроксимирует в $L_2(\mathbf{R})$ решение задачи Коши (5).

Теорема 2. *Существует число $C > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$||P^t\varphi - P_\varepsilon^t\varphi||_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon^2 ||\varphi||_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [7], гл. IX, §2, п.1, стр. 614)

$$U_{A+B}(t) - U_A(t) = \int_0^t U_{A+B}(t-\tau) B U_A(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Применим эту формулу для случая, когда $A = \frac{i(-1)^{m+1}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, $A + B = G_\varepsilon$. Соответственно

$$U_A(t) = P^t, \quad U_{A+B}(t) = P^t_\varepsilon.$$

Заметим, что из леммы 1 следует, что

$$\|U_{A+B}(t-\tau)\|_{L_2\to L_2} \leqslant 1.$$

Далее оценим норму $\|U_A(\tau)\|_{W_2^{2m+2}\to W_2^{2m+2}}$. Имеем

$$\|U_A(\tau)\varphi\|^2_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})} = \int_{\mathbf{R}} (1+|p|^{2(m+2)})|e^{-\frac{i\tau p^{2m}}{(2m)!}}\widehat{\varphi}(p)|^2 dp = \|\varphi\|^2_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

Теперь для доказательства нашего утверждения достаточно оценить операторную норму $\|B\|_{W_2^{2m+2}\to L_2}$. Оператор B – это псевдодифференциальный оператор с символом

$$\begin{aligned}\widehat{b}_\varepsilon(p) &= \widehat{g}_\varepsilon(p) + \frac{i\,p^{2m}}{(2m)!}\\ &= \int_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} - \ldots - \frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Заметим, что при $|p|\varepsilon \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$|\widehat{b}_\varepsilon(p)| \leqslant C p^{2m+2}\varepsilon^2,$$

а при $|p|\varepsilon > 1$ справедливо неравенство

$$|\widehat{b}_\varepsilon(p)| \leqslant C|p|^{2m+1}\varepsilon.$$

Таким образом

$$\|B\varphi\|^2_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant C\varepsilon^4\|\varphi\|^2_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

□

Следствие 1. *Для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо*

$$\|P^t_\varepsilon\varphi - P^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

Доказательство. Так как операторные нормы $\|P^t\|_{L_2\to L_2}$ и $\|P^t_\varepsilon\|_{L_2\to L_2}$ не больше единицы, а класс Соболева $W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ плотен в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, то утверждение следствия немедленно вытекает из утверждения теоремы 2 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [2], II.1.18). □

4. Аппроксимация решения задачи Коши средними значениями функционалов от сумм независимых случайных величин

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что случайная величина ξ_1 имеет конечный момент порядка $2m+2$ и

$$\mathbf{E}\,\xi_1^{2m} = 1.$$

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица. Обозначим

$$\varkappa_1 = \mathbf{E}\,\xi_1^1, \quad \varkappa_2 = \mathbf{E}\,\xi_1^2, \quad \ldots, \quad \varkappa_{2m+2} = \mathbf{E}\,\xi_1^{2m+2}.$$

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/2m}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j.$$

Характеристическая функция $f_{\zeta_n(t)}(p)$ случайной величины $\zeta_n(t)$ имеет вид

$$f_{\zeta_n(t)}(p) = \mathbf{E}\,e^{i\,p\,\zeta_n(t)} = \exp\Big(nt\int_0^{\infty}\big(\exp\big(\frac{ipy}{n^{1/2m}}\big) - 1\big)d\mathcal{P}(y)\Big).$$

Для каждого натурального n определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$

$$P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_- * R_n^t)\big(x - \sigma\zeta_n(t)\big) + (\varphi_+ * R_n^t)\big(x + \sigma\zeta_n(t)\big)\Big], \quad (11)$$

где, как и выше, функции $\varphi_\pm$ определены формулой (6), а $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)}$. Функция $R_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{R}_n^t(p) = \exp\Big(-ti|p|\sigma n^{1-\frac{1}{2m}}\varkappa_1 - \frac{t(i|p|\sigma)^2 n^{1-\frac{2}{2m}}\varkappa_2}{2!} - \ldots - \frac{t(i|p|\sigma)^{2m-1} n^{1-\frac{2m-1}{2m}}\varkappa_{2m-1}}{(2m-1)!}\Big) \cdot \exp\Big(-\frac{t(i|p|\sigma)^{2m+1} n^{1-\frac{2m+1}{2m}}\varkappa_{2m+1}}{(2m+1)!}\Big).$$

Теорема 3. *1. Оператор P_n^t является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$r_{n,t}(p) = \exp\Big(-\frac{itp^{2m}}{(2m)!}\Big) H_n(t,p),$$

где

$$H_n(t,p) = \exp\Big(nt\int_0^\infty \Big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}}} - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}} - \ldots - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m}}{(2m)!\,n} - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m+1}}{(2m+1)!\,n^{(2m+1)/2m}}\Big) d\mathcal{P}(y)\Big). \tag{12}$$

2. Для любых n, t, p справедливо неравенство

$$|H_n(t,p)| \leqslant 1.$$

Доказательство. Заметим, что при фиксированных n, t в области $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ справедливо неравенство

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{i|p|z}\widehat{R}_n^t(p)\widehat{\varphi}(p)\Big| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp\,\Big|e^{-ti|p|\sigma n^{1-\frac{1}{2m}}\varkappa_1 - \frac{t(i|p|\sigma)^2 n^{1-\frac{2}{2m}}\varkappa_2}{2!} - \ldots - \frac{t(i|p|\sigma)^{2m-1} n^{1-\frac{2m-1}{2m}}\varkappa_{2m-1}}{(2m-1)!}} \cdot e^{-\frac{t(i|p|\sigma)^{2m+1} n^{1-\frac{2m+1}{2m}}\varkappa_{2m+1}}{(2m+1)!}}\,\widehat{\varphi}(p)\Big| \leqslant C(n,t)\|\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})}.$$

Таким образом, в формуле (11) стоит математическое ожидание от ограниченной функции. Используя теорему Фубини, получаем

$$P_n^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)\widehat{R}_n^t(p)\mathbf{E}\, e^{i|p|\sigma\zeta_n(t)}.$$

Из последнего равенства вытекает, что оператор P_n^t является псевдодифференциальным оператором с символом

$$r_{n,t}(p) = \mathbf{E}\, e^{i\,\sigma\,|p|\,\zeta_n(t)} \cdot \widehat{R}_n^t(p)$$
$$= \exp\Big(nt\int_0^\infty \Big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}}} - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}} - \ldots - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m-1}}{(2m-1)!\, n^{(2m-1)/2m}}\Big) d\mathcal{P}(y)\Big)$$
$$\cdot \exp\Big(-nt\int_0^\infty \frac{(i|p|\sigma y)^{2m+1}}{(2m+1)! n^{(2m+1)/2m}} d\mathcal{P}(y)\Big) = \exp\Big(-\frac{itp^{2m}}{(2m)!}\Big) H_n(t,p),$$

где функция $H_n(t,p)$ определена (12).

Доказательство второго утверждения теоремы немедленно следует из леммы 1. □

Из теоремы 3 следует, что генератор G_n полугруппы P_n^t есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{g}_n(p)$, где

$$\widehat{g}_n(p) = -\frac{i\,p^{2m}}{(2m)!}$$
$$+n\int_0^\infty \Big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}}} - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}} - \ldots - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m}}{(2m)!\, n} - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m+1}}{(2m+1)!\, n^{(2m+1)/2m}}\Big) d\mathcal{P}(y).$$

Покажем, что при $n \to \infty$ функция $u_n(t,x) = P_n^t\varphi(x)$ аппроксимирует в $L_2(\mathbf{R})$ решение задачи Коши (5).

Теорема 4. *Существует число $C > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$||P^t\varphi - P_n^t\varphi||_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{Ct}{n^{1/m}}||\varphi||_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения снова воспользуемся формулой (10) для случая, когда $A = \frac{i(-1)^{m+1}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, $A + B = G_n$. Соответственно

$$U_A(t) = P^t, \quad U_{A+B}(t) = P_n^t.$$

Из леммы 1 следует неравенство

$$\|U_{A+B}(t-\tau)\|_{L_2\to L_2} \leqslant 1.$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2, можно показать, что

$$\|U_A(\tau)\|_{W_2^{2m+2}\to W_2^{2m+2}} = 1.$$

Теперь для доказательства нашего утверждения достаточно оценить операторную норму $\|B\|_{W_2^{2m+2}\to L_2}$.

Оператор B – это псевдодифференциальный оператор с символом

$$\widehat{b}_n(p) = \widehat{g}_n(p) + \frac{i\,p^{2m}}{(2m)!}$$
$$= n\int_0^\infty \left(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}}} - 1 - \frac{i|p|\sigma y}{n^{1/2m}} - \ldots - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m}}{(2m)!\,n} - \frac{(i|p|\sigma y)^{2m+1}}{(2m+1)!\,n^{(2m+1)/2m}}\right) d\mathcal{P}(y).$$

Из последнего равенства вытекает оценка

$$|\widehat{b}_n(p)| \leqslant C\frac{|p|^{2m+2}}{n^{1/m}}. \tag{13}$$

Используя (13), для $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ получаем

$$\|B\varphi\|^2_{L_2(\mathbf{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\varphi}(p)|^2 |\widehat{b}_n(p)|^2\,dp \leqslant \frac{C}{n^{2/m}}\|\varphi\|^2_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

$\square$

Следствие 2. *Для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо*

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Замечание 1. *Отметим здесь, что в работе* [6] *было введено понятие обобщенных случайных функций, позволяющее записать действие полугрупп P_ε^t и P_n^t на функцию φ в более простом виде.*

Список литературы

[1] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах.* М.: Наука, 1983.

[2] Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

[3] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М., *Вероятностная аппроксимация решений задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений.* Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2011), 111–143.

[4] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М., *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши с оператором Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.

[5] Ибрагимов И. А., Смородина Н. В., Фаддеев М. М., *Вероятностная аппроксимация оператора эволюции.* — Функц. анализ и его прил. **52:2** (2018), 25–39.

[6] Иевлев П. Н., *Вероятностное представление решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **466** , (2017), 145–158.

[7] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* "Мир", Москва, 1972.

[8] Платонова М. В., Цыкин С. В., *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 257–272.

[9] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. Т. 1.* "Мир", Москва, 1977.

[10] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т., *Континуальные интегралы.* Изд. 2-е перераб. и сущ.доп. М.: ЛЕНАНД, 2015, 336 с.

[11] Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н., *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Издательство Ленинградского университета, 1981.

[12] Carles R., Moulay E. *Higher order Schrödinger equations* — Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **45** (2012), №. 39, 395304.

[13] Carles R., Lucha W., Moulay E. *Higher–order Schrödinger and Hartree–Fock equations.* — Journal of Mathematical Physics **56** (2015), №. 12, 122301.

[14] Kim J. M., Arnold A., Yao X. *Global estimates of fundamental solutions for higher-order Schrödinger equations.* — Monatshefte für Mathematik. **168** (2012). №. 2. – P. 253-266.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова, Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет, Лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербург, Россия
Email address: mariyaplat@rambler.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
Email address: sergei.tcykin@gmail.com