Н. Н. Сеник, Усреднение периодического эллиптического оператора в полосе при различных граничных условиях, *Алгебра и анализ*, 2013, том 25, выпуск 4, 182–259

Алгебра и анализ
Том 25 (2013), №4

УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ПОЛОСЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

© Н. Н. СЕНИК

Данная статья связана с гомогенизацией периодического эллиптического дифференциального оператора, заданного в пространстве $L_2\,(\Pi)$, $\Pi = \mathbb{R} \times (0,\, a)$, дифференциальным выражением

$$\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon = \sum_{j=1}^{2} \mathrm{D}_j g_j\,(x_1/\varepsilon,\, x_2)\,\mathrm{D}_j + \sum_{j=1}^{2} \left(h_j^*\,(x_1/\varepsilon,\, x_2)\,\mathrm{D}_j + \mathrm{D}_j h_j\,(x_1/\varepsilon,\, x_2)\right) + Q\,(x_1/\varepsilon,\, x_2) + \lambda Q_*\,(x_1/\varepsilon,\, x_2)$$

с периодическими граничными условиями, граничными условиями типа Дирихле или Неймана. Все коэффициенты дифференциального выражения предполагаются 1-периодическими по первой переменной; по второму аргументу накладываются условия некоторой регулярности.

Получены точные по порядку приближения обратного к $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ оператора по метрикам пространств $\mathbf{B}\,(L_2\,(\Pi))$ и $\mathbf{B}\left(L_2\,(\Pi)\,,\, H^1\,(\Pi)\right)$ с оценками погрешностей порядка $O\,(\varepsilon)$.

§0. Введение

0.1. Спектральный подход к задаче усреднения. Настоящая работа относится к теории усреднения, или гомогенизации, периодических эллиптических дифференциальных операторов и основана на теоретико-операторном подходе, впервые предложенном в статье [BSu]. Поясним его на примере типичной проблемы усреднения эллиптического оператора $\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon \operatorname{grad}\,(\varepsilon > 0)$, действующего в пространстве $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $d \in \mathbb{N}$; здесь обозначение $g^\varepsilon\,(\mathbf{x}) = g\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$ было использовано для ограниченной положительно определенной и периодической относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ матрицы-функции $g\,(\cdot)$. Задача состоит в изучении асимптотического поведения $\mathcal{A}^\varepsilon$ при стремлении периода ε к нулю.

Ключевые слова: усреднение, операторные оценки погрешности, периодические дифференциальные операторы, эффективный оператор, корректор.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00458-а) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение от 07.09.2012 №8501 №2012-1.5-12-000-1003-016).

В [BSu] доказано было существование такой постоянной положительно определенной матрицы g^0, что при малых ε резольвента $(\mathcal{A}^\varepsilon + \mathcal{I})^{-1}$ исходного оператора оказывается близка к резольвенте (в той же точке) оператора эффективного $\mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \operatorname{grad}$, причем погрешность данного приближения подчиняется точной по порядку оценке

$$\left\| (\mathcal{A}^\varepsilon + \mathcal{I})^{-1} - \left(\mathcal{A}^0 + \mathcal{I}\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,\, 1]\,. \tag{0.1}$$

Обсудим идею доказательства. Масштабное преобразование в силу своей унитарности сводит (0.1) к неравенству

$$\left\| \left(\mathcal{A} + \varepsilon^2 \mathcal{I}\right)^{-1} - \left(\mathcal{A}^0 + \varepsilon^2 \mathcal{I}\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \in (0,\, 1]\,, \tag{0.2}$$

в котором $\mathcal{A} = -\operatorname{div} g \operatorname{grad}$. Далее, с помощью теории Флоке–Блоха периодический оператор $\mathcal{A}$ может быть разложен в прямой интеграл по семейству операторов $\mathcal{A}\,(\mathbf{k})$, действующих в $L_2\,(\Omega)$ (здесь Ω — ячейка решетки Γ) и зависящих от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ — квазиимпульса. Слой $\mathcal{A}\,(\mathbf{k})$ задан дифференциальным выражением $(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* \, g\,(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ при периодических граничных условиях на $\partial\Omega$. Поскольку сплетающее отображение унитарно, то оценка (0.2) оказывается равносильной следующей:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d} \left\| \left(\mathcal{A}\,(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 \mathcal{I}\right)^{-1} - \left(\mathcal{A}^0\,(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 \mathcal{I}\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \in (0,\, 1]\,. \tag{0.3}$$

Аналитичность операторного пучка $\mathcal{A}\,(\cdot)$ и компактность его резольвент позволяют применять методы аналитической теории возмущений по одномерному параметру $t = |\mathbf{k}|$. Ключевую роль в решении задачи при этом играет выделение определяемого через пороговые характеристики спектрального ростка семейства $\mathcal{A}\,(\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Именно: резольвента $\left(\mathcal{A}\,(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 \mathcal{I}\right)^{-1}$ может быть приближена при помощи резольвенты спектрального ростка, а поскольку ростки операторов эффективного и исходного совпадают, то факт этот приводит к неравенству (0.3). Таким образом было выявлено, что процедура гомогенизации есть проявление порогового эффекта вблизи нижнего края спектра оператора $\mathcal{A}$.

В дальнейшем метод статьи [BSu] развивался во многих направлениях. Для данной работы большое значение имеет статья [Su2], в которой была изучена задача усреднения для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в присутствии младших членов. В частности, результаты из статьи [Su2] применимы к действующему в пространстве $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ оператору $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ вида

$$\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{d} \mathrm{D}_i g_{ij}^\varepsilon \mathrm{D}_j + \sum_{j=1}^{d} \left(\left(h_j^\varepsilon\right)^* \mathrm{D}_j + \mathrm{D}_j h_j^\varepsilon\right) + Q^\varepsilon + \lambda Q_*^\varepsilon; \tag{0.4}$$

все коэффициенты в дифференциальном выражении предполагаются периодическими относительно некоторой решетки Γ в $\mathbb{R}^d$, а на функцию Q_* и вещественный параметр λ накладываются условия, обеспечивающие положительную определенность оператора. Для $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ был найден эффективный оператор $\mathcal{B}_\lambda^0$ с постоянными коэффициентами и установлена оценка

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,\,1]; \tag{0.5}$$

кроме того, получена была аппроксимация оператора, обратного к $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$, по норме пространства $\mathbf{B}\left(L_2\left(\mathbb{R}^d\right),\, H^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$:

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\mathbb{R}^d),\, H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,\,1]. \tag{0.6}$$

Здесь $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ — это так называемый корректор — оператор нулевого по ε порядка, но содержащий быстро осциллирующие коэффициенты.

Метод доказательства, как и прежде, опирался на масштабное преобразование и разложение в прямой интеграл. При этом возникало аналитическое операторное семейство $\mathcal{B}_\lambda(\mathbf{k};\, \varepsilon)$, зависящее уже от двух параметров, которое изучалось с помощью общей аналитической теории возмущений спектра относительно одномерной переменной $\tau = \left(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2}$. В этом состояло основное техническое отличие от подхода [BSu], которое и позволило учесть члены как первого, так и нулевого порядков.

0.2. Задача усреднения для периодического вдоль некоторых направлений оператора. Помимо задач с оператором, периодичным вдоль всех направлений пространства $\mathbb{R}^d$, большой интерес, в том числе и для приложений, представляют проблемы в областях типа цилиндра или слоя, в которых коэффициенты оператора зависят периодически лишь от некоторых своих аргументов.

Пример такой проблемы приводит работа [S-HT]. В полосе $\Pi = \mathbb{R} \times (0,\, a)$ на плоскости было рассмотрено гиперболическое уравнение теории упругости. Его коэффициенты были периодическими и быстро осциллирующими по первой переменной и не зависели от второй. Главный вывод [S-HT] заключался в поточечной сходимости решений исходного уравнения к решению осредненной задачи при стремлении периода к нулю, однако вопрос об ошибке этой аппроксимации исследован не был.

К задачам подобного рода можно также пытаться применить и описанный в п. 0.1 теоретико-операторный подход.

Решение простейшей проблемы в полосе Π, на нем основанное, было дано в работе [Su1]. Изучался оператор $\mathcal{A}^\varepsilon = \mathrm{D}_1 g_1^\varepsilon \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 g_2^\varepsilon \mathrm{D}_2$ в $L_2(\Pi)$ с периодическими граничными условиями на $\partial\Pi$ (сейчас $g_j^\varepsilon(x_1, x_2) = g_j\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2\right)$, $j \in \{1, 2\}$). Предполагались ограниченность и положительная определенность коэффициентов $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$, а также периодичность по первой переменной (с равным 1 периодом), липшицевость — по второй. Было показано, что при стремлении ε к нулю резольвента $(\mathcal{A}^\varepsilon + \mathcal{I})^{-1}$ исходного оператора сходится по метрике пространства $\mathbf{B}(L_2(\Pi))$ к резольвенте $\left(\mathcal{A}^0 + \mathcal{I}\right)^{-1}$ оператора эффективного (коэффициенты которого зависят лишь от x_2), а полученная оценка

$$\left\|(\mathcal{A}^\varepsilon + \mathcal{I})^{-1} - \left(\mathcal{A}^0 + \mathcal{I}\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, 1],$$

для нормы их разности точна по порядку.

Упомянем также статью [BuCaSu], в которой похожий результат был доказан для оператора в $L_2\left(\mathbb{R}^2\right)$, периодического только в одном направлении.

0.3. Основные результаты. Предметом настоящей работы является более общий оператор $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ (в пространстве $L_2(\Pi)$), заданный формально дифференциальным выражением

$$\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon = \mathrm{D}_1 g_1^\varepsilon \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 g_2^\varepsilon \mathrm{D}_2 + \sum_{j=1}^{2} \left(\left(h_j^\varepsilon\right)^* \mathrm{D}_j + \mathrm{D}_j h_j^\varepsilon\right) + Q^\varepsilon + \lambda Q_*^\varepsilon;$$

граничные условия на $\partial\Pi$ могут быть или периодическими, или типа Дирихле, или типа Неймана. Измеримые в полосе функции $g_j(\cdot)$, $h_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, $Q(\cdot)$ и $Q_*(\cdot)$ считаются периодическими по первой переменной (период равен 1), по второй же накладываются условия некоторой регулярности (см. условия 1–3). Дополнительно требуются положительная определенность и ограниченность $g_j(\cdot)\,(j \in \{1, 2\})$, $Q_*(\cdot)$ и положительная определенность оператора $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$, добиться которой при перечисленных условиях на коэффициенты можно выбором параметра λ.

Установлено, что при малом ε оператор $(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon)^{-1}$ может быть приближен в пространстве $\mathbf{B}(L_2(\Pi))$ резольвентой $\left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}$, а в $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi), H^1(\Pi)\right)$ — резольвентой $\left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}$ и корректором $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$. Найдены явные выражения для эффективных коэффициентов, последние при этом зависят лишь от аргумента x_2. Получены точные по порядку оценки погрешности

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1}-\left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,\,1],$$

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1}-\left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}-\varepsilon\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi),\,H^1(\Pi))} \leqslant \widetilde{C}\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,\,1],$$

постоянные C и $\widetilde{C}$ в которых контролируются через данные задачи. Это — основной итог работы (теорема 1.6).

0.4. Метод исследования. Приведем схему изучения оператора с периодическими граничными условиями. Масштабное преобразование сводит исходную задачу к анализу пучка операторов

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon) &= \mathrm{D}_1 g_1 \mathrm{D}_1 + \varepsilon^2 \mathrm{D}_2 g_2 \mathrm{D}_2 \\ &\quad + \varepsilon\left(h_1^* \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_1 h_1\right) + \varepsilon^2\left(h_2^* \mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2 h_2\right) + \varepsilon^2 Q + \varepsilon^2 \lambda Q_*\end{aligned}$$

в $L_2(\Pi)$, зависящих от ε — тем самым была исключена зависимость аргументов коэффициентов от малого параметра. Далее, теория Флоке–Блоха устанавливает унитарную эквивалентность $\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)$ оператору умножения на $\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ в прямом интеграле пространств $\int_{[-\pi,\,\pi)} \oplus L_2(\Omega)\,dk$, $\Omega = (0,\,1)\times(0,\,a)$. Слой $\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ представляет собой линейный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, заданный равенством

$$\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathcal{A}^{(2)},$$

в котором $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ и $\mathcal{A}^{(2)}$ определены выражениями

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) &= (\mathrm{D}_1 + k)\, g_1\, (\mathrm{D}_1 + k) \\ &\quad + \varepsilon\left(h_1^*(\mathrm{D}_1 + k) + (\mathrm{D}_1 + k)\, h_1\right) + \varepsilon^2 Q + \varepsilon^2 \lambda Q_*, \\ \mathcal{A}^{(2)} &= \mathrm{D}_2 g_2 \mathrm{D}_2 + h_2^* \mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2 h_2\end{aligned}$$

с периодическими граничными условиями. Так как отображение $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ от переменной x_2 зависит только через свои коэффициенты, то его можно разложить естественным образом в прямой интеграл:

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2.$$

$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ — оператор в $L_2(0,\,1)$, к которому применимы результаты статьи [Su2], поэтому он может быть приближен соответствующим спектральным ростком. Основное внимание уделено присоединению возмущения $\varepsilon^2\mathcal{A}^{(2)}$, которое служит главным источником проблем в плане техники. Это последний шаг, завершающий построение аппроксимации $(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}$ в метриках двух операторных пространств.

Краевые задачи типа Дирихле и типа Неймана могут быть сведены к периодической: ортогональная сумма операторов при условиях Дирихле и Неймана оказывается унитарно эквивалентна подходящему оператору с периодическими граничными условиями в удвоенной полосе. При этом необходимые оценки следуют из соответствующих утверждений для периодической проблемы.

0.5. Структура работы. Работа состоит из девяти параграфов. В §1 даны основные определения, приведены постановка периодической проблемы и формулировка основного результата для периодического оператора. §2 сводит задачу к анализу обратного оператора $(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}$. Операторный пучок $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)$ исследуется в §3: к нему применяются результаты из [Su2], определяется спектральный росток. §4–5 вводят аналог спектрального ростка для семейства $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ и содержат дополнительные оценки технического плана. Аппроксимация оператора $(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}$ по метрике пространства $\mathbf{B}(L_2(\Pi))$ дана в §6, по метрике $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi), H^1(\Pi)\right)$ — в §7. Применение полученных результатов к краевым задачам типа Дирихле и типа Неймана происходит в §8. Наконец, в §9 итог работы используется для исследования сингулярного оператора Шрёдингера в полосе.

0.6. Обозначения. Пусть $a > 0$; тогда Π и Ω представляют собой полосу $\mathbb{R}\times(0,a)$ и прямоугольник $(0,1)\times(0,a)$ соответственно. Для отображения φ, заданного на Π, верхний индекс ε имеет следующий смысл: $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2\right)$.

Жирный шрифт использован для выделения векторных величин. Элементы декартова произведения $A\times B$ множеств A, B обозначены символом $\langle a, b\rangle$, в котором $a\in A$ и $b\in B$. Характеристическая функция χ_A измеримого множества $A\subset\mathbb{R}^d$ определена обычным способом:

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}\in A; \\ 0, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d\setminus\overline{A}. \end{cases}$$

Стандартный базис пространства $\mathbb{R}^d$ состоит из ортов $\mathbf{e}_j$, $j\in\{1,\ldots,d\}$.

Пусть $\mathfrak{H}$, $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$ соответственно. Банахово пространство линейных непрерывных отображений из $\mathfrak{H}$ в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ будем обозначать через $\mathbf{B}(\mathfrak{H},\widetilde{\mathfrak{H}})$, а норму в нем — через $\|\cdot\|_{\mathbf{B}(\mathfrak{H},\widetilde{\mathfrak{H}})}$; если пространства $\mathfrak{H}$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ совпадают, то $\mathbf{B}(\mathfrak{H}) = \mathbf{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{H})$ — банахова алгебра с единицей $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathfrak{H}}$. Ортогональное дополнение к подпространству $\mathfrak{N}$

в пространстве $\mathfrak{H}$ будет обозначено как $\mathfrak{N}^{\perp}$. При условии, что $\mathfrak{P}$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}^{\perp}$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^{\perp}$.

$H^s(\Xi)$ при $s \in \mathbb{R}$ — пространство Соболева в области $\Xi \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$. Пусть $\{I_j\}_{j=1}^n$, $n \in [1, d] \cap \mathbb{N}$, — множество конечных интервалов на вещественной оси и $I = \prod_{j=1}^n I_j$ — область в $\mathbb{R}^n$. $\widetilde{H}^s\left(I \times \mathbb{R}^{d-n}\right)$ $(s \in \mathbb{R})$ есть подпространство в $H^s\left(I \times \mathbb{R}^{d-n}\right)$ функций, периодическое продолжение на $\mathbb{R}^d$ относительно n-мерной решетки $\Gamma = \left\{\sum_{j=1}^n n_j \,|I_j|\, \mathbf{e}_j,\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n\right\}$ которых принадлежит $H^s_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^d\right)$. $\mathring{H}^1(\Xi)$ — замыкание по стандартной метрике $H^1(\Xi)$ множества $C_0^\infty(\Xi)$ отображений, носитель которых компактен и вложен в область Ξ.

Символом $\operatorname{Lip}([0, a]; \mathfrak{H})$ обозначен класс функций f на отрезке $[0, a]$, принимающих значения в пространстве $\mathfrak{H}$ и удовлетворяющих условию Липшица, т.е. $\sup_{x, y \in [0, a]} \frac{\|f(x)-f(y)\|_{\mathfrak{H}}}{|x-y|} = \|f\|_{\operatorname{Lip}([0,a];\mathfrak{H})} < \infty$. Полунорма $\|f\|_{\operatorname{Lip}([0,a];\mathfrak{H})}$ функции f носит название константы Липшица для f.

Норма измеримого отображения u в пространстве $L_q((0, a); L_p(0, 1))$ для краткости обозначена через $\|u\|_{p,q}$,

$$\|u\|_{p,q} = \left\|\left(x_2 \mapsto \|u(\cdot, x_2)\|_{L_p(0,1)}\right)\right\|_{L_q(0,a)},$$

в пространстве $L_p(\Omega)$ — через $\|u\|_p$.

Благодарность. Автор глубоко признателен своему научному руководителю Т. А. Суслиной за начальную постановку проблемы и ценные замечания в ходе ее изучения.

§1. Основные определения и результаты

1.1. Интерполяционное неравенство. Предваряет введение исследуемого оператора одно простое интерполяционное неравенство, необходимое как для самого определения, так и для дальнейших построений.

Лемма 1.1. *Пусть $w \in H^1(\alpha, \beta)$, $|(\alpha, \beta)| < \infty$. Тогда при произвольном $\mu > 0$ имеет место неравенство*

$$\|w\|^2_{L_\infty(\alpha,\beta)} \leqslant \mu \left\|w'\right\|^2_{L_2(\alpha,\beta)} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\beta - \alpha}\right) \|w\|^2_{L_2(\alpha,\beta)}.$$

Доказательство. Так как функцию w можно считать абсолютно непрерывной, то при любых $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$

$$|w(t)|^2 = |w(t_0)|^2 + 2\operatorname{Re} \int\limits_{(t_0, t)} w'(\tau)\, \overline{w(\tau)} d\tau.$$

Включение $w \in H^1(\alpha, \beta)$ позволяет дать абсолютной величине функции оценку сверху вида

$$|w(t)|^2 \leqslant |w(t_0)|^2 + 2\left\|w'\right\|_{L_2(\alpha,\beta)} \|w\|_{L_2(\alpha,\beta)},$$

проинтегрировав которую по $t_0 \in (\alpha, \beta)$, приходим к утверждению леммы:

$$\begin{aligned} |w(t)|^2 &\leqslant \frac{1}{\beta-\alpha}\|w\|^2_{L_2(\alpha,\beta)} + 2\left\|w'\right\|_{L_2(\alpha,\beta)}\|w\|_{L_2(\alpha,\beta)} \\ &\leqslant \mu\left\|w'\right\|^2_{L_2(\alpha,\beta)} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\beta-\alpha}\right)\|w\|^2_{L_2(\alpha,\beta)}, \\ &\qquad\qquad \mu > 0,\ t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

□

Лемма 1.1 отражает компактность вложения пространства Соболева $H^1(\alpha, \beta)$ в $L_\infty(\alpha, \beta)$ в случае конечных α и β. Отметим элементарное

Следствие 1.2. *Пусть $u \in L_2\big((0, a); H^1(0, 1)\big)$ и пусть выполнено включение $f \in L_\infty((0, a); L_2(0, 1))$. Тогда при произвольном $\mu > 0$ справедливо неравенство*

$$\|fu\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mu\|\mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\|f\|^4_{2,\infty}}{\mu} + \|f\|^2_{2,\infty}\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Если дополнительно $\mathrm{D}_1 u = 0$, то

$$\|fu\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{2,\infty}\|u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Замечание. Пусть $k \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{M}_k$ — унитарный в пространстве $L_2(\Omega)$ оператор умножения на функцию $\left(\mathbf{x} \mapsto e^{ikx_1}\right)$. Тогда ясно, что в неравенстве (1.1) дифференцирование D_1 можно заменить на $\mathrm{D}_1 + k\mathcal{I}$, рассмотрев вместо u функцию $\mathcal{M}_k u$. Во всех ссылках ниже подразумевается именно это обобщение.

Доказательство. Первая оценка получается из неравенства

$$\|u\|^2_{L_2((0,a);\,L_\infty(0,1))} \leqslant \mu\|\mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\mu} + 1\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{1.3}$$

вытекающего из леммы 1.1. Вторая же следует из первой, если устремить μ к ∞. □

Наконец, следующий результат получается суммированием оценок (1.1) и (1.2), записанных для сдвинутых ячеек $\Omega + n\mathbf{e}_1$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Следствие 1.3. *Пусть* $u \in H^1(\Pi)$, $f(x_1+1, x_2) = f(x_1, x_2)$ *для п. в.* $\mathbf{x} \in \Pi$ *и* $f \in L_\infty((0, a); L_2(0, 1))$. *Тогда при произвольном* $\mu > 0$ *выполнено неравенство*

$$\|fu\|^2_{L_2(\Pi)} \leqslant \mu \|\mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Pi)} + \left(\frac{\|f\|^4_{2,\infty}}{\mu} + \|f\|^2_{2,\infty}\right)\|u\|^2_{L_2(\Pi)}. \tag{1.4}$$

Если дополнительно $\mathrm{D}_1 u = 0$, *то*

$$\|fu\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \|f\|_{2,\infty}\|u\|_{L_2(\Pi)}. \tag{1.5}$$

1.2. Определение оператора $\mathcal{B}$. Пусть $g(\cdot) = \operatorname{diag}\{g_1(\cdot), g_2(\cdot)\}$ — диагональная матрица-функция, заданная в полосе Π, компоненты которой подчинены следующим требованиям.

Условие 1.

1) $g_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, *измеримы и положительны*;
2) $g_j(\cdot, x_2)$, $j \in \{1, 2\}$, *при п. в.* $x_2 \in (0, a)$ *периодичны с периодом* 1:
$$g_j(x_1+1, x_2) = g_j(x_1, x_2), \quad \mathbf{x} \in \Pi; \tag{1.6}$$
3) $g_j(\cdot)$ *и* $(g_j(\cdot))^{-1}$, $j \in \{1, 2\}$, *равномерно ограничены*:
$$\begin{aligned} c_g &= \max_{j\in\{1,2\}}\left\{\|g_j\|_\infty\right\} < \infty, \\ c_{g^{-1}} &= \max_{j\in\{1,2\}}\left\{\|g_j^{-1}\|_\infty\right\} < \infty; \end{aligned} \tag{1.7}$$
4) $g_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, *являются элементами* $\operatorname{Lip}([0, a]; L_\infty(0, 1))$, *а* $g_j(x_1, \cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, *при п. в.* $x_1 \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют периодическим граничным условиям на концах отрезка* $[0, a]$:
$$g_j(x_1, 0) = g_j(x_1, a), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Введем также комплекснозначные функции $h_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, и вещественнозначное отображение $Q(\cdot)$ и предположим, что выполнено

Условие 2.

1) $h_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, $Q(\cdot)$ *измеримы в полосе* Π;
2) $h_j(\cdot, x_2)$, $j \in \{1, 2\}$, $Q(\cdot, x_2)$ *при п. в.* $x_2 \in (0, a)$ *периодичны с периодом* 1:
$$\begin{aligned} h_j(x_1+1, x_2) &= h_j(x_1, x_2), \quad \mathbf{x} \in \Pi, \\ Q(x_1+1, x_2) &= Q(x_1, x_2), \quad \mathbf{x} \in \Pi; \end{aligned}$$

3) *имеют место включения*

$$h_j \in \mathrm{Lip}\,([0,\,a]\,;\,L_2\,(0,\,1)) \quad (j \in \{1,\,2\})\,, \tag{1.8}$$

$$Q \in \mathrm{Lip}\,([0,\,a]\,;\,L_1\,(0,\,1))\,; \tag{1.9}$$

4) *верны следующие соотношения*:

$$h_j\,(x_1,\,0) = h_j\,(x_1,\,a)\,, \quad x_1 \in \mathbb{R}\ (j \in \{1,\,2\})\,,$$
$$Q\,(x_1,\,0) = Q\,(x_1,\,a)\,, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

На подпространстве $\widetilde{H}^1\,(\Pi) \subset L_2\,(\Pi)$ определим квадратичную форму

$$b\,[u,\,u] = \int\limits_{\Pi} \left(\sum_{j=1}^{2} \left(g_j\,(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{D}_j u \cdot \overline{h_j\,(\mathbf{x})\,u}\right)\right) + Q\,(\mathbf{x})\,|u|^2 \right) d\mathbf{x},$$
$$u \in D\,[b] = \widetilde{H}^1\,(\Pi)\,. \tag{1.10}$$

Лемма 1.4. *При условиях* 1, 2 *на коэффициенты форма* b *замкнута и полуограничена снизу.*

Доказательство. Используя оценку сверху

$$2\,\mathrm{Re} \int\limits_{\Pi} \left(\mathrm{D}_1 u \cdot \overline{h_1\,(\mathbf{x})\,u} + \mathrm{D}_2 u \cdot \overline{h_2\,(\mathbf{x})\,u}\right) d\mathbf{x}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{2} \left(\widehat{\mu}\,\|\mathrm{D}_j u\|^2_{L_2(\Pi)} + \frac{1}{\widehat{\mu}}\,\|h_j u\|^2_{L_2(\Pi)} \right)$$
$$\leqslant \left(\widehat{\mu} + 2\frac{\check{\mu}}{\widehat{\mu}}\right) \|\mathbf{D} u\|^2_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)} + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\widehat{\mu}} \left(\frac{\|h_j\|^4_{2,\,\infty}}{\check{\mu}} + \|h_j\|^2_{2,\,\infty} \right) \|u\|^2_{L_2(\Pi)}\,,$$
$$u \in H^1\,(\Pi)\,,\ \ \widehat{\mu},\ \ \check{\mu} > 0, \tag{1.11}$$

для членов первого порядка (см. (1.4) с $f = h_j$, $j \in \{1,\,2\}$) при $\widehat{\mu} = \frac{1}{2}$ и $\check{\mu} = \frac{1}{8}$ и оценку сверху

$$\left| \int\limits_{\Pi} Q\,(\mathbf{x})\,|u|^2\,d\mathbf{x} \right| \leqslant \mu\,\|\mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Pi)} + \left(\frac{\|Q\|^2_{1,\,\infty}}{\mu} + \|Q\|_{1,\,\infty} \right) \|u\|^2_{L_2(\Pi)}\,,$$
$$u \in H^1\,(\Pi)\,,\ \ \mu > 0, \tag{1.12}$$

для члена нулевого порядка (см. (1.4) с $f = |Q|^{1/2}$) при $\mu = 1$, получаем

$$b[u, u] \leqslant (2 + c_g) \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\Pi;\mathbb{C}^2)} + \left(2\sum_{j=1}^{2}\left(8\|h_j\|^4_{2,\infty} + \|h_j\|^2_{2,\infty}\right) + \|Q\|^2_{1,\infty} + \|Q\|_{1,\infty}\right)\|u\|^2_{L_2(\Pi)}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Pi). \tag{1.13}$$

Оценка формы (1.10) снизу вытекает из (1.11) при $2\check{\mu} = \widehat{\mu}^2 = \frac{1}{64}c_{g^{-1}}^{-2}$ и из (1.12) с $\mu = \frac{1}{4}c_{g^{-1}}^{-1}$:

$$\begin{aligned} b[u, u] \geqslant{}& \tfrac{1}{2}c_{g^{-1}}^{-1}\|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\Pi;\mathbb{C}^2)} \\ &- \left(8c_{g^{-1}}\sum_{j=1}^{2}\left(128c_{g^{-1}}^2\|h_j\|^4_{2,\infty} + \|h_j\|^2_{2,\infty}\right)\right. \\ &\left. + 4c_{g^{-1}}\|Q\|^2_{1,\infty} + \|Q\|_{1,\infty}\right)\|u\|^2_{L_2(\Pi)}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Pi). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Следовательно, форма b полуограничена снизу и $(b+\alpha)$-норма при достаточно большом числе α эквивалентна стандартной норме в $H^1(\Pi)$. Последнее и означает замкнутость b, поскольку $\widetilde{H}^1(\Pi)$ является подпространством $H^1(\Pi)$. $\square$

Форма b задает в пространстве $L_2(\Pi)$ полуограниченный снизу самосопряженный оператор, который будем обозначать через $\mathcal{B}$. В общем случае $\mathcal{B}$ не является положительно определенным, поэтому будем рассматривать обобщенную резольвенту $(\mathcal{B} + \lambda Q_*)^{-1}$ со скалярной функцией $Q_*(\cdot)$, которая удовлетворяет нижеследующему требованию.

Условие 3.

1) $Q_*(\cdot)$ *положительна и измерима в полосе* Π;
2) $Q_*(\cdot, x_2)$ *при п. в.* $x_2 \in (0, a)$ *периодична с периодом* 1:
$$Q_*(x_1 + 1, x_2) = Q_*(x_1, x_2), \quad \mathbf{x} \in \Pi;$$
3) $Q_*(\cdot)$ *и* $(Q_*(\cdot))^{-1}$ *равномерно ограничены*:
$$\|Q_*\|_\infty, \|Q_*^{-1}\|_\infty < \infty;$$
4) $Q_*(\cdot)$ *содержится в* $\mathrm{Lip}([0, a]; L_\infty(0, 1))$, *и*
$$Q_*(x_1, 0) = Q_*(x_1, a), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

На области $D\,[b]$ зададим форму b_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, следующим соотношением:

$$b_\lambda\,[\cdot,\,\cdot] = b\,[\cdot,\,\cdot] + \lambda\,(Q_*\cdot,\,\cdot)_{L_2(\Pi)}\,, \quad D\,[b_\lambda] = D\,[b]\,.$$

Ясно, что ей отвечает самосопряженный оператор $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B} + \lambda Q_*$ с областью определения $D\,(\mathcal{B}_\lambda) = D\,(\mathcal{B})$.

За счет выбора параметра λ можно добиться положительности отображения $\mathcal{B}_\lambda$. Именно: определим постоянную $c_\natural$ выражением

$$c_\natural = 2\,\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \left(\|h_2\|_{2,\,\infty}^4 + \|h_2\|_{2,\,\infty}^2\right), \tag{1.15}$$

введем число λ_0,

$$\begin{aligned}\lambda_0 = \left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty \Bigg(c_\natural + 8c_{g^{-1}} \sum_{j=1}^{2} \left(128c_{g^{-1}}^2\,\|h_j\|_{2,\,\infty}^4 + \|h_j\|_{2,\,\infty}^2\right) \\ + 4c_{g^{-1}}\,\|Q\|_{1,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty}\Bigg),\end{aligned} \tag{1.16}$$

и предположим, что выполнено

Условие 4. *Справедливо соотношение*

$$\lambda > \lambda_0.$$

Тогда для b_λ имеем в силу (1.14) оценку снизу

$$\begin{aligned}b_\lambda\,[u,\,u] \geqslant \tfrac{1}{2}c_{g^{-1}}^{-1}\,\|\mathbf{D}u\|_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)}^2 + (\lambda - \lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|u\|_{L_2(\Pi)}^2\,, \\ u \in \widetilde{H}^1\,(\Pi)\,,\end{aligned} \tag{1.17}$$

означающую положительную определенность $\mathcal{B}_\lambda$ при указанном λ.

Отметим в заключение, что оператор $\mathcal{B}_\lambda$ формально соответствует дифференциальному выражению

$$\mathcal{B}_\lambda = \mathbf{D}^* g\mathbf{D} + \mathbf{h}^*\mathbf{D} + \mathbf{D}^*\mathbf{h} + Q + \lambda Q_*$$

с периодическими граничными условиями по переменной x_2.

Для удобства следующий набор величин назовем исходными данными задачи:

$$\begin{aligned}&\left\|g_j\right\|_\infty,\ \left\|g_j^{-1}\right\|_\infty,\ \left\|\partial_2 g_j\right\|_\infty \qquad (j \in \{1,\,2\})\,,\\ &\|h_j\|_{2,\,\infty},\ \|\partial_2 h_j\|_{2,\,\infty} \qquad (j \in \{1,\,2\})\,,\\ &\|Q\|_{1,\,\infty},\ \|\partial_2 Q\|_{1,\,\infty}\,,\\ &\left\|Q_*\right\|_\infty,\ \left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty,\ \left\|\partial_2 Q_*\right\|_\infty,\ \lambda.\end{aligned} \tag{1.18}$$

1.3. Постановка задачи теории усреднения. Основным объектом рассматриваемой задачи является оператор $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ в пространстве $L_2(\Pi)$, порожденный замкнутой положительно определенной квадратичной формой

$$b_\lambda^\varepsilon[u,u] = \int\limits_\Pi \Bigg(\sum_{j=1}^{2}\Big(g_j^\varepsilon(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_j u|^2 + 2\operatorname{Re}\Big(\mathrm{D}_j u\cdot\overline{h_j^\varepsilon(\mathbf{x})\,u}\Big)\Big) + Q^\varepsilon(\mathbf{x})\,|u|^2 + \lambda Q_*^\varepsilon(\mathbf{x})\,|u|^2\Bigg)d\mathbf{x},\quad u\in D\,[b_\lambda^\varepsilon] = \widetilde{H}^1(\Pi)\,,\ \ \varepsilon\in(0,1]\,. \tag{1.19}$$

Заметим, что форма b_λ^ε допускает снизу оценку такую же, как и b_λ:

$$b_\lambda^\varepsilon[u,u] \geqslant \tfrac{1}{2}c_{g^{-1}}^{-1}\,\|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)} + (\lambda-\lambda_0)\,\big\|Q_*^{-1}\big\|_\infty^{-1}\,\|u\|^2_{L_2(\Pi)}\,,\quad u\in\widetilde{H}^1(\Pi)\,,\ \varepsilon\in(0,1]\,. \tag{1.20}$$

Ее проверка похожа на доказательство соответствующего неравенства для b_λ, а в основе лежит лемма 1.1 с $\alpha = 0$ и $\beta = \varepsilon$ (следует учесть ограничение $\varepsilon \leqslant 1$).

Первый вопрос задачи гомогенизации для $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ состоит в поиске такого оператора $\mathcal{B}_\lambda^0$ того же вида, что и исходный, с коэффициентами, зависящими только от непериодической переменной x_2, чтобы имела место сходимость

$$(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon)^{-1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \big(\mathcal{B}_\lambda^0\big)^{-1}\,.$$

Найденный оператор называется эффективным. Второй вопрос задачи заключается в приближении оператора $(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon)^{-1}$ при малом положительном ε по норме пространства $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi)\,,\,H^1(\Pi)\right)$ с помощью $\mathcal{B}_\lambda^0$ и так называемого корректора $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ — оператора нулевого по ε порядка, но с быстро осциллирующими множителями:

$$(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathbf{B}\left(L_2(\Pi),\,H^1(\Pi)\right)} \big(\mathcal{B}_\lambda^0\big)^{-1}\,.$$

Будет показано, что эффективный оператор $\mathcal{B}_\lambda^0$ соответствует форме

$$b_\lambda^0[u,u] = \int\limits_\Pi \Bigg(\sum_{j=1}^{2}\Big(g_j^0(x_2)\,|\mathrm{D}_j u|^2 + 2\operatorname{Re}\Big(\mathrm{D}_j u\cdot\overline{h_j^0(x_2)\,u}\Big)\Big) + Q^0(x_2)\,|u|^2 + \lambda Q_*^0(x_2)\,|u|^2\Bigg)d\mathbf{x},\quad u\in D\left[b_\lambda^0\right] = \widetilde{H}^1(\Pi)\,, \tag{1.21}$$

коэффициенты которой определены равенствами

$$
\begin{aligned}
g_1^0(x_2) &= \Bigg(\int\limits_{(0,1)} (g_1(y_1, x_2))^{-1}\, dy_1\Bigg)^{-1},\\
g_2^0(x_2) &= \int\limits_{(0,1)} g_2(y_1, x_2)\, dy_1,\\
h_1^0(x_2) &= g_1^0(x_2)\, \mathrm{Re} \int\limits_{(0,1)} \frac{h_1(y_1, x_2)}{g_1(y_1, x_2)} dy_1,\\
h_2^0(x_2) &= \int\limits_{(0,1)} h_2(y_1, x_2)\, dy_1,\\
Q^0(x_2) &= \int\limits_{(0,1)} Q(y_1, x_2)\, dy_1 - \int\limits_{(0,1)} \frac{|h_1(y_1, x_2)|^2}{g_1(y_1, x_2)} dy_1\\
&\quad + g_1^0(x_2) \Bigg| \int\limits_{(0,1)} \frac{h_1(y_1, x_2)}{g_1(y_1, x_2)} dy_1 \Bigg|^2,\\
Q_*^0(x_2) &= \int\limits_{(0,1)} Q_*(y_1, x_2)\, dy_1.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Отметим в связи с введенными функциями следующие оценки:

$$
\|g_j^0\|_\infty \leqslant \|g_j\|_\infty, \ \|(g_j^0)^{-1}\|_\infty \leqslant \|g_j^{-1}\|_\infty \quad (j \in \{1, 2\}); \tag{1.23}
$$

$$
\|h_1^0\|_\infty \leqslant \left(\|g_1\|_\infty \|g_1^{-1}\|_\infty\right)^{1/2} \|h_1\|_{2,\infty}, \tag{1.24}
$$

$$
\|h_2^0\|_\infty \leqslant \|h_2\|_{2,\infty}; \tag{1.25}
$$

$$
\|Q^0\|_\infty \leqslant \|g_1^{-1}\|_\infty \|h_1\|_{2,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\infty}; \tag{1.26}
$$

$$
\|Q_*^0\|_\infty \leqslant \|Q_*\|_\infty, \ \|(Q_*^0)^{-1}\|_\infty \leqslant \|Q_*^{-1}\|_\infty. \tag{1.27}
$$

Проверим (1.24) и (1.26), остальные можно считать очевидными. В силу неравенства Коши имеем

$$
\Bigg| \int\limits_{(0,1)} \frac{h_1(y_1, x_2)}{g_1(y_1, x_2)} dy_1 \Bigg| \leqslant \Bigg(\int\limits_{(0,1)} g_1^{-1}(y_1, x_2)\, dy_1 \Bigg)^{1/2} \Bigg(\int\limits_{(0,1)} \frac{|h_1(y_1, x_2)|^2}{g_1(y_1, x_2)} dy_1 \Bigg)^{1/2}
$$

$$= \left(g_1^0\left(x_2\right)\right)^{-1/2} \left(\int\limits_{(0,\,1)} \frac{\left|h_1\left(y_1,\, x_2\right)\right|^2}{g_1\left(y_1,\, x_2\right)} dy_1 \right)^{1/2}.$$

Отсюда и из (1.23) получается (1.24). Другое соотношение влечет за собой двусторонняя оценка

$$-\int\limits_{(0,\,1)} \frac{\left|h_1\left(y_1,\, x_2\right)\right|^2}{g_1\left(y_1,\, x_2\right)} dy_1 \leqslant -\int\limits_{(0,\,1)} \frac{\left|h_1\left(y_1,\, x_2\right)\right|^2}{g_1\left(y_1,\, x_2\right)} dy_1 \\ + g_1^0\left(x_2\right) \left| \int\limits_{(0,\,1)} \frac{h_1\left(y_1,\, x_2\right)}{g_1\left(y_1,\, x_2\right)} dy_1 \right|^2 \leqslant 0,$$

которая вытекает из неравенства

$$g_1^0\left(x_2\right) \left| \int\limits_{(0,\,1)} \frac{h_1\left(y_1,\, x_2\right)}{g_1\left(y_1,\, x_2\right)} dy_1 \right|^2 \leqslant \int\limits_{(0,\,1)} \frac{\left|h_1\left(y_1,\, x_2\right)\right|^2}{g_1\left(y_1,\, x_2\right)} dy_1. \tag{1.28}$$

Несложно видеть также, что эффективные коэффициенты — липшицевы функции по переменной x_2 и соответствующие константы Липшица (т.е. нормы производных коэффициентов в пространстве $L_\infty(0,\, a)$) ограничены величинами, выражающимися только через исходные данные задачи. Последний факт — липшицевость эффективных коэффициентов — позволяет также явно указать область определения оператора $\mathcal{B}_\lambda^0$, а именно

$$D\left(\mathcal{B}_\lambda^0\right) = \widetilde{H}^2\left(\Pi\right).$$

Корректность задания отображения $\mathcal{B}_\lambda^0$ квадратичной формой (1.21) устанавливает

Лемма 1.5. *При условиях* 1, 2, 3, 4 *форма* b_λ^0 *с коэффициентами* (1.22) *замкнута и положительно определена.*

Доказательство. Оценки сверху для b_λ^0 можно достичь способом, вполне аналогичным способу вывода (1.13), если принять во внимание (1.23)–(1.27). Для получения обратного неравенства заметим, что (с учетом определения Q^0) при $u \in \widetilde{H}^1(\Pi)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Pi} \left(2h_1^0(x_2)\,\mathrm{D}_1 u \cdot \overline{u} + Q^0(x_2)\,|u|^2\right) d\mathbf{x} \\
&\qquad \geqslant -\tfrac{1}{2}\int\limits_{\Pi} g_1^0(x_2)\,|\mathrm{D}_1 u|^2\,d\mathbf{x} - 2\int\limits_{\Pi} \frac{\left|h_1^0(x_2)\right|^2}{g_1^0(x_2)}\,|u|^2\,d\mathbf{x} \\
&\qquad + \int\limits_{\Pi} g_1^0(x_2)\left|\int\limits_{(0,\,1)} \frac{h_1(y_1,\,x_2)}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1\right|^2 |u|^2\,d\mathbf{x} \\
&\qquad - \left(\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|h_1\right\|_{2,\,\infty}^2 + \left\|Q\right\|_{1,\,\infty}\right)\|u\|_{L_2(\Pi)}^2 .
\end{aligned}$$

Используя определение $h_1^0(\cdot)$ и неравенство (1.28), убеждаемся, что

$$\int\limits_{\Pi} \frac{\left|h_1^0(x_2)\right|^2}{g_1^0(x_2)}\,|u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|h_1\right\|_{2,\,\infty}^2 \|u\|_{L_2(\Pi)}^2 ,$$

поэтому

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Pi} \left(2h_1^0(x_2)\,\mathrm{D}_1 u \cdot \overline{u} + Q^0(x_2)\,|u|^2\right) d\mathbf{x} \\
&\qquad \geqslant -\tfrac{1}{2}\int\limits_{\Pi} g_1^0(x_2)\,|\mathrm{D}_1 u|^2\,d\mathbf{x} - \left(2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|h_1\right\|_{2,\,\infty}^2 + \left\|Q\right\|_{1,\,\infty}\right)\|u\|_{L_2(\Pi)}^2 .
\end{aligned}$$

Применительно к форме b_λ^0 это дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
b_\lambda^0[u,\,u] &\geqslant \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\|g_j^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|\mathrm{D}_j u\|_{L_2(\Pi)}^2 \\
&\quad + \left(\lambda\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1} - 2\sum_{j=1}^{2}\left\|g_j^{-1}\right\|_\infty \left\|h_j\right\|_{2,\,\infty}^2 - \left\|Q\right\|_{1,\,\infty}\right)\|u\|_{L_2(\Pi)}^2 \\
&\quad \geqslant \tfrac{1}{2}c_{g^{-1}}^{-1}\|\mathbf{D}u\|_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)}^2 + (\lambda-\lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|u\|_{L_2(\Pi)}^2 , \quad u \in \widetilde{H}^1(\Pi) ,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

(здесь было использовано определение (1.16) постоянной λ_0). □

Перейдем теперь к описанию корректора. Для этого введем такие функции Λ и M, которые при п. в. фиксированных $x_2 \in (0,\, a)$ являются обобщенными 1-периодическими решениями вспомогательных задач

$$\mathrm{D}_1 g_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1\Lambda(\mathbf{x}) + 1) = 0, \qquad \int\limits_{(0,\,1)} \Lambda(y_1,\, x_2)\, dy_1 = 0,$$

и

$$\mathrm{D}_1 g_1(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_1\mathrm{M}(\mathbf{x}) + \mathrm{D}_1 h_1(\mathbf{x}) = 0, \qquad \int\limits_{(0,\,1)} \mathrm{M}(y_1,\, x_2)\, dy_1 = 0$$

(см. [Su2, (6.10)] и [Su2, (6.12)] соответственно). За счет одномерности этих задач отображения Λ и M возможно найти явно:

$$\Lambda(x_1,\, x_2) = \tfrac{i}{2} - ix_1 + ig_1^0(x_2) \int\limits_{(0,\,1)} dz_1 \int\limits_{(z_1,\, x_1)} dy_1 g_1^{-1}(y_1,\, x_2)\,, \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x_1,\, x_2) = -i \int\limits_{(0,\,1)} dz_1 \int\limits_{(z_1,\, x_1)} dy_1 \frac{h_1(y_1,\, x_2)}{g_1(y_1,\, x_2)} \\ + ig_1^0(x_2) \int\limits_{(0,\,1)} \frac{h_1(y_1,\, x_2)}{g_1(y_1,\, x_2)} dy_1 \int\limits_{(0,\,1)} dz_1 \int\limits_{(z_1,\, x_1)} dy_1 g_1^{-1}(y_1,\, x_2)\,. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Несложно видеть, что Λ, M, $\partial_1\Lambda$, $\partial_2\Lambda$, $\partial_2\mathrm{M}$ равномерно ограничены величинами, зависящими лишь от данных задачи, а $\partial_1\mathrm{M}$ содержится в пространстве $L_\infty((0,\, a)\,;\, L_2(0,\, 1))$ и соответствующая норма также оценивается через исходные данные.

С помощью Λ и M может быть задан корректор. Будет выяснено, что он представляет собой непрерывный оператор

$$\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon = (\Lambda^\varepsilon \mathrm{D}_1 + \mathrm{M}^\varepsilon)\left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}, \quad \varepsilon \in (0,\, 1]\,, \tag{1.32}$$

в пространстве $L_2(\Pi)$. Более того, так как функции Λ, M являются мультипликаторами в $H^1(\Pi)$, корректор $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ оказывается также ограниченным отображением между $L_2(\Pi)$ и $H^1(\Pi)$.

1.4. Основной результат. Центральное место работы занимает следующая теорема.

Теорема 1.6. *Пусть выполнены условия* 1, 2, 3, 4. *Пусть оператор* $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ *в* $L_2(\Pi)$ *определен формой* (1.19)*;* $\mathcal{B}_\lambda^0$ *— эффективный оператор, отвечающий форме* (1.21) *с коэффициентами* (1.22)*, а* $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ *— корректор, заданный* *в* (1.32). *Тогда при* $\varepsilon \in (0,\, 1]$ *имеют место оценки*

$$\left\| (\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda)^{-1} - \left(\mathcal{B}^0_\lambda\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon, \tag{1.33}$$

$$\left\| (\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda)^{-1} - \left(\mathcal{B}^0_\lambda\right)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}^\varepsilon_\lambda \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi),\, H^1(\Pi))} \leqslant \widetilde{C}\varepsilon; \tag{1.34}$$

постоянные C *и* $\widetilde{C}$ *зависят только от исходных данных задачи* (1.18).

Замечание. Сразу отметим, что для доказательства последней части теоремы 1.6, соотношения (1.34), достаточно при $\varepsilon \in (0,\, 1]$ установить неравенство

$$\left\| (\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda)^{1/2} \left((\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda)^{-1} - \left(\mathcal{B}^0_\lambda\right)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}^\varepsilon_\lambda \right) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant \widehat{C}\varepsilon \tag{1.35}$$

с подходящей константой $\widehat{C}$. Данный факт очевидным образом следует из (1.20), а постоянная $\widetilde{C}$ в (1.34) может быть выбрана равной

$$\left(2c_{g^{-1}} + (\lambda - \lambda_0)^{-1} \left\| Q_*^{-1} \right\|_\infty \right)^{1/2} \widehat{C}.$$

По этой причине далее вместо (1.34) проверять будем именно (1.35).

§2. Переход к операторам на ячейке

2.1. Масштабное преобразование. При положительном ε в пространстве $L_2\,(\Pi)$ определим унитарный оператор масштабного преобразования $\mathcal{T}_\varepsilon$ формулой

$$(\mathcal{T}_\varepsilon u)\,(x_1,\, x_2) = \varepsilon^{1/2} u\,(\varepsilon x_1,\, x_2)\,, \quad u \in L_2\,(\Pi)\,, \;\; \mathbf{x} \in \Pi, \;\; \varepsilon > 0.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_\lambda\,(\varepsilon)$ самосопряженный положительно определенный оператор в $L_2\,(\Pi)$, порожденный квадратичной формой

$$\begin{aligned} b_\lambda\,(\varepsilon)\,[u,\, u] = \int\limits_\Pi \Big(& g_1\,(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_1 u|^2 + \varepsilon^2 g_2\,(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_2 u|^2 \\ & + 2\varepsilon \,\mathrm{Re}\left(\mathrm{D}_1 u \cdot \overline{h_1\,(\mathbf{x})\, u} \right) + 2\varepsilon^2 \,\mathrm{Re}\left(\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{h_2\,(\mathbf{x})\, u} \right) \\ & + \varepsilon^2 Q\,(\mathbf{x})\,|u|^2 + \varepsilon^2 \lambda Q_*\,(\mathbf{x})\,|u|^2 \Big) d\mathbf{x}, \\ & u \in D\,[b_\lambda\,(\varepsilon)] = \widetilde{H}^1\,(\Pi)\,, \;\; \varepsilon \in (0,\, 1]\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Так как при $u \in D\,[b_\lambda\,(\varepsilon)] = D\,[b^\varepsilon_\lambda]$ выполнено

$$b_\lambda\,(\varepsilon)\,[\mathcal{T}_\varepsilon u,\, \mathcal{T}_\varepsilon u] = \varepsilon^2 b^\varepsilon_\lambda\,[u,\, u]\,,$$

то

$$\mathcal{T}_\varepsilon^* \mathcal{B}_\lambda\,(\varepsilon)\,\mathcal{T}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathcal{B}^\varepsilon_\lambda. \tag{2.2}$$

Наряду с $\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)$ введем самосопряженный положительно определенный оператор $\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)$ формой

$$
\begin{aligned}
b_\lambda^0(\varepsilon)[u, u] = \int\limits_\Pi \Big(& g_1^0(x_2)\,|\mathrm{D}_1 u|^2 + \varepsilon^2 g_2^0(x_2)\,|\mathrm{D}_2 u|^2 \\
& + 2\varepsilon h_1^0(x_2)\,\mathrm{D}_1 u \cdot \overline{u} + 2\varepsilon^2 \operatorname{Re}\left(\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{h_2^0(x_2)\,u}\right) \\
& + \varepsilon^2 Q^0(x_2)\,|u|^2 + \varepsilon^2 \lambda Q_*^0(x_2)\,|u|^2\Big) d\mathbf{x}, \\
& u \in D\left[b_\lambda^0(\varepsilon)\right] = \widetilde{H}^1(\Pi), \ \ \varepsilon \in (0, 1].
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Аналогично (2.2) справедливо равенство

$$
\mathcal{T}_\varepsilon^* \mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)\,\mathcal{T}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathcal{B}_\lambda^0. \tag{2.4}
$$

Наконец, определим линейное отображение

$$
\mathcal{K}_\lambda(\varepsilon) = (\Lambda \mathrm{D}_1 + \varepsilon \mathrm{M})\left(\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)\right)^{-1}, \quad \varepsilon \in (0, 1], \tag{2.5}
$$

в пространстве $L_2(\Pi)$. Тогда тождество

$$
\mathcal{T}_\varepsilon^* \mathcal{K}_\lambda(\varepsilon)\,\mathcal{T}_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \mathcal{K}_\lambda^\varepsilon
$$

с (2.2) и (2.4) приводят к равносильной формулировке теоремы 1.6.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1, 2, 3, 4. *Пусть* $\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)$ *— оператор в* $L_2(\Pi)$, *определенный формой* (2.1); $\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)$ *порожден формой* (2.3) *с коэффициентами* (1.22), *а корректор* $\mathcal{K}_\lambda(\varepsilon)$ *выписан в* (2.5). *Тогда при* $\varepsilon \in (0, 1]$

$$
\left\| (\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \tag{2.6}
$$

$$
\left\| (\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon))^{1/2} \left((\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)\right)^{-1} - \mathcal{K}_\lambda(\varepsilon) \right) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant \widetilde{C}; \tag{2.7}
$$

константы C *и* $\widetilde{C}$ *зависят только от исходных данных задачи* (1.18).

2.2. Разложение прямым интегралом пространств. Пусть $\Omega = (0, 1) \times (0, a)$. Введем оператор $\mathcal{U}_0$, осуществляющий непрерывное отображение $L_2(\Pi)$ в гильбертово пространство H,

$$
H = \int\limits_{[-\pi, \pi)} \oplus L_2(\Omega)\, dk = L_2([-\pi, \pi); L_2(\Omega)),
$$

согласно следующей формуле:

$$(\mathcal{U}_0 f)(k,\, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-ik(x_1+m)} f(x_1+m,\, x_2)\,,$$
$$f \in D(\mathcal{U}_0) = C_0^\infty(\Pi)\,,\ \mathbf{x}\in\Omega,\ k\in[-\pi,\,\pi)\,.$$

Вследствие изометричности $\mathcal{U}_0$ можно распространить до ограниченного оператора $\mathcal{U} \in \mathbf{B}(L_2(\Pi)\,,\, H)$, называемого преобразованием Гельфанда по переменной x_1. При этом $\mathcal{U}$ устанавливает изометрический изоморфизм пространств $L_2(\Pi)$ и H.

Зададим в $L_2(\Omega)$ оператор $\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ квадратичной формой

$$\begin{aligned} b_\lambda(k;\,\varepsilon)[u,\,u] = \int\limits_\Omega \Big(& g_1(\mathbf{x})\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2 + \varepsilon^2 g_2(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_2 u|^2 \\ & + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\Big((\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{h_1(\mathbf{x})\,u}\Big) + 2\varepsilon^2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{h_2(\mathbf{x})\,u}\Big) \\ & + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})\,|u|^2 + \varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\,|u|^2\Big)d\mathbf{x}, \\ & u\in D[b_\lambda(k;\,\varepsilon)] = \widetilde{H}^1(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Пусть $b_{\lambda,\,k}(\varepsilon)$ — такая форма, что

$$b_{\lambda,\,k}(\varepsilon)\,[\mathcal{M}_k u,\,\mathcal{M}_k u] = b_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u]\,,$$
$$u\in D[b_\lambda(k;\,\varepsilon)]\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$$

(оператор $\mathcal{M}_k$ определен в замечании к следствию 1.2). Квадратичную форму $b_{\lambda,\,k}(\varepsilon)$ задает, очевидно, то же, что и $b_\lambda(0;\,\varepsilon)$, выражение на пространстве k-квазипериодических функций $\mathcal{M}_k\widetilde{H}^1(\Omega)$. Тогда аналогичные проведенным в лемме 1.4 рассуждения (при учете включения $\varepsilon\in(0,\,1]$ и условия 4) устанавливают замкнутость и положительную определенность $b_{\lambda,\,k}(\varepsilon)$, а вместе с ними — и замкнутость и положительную определенность формы $b_\lambda(k;\,\varepsilon)$. В дальнейшем понадобится оценка

$$\begin{aligned} b_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u] \geqslant \tfrac12 \int\limits_\Omega g_1(\mathbf{x})\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2\,d\mathbf{x} + \tfrac12\varepsilon^2 \int\limits_\Omega g_2(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_2 u|^2\,d\mathbf{x} \\ + \varepsilon^2(\lambda-\lambda_0)\,\big\|Q_*^{-1}\big\|_\infty^{-1} \int\limits_\Omega |u|^2\,d\mathbf{x}, \\ u\in\widetilde{H}^1(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ по переменной x_1 частично диагонализует оператор $\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)$:

$$\mathcal{U}\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)\,\mathcal{U}^* = \int\limits_{[-\pi,\,\pi)} \oplus\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,dk. \tag{2.10}$$

Этот факт следует из того, что $\mathcal{U}\widetilde{H}^1(\Pi) = L_2\left([-\pi,\,\pi)\,;\,\widetilde{H}^1(\Omega)\right)$ и по равенству Парсеваля для преобразования Гельфанда при $u\in\widetilde{H}^1(\Pi)$ и $\widetilde{u} = \mathcal{U}u$ выполнено тождество

$$b_\lambda(\varepsilon)\,[u,\,u] = \int\limits_{[-\pi,\,\pi)} b_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[\widetilde{u}(k,\,\cdot)\,,\,\widetilde{u}(k,\,\cdot)]\,dk.$$

Далее, в пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим оператор $\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)$, соответствующий квадратичной форме

$$\begin{aligned} b^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u] = \int\limits_\Omega \Big(& g^0_1(x_2)\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2 + \varepsilon^2 g^0_2(x_2)\,|\mathrm{D}_2 u|^2 \\ & + 2\varepsilon h^0_1(x_2)\,(\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{u} + 2\varepsilon^2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{h^0_2(x_2)\,u}\right) \\ & + \varepsilon^2 Q^0(x_2)\,|u|^2 + \varepsilon^2\lambda Q^0_*(x_2)\,|u|^2\Big)d\mathbf{x}, \\ & u\in D\left[b^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right] = \widetilde{H}^1(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Отметим оценку $b^0_\lambda(k;\,\varepsilon)$ снизу, основанную на неравенствах для формы $b^0_{\lambda,\,k}(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} & b^0_{\lambda,\,k}(\varepsilon)\,[\mathcal{M}_k u,\,\mathcal{M}_k u] = b^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u]\,, \\ & u\in D\left[b^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right],\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,, \end{aligned}$$

похожих на полученные в лемме 1.5:

$$\begin{aligned} b^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u] \geqslant \tfrac12 \int\limits_\Omega & g^0_1(\mathbf{x})\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2\,d\mathbf{x} \\ & + \tfrac12\varepsilon^2 \int\limits_\Omega g^0_2(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_2 u|^2\,d\mathbf{x} + \varepsilon^2(\lambda-\lambda_0)\left\|Q^{-1}_*\right\|^{-1}_\infty \int\limits_\Omega |u|^2\,d\mathbf{x}, \\ & u\in\widetilde{H}^1(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Оператор $\mathcal{B}_\lambda^0\,(\varepsilon)$, подобно $\mathcal{B}_\lambda\,(\varepsilon)$, унитарно эквивалентен с тем же аффинитетом оператору умножения на $\mathcal{B}_\lambda^0\,(k;\,\varepsilon)$:

$$\mathcal{U}\mathcal{B}_\lambda^0\,(\varepsilon)\,\mathcal{U}^* = \int\limits_{[-\pi,\,\pi)} \oplus \mathcal{B}_\lambda^0\,(k;\,\varepsilon)\,dk. \tag{2.13}$$

Определим, наконец, линейное отображение $\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ пространства $L_2\,(\Omega)$:

$$\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon) = (\Lambda\,(\mathrm{D}_1 + k) + \varepsilon \mathrm{M})\left(\mathcal{B}_\lambda^0\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}, \quad \langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]\,. \tag{2.14}$$

Как и $\mathcal{B}_\lambda\,(\varepsilon)$ и $\mathcal{B}_\lambda^0\,(\varepsilon)$, корректор $\mathcal{K}_\lambda\,(\varepsilon)$ может быть разложен в прямой интеграл, а введенные операторы $\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ будут при этом слоями данного разложения:

$$\mathcal{U}\mathcal{K}_\lambda\,(\varepsilon)\,\mathcal{U}^* = \int\limits_{[-\pi,\,\pi)} \oplus \mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,dk. \tag{2.15}$$

Поскольку преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ изометрично, то соотношения (2.10), (2.13), (2.15) позволяют перевести теорему 2.1 в термины слоев соответствующих операторов при разложении в прямой интеграл.

Теорема 2.2. *Пусть в условиях теоремы* 2.1 *операторы* $\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ *и* $\mathcal{B}_\lambda^0\,(k;\,\varepsilon)$ *определены формами* (2.8) *и* (2.11) *соответственно, а корректор* $\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ *— соотношением* (2.14)*. Тогда при* $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]$ *выполнены оценки*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \tag{2.16}$$

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} - \mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \widetilde{C}; \tag{2.17}$$

константы C *и* $\widetilde{C}$ *зависят только от исходных данных задачи* (1.18).

§3. Операторный пучок $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon)$

Непосредственно к оператору $\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ теория, развитая в [Su2], неприменима: в нем содержится дифференцирование по непериодической переменной x_2. Однако $\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ можно представить суммой операторов, один из которых „послойно“ вписывается в указанную схему — это позволяет дать для него необходимые аппроксимации через соответствующий спектральный росток. Данный параграф полностью посвящается изучению этого вопроса.

3.1. Определение оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$. Выделим из $\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$, задаваемый формой

$$
\begin{gathered}
a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u] = \int\limits_\Omega \Big(g_1(\mathbf{x})\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2 + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\left((\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{h_1(\mathbf{x})\,u}\right) \\
+\varepsilon^2 Q(\mathbf{x})\,|u|^2 + \varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\,|u|^2\Big)d\mathbf{x}, \\
u\in D\left[a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right] = L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,,
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

и формально обозначим их разность через $\varepsilon^2\mathcal{A}^{(2)}$:

$$
\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) + \varepsilon^2\mathcal{A}^{(2)}. \tag{3.2}
$$

Точное значение (3.2) заключено в равенстве

$$
b_\lambda(k;\,\varepsilon) = a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) + \varepsilon^2 a^{(2)}, \tag{3.3}
$$

и в этом смысле оператор $\mathcal{A}^{(2)}$ сопоставлен квадратичной форме

$$
\begin{gathered}
a^{(2)}[u,\,u] = \int\limits_\Omega \left(g_2(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_2 u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{h_2(\mathbf{x})\,u}\right)\right)d\mathbf{x}, \\
u\in D\left[a^{(2)}\right] = \widetilde{H}^1(\Omega)\,.
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Такие определения корректны благодаря замкнутости и положительности формы $a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$.

Лемма 3.1. *При $\langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ форма $a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ замкнута и положительно определена.*

Доказательство. Оценим члены младших порядков с помощью следствия 1.2. Как видно из (1.1) с $f=h_1$ и $u\in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)$,

$$
\begin{gathered}
2\varepsilon\int\limits_\Omega \mathrm{Re}\left((\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{h_1(\mathbf{x})\,u}\right)d\mathbf{x} \leqslant \left(\widehat{\mu}+\frac{\check{\mu}}{\widehat{\mu}}\right)\|(\mathrm{D}_1+k)\,u\|^2_{L_2(\Omega)} \\
+\frac{\varepsilon^2}{\widehat{\mu}}\left(\frac{\|h_1\|^4_{2,\,\infty}}{\check{\mu}} + \|h_1\|^2_{2,\,\infty}\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\,,\quad \widehat{\mu},\ \check{\mu}>0.
\end{gathered}
$$

Отсюда при $\widehat{\mu} = \frac{\mu}{2}$, $\check{\mu} = \frac{\mu^2}{4}$ получаем

$$2\varepsilon \int\limits_{\Omega} \mathrm{Re}\left((\mathrm{D}_1 + k)\, u \cdot \overline{h_1(\mathbf{x})\, u} \right) d\mathbf{x} \leqslant \mu \left\| (\mathrm{D}_1 + k)\, u \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2\varepsilon^2}{\mu} \left(\frac{4 \left\| h_1 \right\|^4_{2,\infty}}{\mu^2} + \left\| h_1 \right\|^2_{2,\infty} \right) \left\| u \right\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mu > 0.$$

Оценка такого же типа члена нулевого порядка сразу следует из (1.1) с $f = |Q|^{1/2}$.

Для формы $a^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)$ полученные соотношения означают, с одной стороны, подчиненность стандартной метрике $L_2\left((0,a);H^1(0,1)\right)$, ибо

$$\begin{aligned} &a^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)[u,u] \leqslant \left(2 + \|g_1\|_{\infty}\right) \left\| (\mathrm{D}_1 + k)\, u \right\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(8 \|h_1\|^4_{2,\infty} + 2 \|h_1\|^2_{2,\infty} + \|Q\|^2_{1,\infty} + \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_{\infty} \right) \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \\ &\quad u \in L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right); \end{aligned}$$

а с другой — ограниченность нормы пространства $L_2\left((0,a);H^1(0,1)\right)$ значением $a^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)$-нормы, так как

$$\begin{aligned} &a^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)[u,u] \geqslant \tfrac{1}{2} \left\| g_1^{-1} \right\|^{-1}_{\infty} \left\| (\mathrm{D}_1 + k)\, u \right\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &\quad + \varepsilon^2 \Big(\lambda \left\| Q_*^{-1} \right\|^{-1}_{\infty} - 8 \left\| g_1^{-1} \right\|_{\infty} \left(64 \left\| g_1^{-1} \right\|^2_{\infty} \left\| h_1 \right\|^4_{2,\infty} + \left\| h_1 \right\|^2_{2,\infty} \right) \\ &\quad - \left(4 \left\| g_1^{-1} \right\|_{\infty} \left\| Q \right\|^2_{1,\infty} + \left\| Q \right\|_{1,\infty} \right) \Big) \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &\quad \geqslant \tfrac{1}{2} \left\| g_1^{-1} \right\|^{-1}_{\infty} \left\| (\mathrm{D}_1 + k)\, u \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon^2 \left(c_{\natural} + (\lambda - \lambda_0) \left\| Q_*^{-1} \right\|^{-1}_{\infty} \right) \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \\ &\quad u \in L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

где постоянные λ_0, $c_{\natural}$ определены в (1.16) и (1.15) соответственно. Остается добавить, что пространство $L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right)$ является подпространством $L_2\left((0,a);H^1(0,1)\right)$. □

Главная часть операторного семейства $\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)$ имеет дивергентную форму, а переменная x_2 входит в операторы этого семейства только как параметр, что в совокупности позволяет использовать для аппроксимации $\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)$ метод, предложенный в [Su2].

При п. в. $x_2 \in (0,\, a)$ рассмотрим форму

$$a_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)\,[w,\, w] = \int\limits_{(0,\,1)} \Big(g_1(\mathbf{x})\, |(\mathrm{D}_1 + k)\, w|^2 + 2\varepsilon\, \mathrm{Re}\Big((\mathrm{D}_1 + k)\, w \cdot \overline{h_1(\mathbf{x})\, w} \Big)$$
$$+ \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})\, |w|^2 + \varepsilon^2 \lambda Q_*(\mathbf{x})\, |w|^2 \Big) dx_1,$$
$$w \in D\left[a_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)\right] = \widetilde{H}^1(0,\, 1)\,,\ \langle k,\, \varepsilon \rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]\,.$$

Соответствующий самосопряженный оператор в $L_2(0,\, 1)$ обозначим через $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)$. Пространство $L_2(\Omega)$ можно трактовать как интеграл Неймана со слоями $L_2(0,\, 1)$, т.е.

$$L_2(\Omega) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus L_2(0,\, 1)\, dx_2,$$

который раскладывает оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon)$ в прямой интеграл по $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)$:

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)\, dx_2. \tag{3.6}$$

Именно слои $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)$ и допускают применение результатов работы [Su2].

3.2. Вложение в схему статьи [Su2]. Прежде всего, установим положительную определенность оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)$.

Лемма 3.2. *При* $\langle k,\, \varepsilon \rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]$ *и п. в.* $x_2 \in (0,\, a)$ *оператор* $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)$ *положительно определен. Более того, справедливо неравенство*

$$a_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)\,[w,\, w] \geqslant \left(c_* \left(k^2 + \varepsilon^2\right) + c_\natural \varepsilon^2 \right) \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,, \quad w \in \widetilde{H}^1(0,\, 1)\,, \tag{3.7}$$

в котором постоянная c_* *задана как*

$$c_* = \min\left\{ \tfrac{1}{2} \left\| g_1^{-1} \right\|_\infty^{-1},\, (\lambda - \lambda_0) \left\| Q_*^{-1} \right\|_\infty^{-1} \right\}, \tag{3.8}$$

а $c_\natural$ *определена в* (1.15).

Доказательство. Выберем произвольную функцию w из $\widetilde{H}^1(0,\, 1)$. Она может быть разложена по ортогональному базису в $L_2(0,\, 1)$,

$$w(x_1) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{w}_m e^{2\pi i m x_1},$$

при этом так как $k \in [-\pi, \pi)$ и $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\|(\mathrm{D}_1 + k)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (2\pi m + k)^2\, |\widehat{w}_m|^2 \geqslant k^2\, \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,. \tag{3.9}$$

Далее, повторяя оценки из доказательства леммы 3.1, несложно видеть, что при п. в. $x_2 \in (0,\, a)$

$$\begin{aligned} a^{(1)}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,[w,\,w] &\geqslant \tfrac{1}{2}\left\|g_1^{-1}\right\|^{-1}_\infty \|(\mathrm{D}_1 + k)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)} \\ &+ \varepsilon^2 \left(c_\natural + (\lambda - \lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|^{-1}_\infty\right) \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,, \quad w \in \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Таким образом, оценка (3.7) следует из (3.9) и (3.10). □

Проверим, что операторный пучок $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ удовлетворяет всем предположениям [Su2]. Он допускает представление в виде оператора

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \mathfrak{A}\,(k;\,x_2) &+ \varepsilon\left(\mathfrak{Y}_2^*\,(x_2)\,\widetilde{\mathfrak{Y}}\,(k) + \widetilde{\mathfrak{Y}}^*\,(k)\,\mathfrak{Y}_2\,(x_2)\right) \\ &+ \varepsilon^2 \mathfrak{Q}\,(x_2) + \varepsilon^2 \lambda \mathfrak{Q}_*\,(x_2)\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

старшая часть $\mathfrak{A}\,(k;\,x_2)$ которого определена при п. в. $x_2 \in (0,\, a)$ квадратичной формой $\mathfrak{a}\,(k;\,x_2)$,

$$\mathfrak{a}\,(k;\,x_2)\,[w,\,w] = \|\mathfrak{X}\,(k;\,x_2)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,, \quad w \in D\,[\mathfrak{a}\,(k;\,x_2)] = \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,, \tag{3.12}$$

отображения $\mathfrak{X}^*\,(k;\,x_2)\,\mathfrak{X}\,(k;\,x_2)$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}\,(k;\,x_2) &= \mathfrak{X}_0\,(x_2) + k\mathfrak{X}_1\,(x_2)\,, & D\,(\mathfrak{X}\,(k;\,x_2)) &= \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,, \\ \mathfrak{X}_0\,(x_2) &= g_1^{1/2}\,(\cdot,\,x_2)\,\mathrm{D}_1, & D\,(\mathfrak{X}_0\,(x_2)) &= \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,, \\ \mathfrak{X}_1\,(x_2) &= g_1^{1/2}\,(\cdot,\,x_2)\,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

а младшие члены заданы выражениями

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{Y}}\,(k) &= \widetilde{\mathfrak{Y}}_0 + k\widetilde{\mathfrak{Y}}_1, & D\left(\widetilde{\mathfrak{Y}}\,(k)\right) &= \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,, \\ \widetilde{\mathfrak{Y}}_0 &= \mathrm{D}_1, & D\left(\widetilde{\mathfrak{Y}}_0\right) &= \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,, \\ \widetilde{\mathfrak{Y}}_1 &= \mathcal{I}_{L_2(0,\,1)}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\mathfrak{Y}_2\,(x_2) = h_1\,(\cdot,\,x_2)\,, \qquad D\,(\mathfrak{Y}_2\,(x_2)) = \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,, \tag{3.15}$$

$$\mathfrak{Q}\,(x_2) = Q\,(\cdot,\,x_2)\,, \qquad D\,(\mathfrak{Q}\,(x_2)) = \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,, \tag{3.16}$$

$$\mathfrak{Q}_*\,(x_2) = Q_*\,(\cdot,\,x_2)\,. \tag{3.17}$$

Ясно, что $\mathfrak{X}_0(x_2)$, $\widetilde{\mathfrak{Y}}_0$ — замкнутые дифференциальные операторы первого порядка, а $\mathfrak{X}_1(x_2)$ и $\mathfrak{Q}_*(x_2)$ — ограниченные операторы умножения в $L_2(0,\,1)$.

Укажем элементарные соотношения, связанные с введенными операторами и выполненные при $w \in \widetilde{H}^1(0,\,1)$ и п. в. $x_2 \in (0,\,a)$ (ср. вывод (1.1) из леммы 1.1):

$$\left\|\widetilde{\mathfrak{Y}}(k)\,w\right\|_{L_2(0,\,1)} \leqslant \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2} \|\mathfrak{X}(k;\,x_2)\,w\|_{L_2(0,\,1)}\,; \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{Y}_2(x_2)\,w\|_{L_2(0,\,1)}^2 \leqslant \mu\,\|\mathfrak{X}(k;\,x_2)\,w\|^2_{L_2(0,\,1)} \\ + \left(\frac{\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|h_1\|^4_{2,\,\infty}}{\mu} + \|h_1\|^2_{2,\,\infty}\right)\|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,;\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\left|(\mathfrak{Q}(x_2)\,w,\,w)_{L_2(0,\,1)}\right| \leqslant \mu\,\|\mathfrak{X}(k;\,x_2)\,w\|^2_{L_2(0,\,1)} \\ + \left(\frac{\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|Q\|^2_{1,\,\infty}}{\mu} + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)\|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Если $\langle k,\,\varepsilon\rangle = \mathbf{0}$, то оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ оказывается равным $\mathfrak{A}(0;\,x_2)$. Отображение $\mathfrak{A}(0;\,x_2)$ положительно, точка $\lambda = 0$ является точкой его дискретного спектра, а соответствующее собственное подпространство

$$\widetilde{\mathfrak{N}} = N\,(\mathfrak{A}(0;\,x_2)) = \Big\{w \in L_2(0,\,1) : w = \mathrm{const}\Big\} \tag{3.21}$$

одномерно.

Итак, все требования метода статьи [Su2] удовлетворены. Осталось только реализовать постоянные из абстрактной схемы [Su2].

Оценим снизу расстояние $d_0(x_2)$ от точной нижней границы $\mathfrak{A}(0;\,x_2)$, точки $\lambda = 0$, до остального спектра.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{A}_\perp(0;\,x_2)$ есть часть оператора $\mathfrak{A}(0;\,x_2)$ в $\widetilde{\mathfrak{N}}^\perp$. Тогда*

$$\mathfrak{A}_\perp(0;\,x_2) \geqslant 4\pi^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \mathcal{I}_{\widetilde{\mathfrak{N}}^\perp}$$

при п. в. $x_2 \in (0,\,a)$.

Доказательство. Поскольку для $w \in D\,[\mathfrak{a}(0;\,x_2)]$ верно разложение в ряд Фурье вида

$$w(x_1) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{w}_m e^{2\pi i m x_1},$$

то при $w \in \widetilde{\mathfrak{N}}^{\perp} \cap D\,[\mathfrak{a}\,(0;\,x_2)]$ и п. в. $x_2 \in (0,\,a)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\,(0;\,x_2)\,[w,\,w] &\geqslant \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \|\mathrm{D}_1 w\|^2_{L_2(0,\,1)} \\ &= \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z},\\ m\neq 0}} (2\pi m)^2\,|\widehat{w}_m|^2 \geqslant 4\pi^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,.\end{aligned}$$

□

Полученное в лемме 3.3 неравенство позволяет дать равномерную оценку расстояния $d_0\,(x_2)$:

$$d_0\,(x_2) \geqslant d_0 = 4\pi^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \ \text{при п. в. } \ x_2 \in (0,\,a)\,. \tag{3.22}$$

Фиксируем, руководствуясь работой [Su2], положительное число δ,

$$\delta = \frac{d_0}{32} < \frac{d_0}{26}, \tag{3.23}$$

и положим согласно [Su2, (1.18)], учитывая (3.18), (3.19) и (3.20),

$$\begin{aligned}\tau_0 = \delta^{1/2}\Big(&2\,\|g_1\|_\infty \left(1 + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\right) + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|h_1\|^4_{2,\,\infty} + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} \\ &+ \|Q\|^2_{1,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\Big)^{-1/2}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Заметим, что при таком определении число τ_0 заведомо лежит в интервале $(0,\,1)$; это включение будет неявно использоваться далее. Определим, наконец, следуя [Su2, (2.14), (2.15), (2.17), (2.33), (2.36)], постоянные

$$C_T^{(1)} = \max\left\{2 + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty,\ \left(\|g_1\|_\infty + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|h_1\|^4_{2,\,\infty} + \|h_1\|^2_{2,\,\infty}\right)\delta^{-1}\right\},$$

$$\begin{aligned}C_T^{(2)} = \max\Big\{&1 + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty,\ \Big(1 + \|g_1\|_\infty + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|h_1\|^4_{2,\,\infty} + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} \\ &+ \|Q\|^2_{1,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\Big)\delta^{-1}\Big\}\end{aligned}$$

и с их помощью —

$$\begin{aligned}C_T &= C_T^{(1)} + \tau_0 C_T^{(2)}, \\ \check{C}_T &= 416 \cdot 2^{1/2} C_T^{(1)} \left(13 C_T^{(1)} C_T + C_T^{(2)}\right), \\ C_T^0 &= \check{C}_T + 416 \cdot 2^{1/2} C_T^{(2)} C_T.\end{aligned}$$

Видно, что все заданные величины зависят лишь от $\left\|g_1\right\|_\infty$, $\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty$, $\left\|h_1\right\|_{2,\,\infty}$, $\left\|Q\right\|_{1,\,\infty}$, $\left\|Q_*\right\|_\infty$ и λ, т.е. от исходных данных задачи исключительно.

3.3. Операторное семейство $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ и его спектральный росток. Введем параметры $\tau = \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}$ и $\boldsymbol{\vartheta} = \langle \vartheta_1,\, \vartheta_2\rangle$, $\vartheta_1 = \frac{k}{\tau}$, $\vartheta_2 = \frac{\varepsilon}{\tau}$, и переобозначим оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$:

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \mathfrak{A}_\lambda^{(1)}(\tau;\,\boldsymbol{\vartheta};\,x_2)\,.$$

Определим, следуя схеме [Su2], при п. в. $x_2 \in (0,\,a)$ спектральный росток операторного семейства $\mathfrak{A}_\lambda^{(1)}(\tau;\,\boldsymbol{\vartheta};\,x_2)$ при $\tau = 0$ — линейное отображение $\mathfrak{S}_\lambda(\boldsymbol{\vartheta};\,x_2)$, действующее в одномерном пространстве $\widetilde{\mathfrak{N}}$ как умножение на число

$$\mathfrak{S}_\lambda(\boldsymbol{\vartheta};\,x_2) = \vartheta_1^2 g_1^0(x_2) + 2\vartheta_1\vartheta_2 h_1^0(x_2) + \vartheta_2^2 Q^0(x_2) + \vartheta_2^2\lambda Q_*^0(x_2)\,, \qquad (3.25)$$

в которое входят функции $g_1^0(\cdot)$, $h_1^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot)$, $Q_*^0(\cdot)$, вычисленные согласно общему правилу из [Su2, п. 7.1] и приведенные в (1.22) (подробности вычисления опущены). Для ростка будет также использоваться обозначение $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \mathfrak{S}_\lambda(\boldsymbol{\vartheta};\,x_2)$. Из (3.25) тогда следует равенство

$$\left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) = k^2 g_1^0(x_2) + 2\varepsilon k h_1^0(x_2) + \varepsilon^2 Q^0(x_2) + \varepsilon^2\lambda Q_*^0(x_2)\,. \qquad (3.26)$$

Еще одно свойство ростка может быть извлечено из оценки для оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ снизу.

Лемма 3.4. *При $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ и п. в. $x_2 \in (0,\,a)$*

$$\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) \geqslant \left(c_* + c_\natural\frac{\varepsilon^2}{k^2+\varepsilon^2}\right), \qquad (3.27)$$

где постоянные c_* и $c_\natural$ определены в (3.8) *и* (1.15) *соответственно.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2 при $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ и п. в. $x_2 \in (0,\,a)$

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2) \geqslant \left(c_*\left(k^2+\varepsilon^2\right) + c_\natural\varepsilon^2\right)\mathcal{I}_{L_2(0,\,1)}.$$

Следовательно, для нижнего собственного значения $\lambda_1(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ выполнено

$$\lambda_1(k;\,\varepsilon;\,x_2) \geqslant \left(c_* + c_\natural\vartheta_2^2\right)\tau^2. \qquad (3.28)$$

В силу [Su2, (1.26)–(1.28)] и [Su2, предложение 1.6] при фиксированном $\boldsymbol{\vartheta}$ справедлива асимптотика

$$\lambda_1(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \tau^2\mathfrak{S}_\lambda(\boldsymbol{\vartheta};\,x_2) + O\left(\tau^3\right), \quad \tau\to 0.$$

Отсюда и из (3.28) вытекает (3.27). □

Пусть $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,\sigma) = \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,[0,\,\sigma])$ — непрерывное справа разложение единицы для спектрального проектора оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$. В соответствии с [Su2, предложение 1.5] справедлива следующая

Лемма 3.5. *При* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, *и п. в.* $x_2 \in (0,\, a)$

$$\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,\delta) = \mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,3\delta)$$

и

$$\operatorname{rank}\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,\delta) = 1.$$

Лемма показывает, что если $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, то при п. в. $x_2 \in (0,\, a)$ интервал $(\delta,\, 3\delta]$ включен в резольвентное множество оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$. Вместо $\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,\delta)$ далее будем использовать обозначение $\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{P}}$ — ортогональный проектор в пространстве $L_2\,(0,\,1)$ на ядро $\widetilde{\mathfrak{N}}$ отображения $\mathfrak{A}\,(0;\,x_2)$; отметим, что $\widetilde{\mathcal{P}}$ совпадает с $\mathcal{F}_\lambda\,(0;\,0;\,x_2)$. Следующая теорема является частным случаем [Su2, теорема 2.2].

Теорема 3.6. *При* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, *и п. в.* $x_2 \in (0,\, a)$ *справедливы представления*

$$\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \widetilde{\mathcal{P}} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathcal{S}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,\widetilde{\mathcal{P}}&\\ + \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{3/2}\Psi_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,,&\end{aligned} \tag{3.30}$$

притом выполнены оценки

$$\|\Phi_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\|_{\mathbf{B}(L_2(0,\,1))} \leqslant C_1,$$
$$\|\Psi_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\|_{\mathbf{B}(L_2(0,\,1))} \leqslant C_2$$

с постоянными $C_1 = 32\cdot 2^{1/2}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)C_T$, $C_2 = 2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\delta C_T^0$, *зависящими лишь от исходных данных задачи.*

Для аппроксимации с корректором необходима дальнейшая детализация разности операторов $\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2) - \widetilde{\mathcal{P}}$ в случае, когда $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$. При данных условиях в спектральном проекторе $\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ выделим член порядка $\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}$, выражающийся явно через функции (1.30), (1.31), и выпишем остаток, порядок которого $k^2+\varepsilon^2$ (см. [Su2, формулы (1.48), (2.49)–(2.52)]):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \widetilde{\mathcal{P}} + (k\Lambda\,(\cdot,\,x_2) + \varepsilon\mathrm{M}\,(\cdot,\,x_2))\,\widetilde{\mathcal{P}} + \widetilde{\mathcal{P}}\,(k\Lambda^*\,(\cdot,\,x_2) + \varepsilon\mathrm{M}^*\,(\cdot,\,x_2))&\\ + \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,.&\end{aligned} \tag{3.31}$$

Поскольку средние значения отображений $\Lambda\,(\cdot,\,x_2)$ и $\mathrm{M}\,(\cdot,\,x_2)$ по интервалу $(0,\,1)$ при п. в. $x_2 \in (0,\,a)$ равны нулю, то $\widetilde{\mathcal{P}}\Lambda^*\,(\cdot,\,x_2)\,\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}}\mathrm{M}^*\,(\cdot,\,x_2)\,\widetilde{\mathcal{P}} = 0$. Суммируем вышесказанное в виде теоремы.

Теорема 3.7. *Пусть $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. Тогда при п. в. $x_2 \in (0, a)$*

$$\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon;\, x_2)\, \widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}} + (k\Lambda(\cdot,\, x_2) + \varepsilon \mathrm{M}(\cdot,\, x_2))\, \widetilde{\mathcal{P}} + \left(k^2 + \varepsilon^2\right) \Upsilon_\lambda (k;\, \varepsilon;\, x_2)\, \widetilde{\mathcal{P}},$$

а оператор $\Upsilon_\lambda (k;\, \varepsilon;\, x_2)$ допускает оценку нормы

$$\|\Upsilon_\lambda (k;\, \varepsilon;\, x_2)\|_{\mathbf{B}(L_2(0,\,1))} \leqslant C_3,$$

в которой $C_3 = 32{\cdot}2^{1/2}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)\left(13 C_T^{(1)} C_T + C_T^{(2)}\right)$ зависит лишь от данных задачи.

Наконец, понадобится оценка композиции операторов $\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)\right)^{1/2}$ и $\Upsilon_\lambda (k;\, \varepsilon;\, x_2)$, вытекающая из [Su2, предложение 2.7].

Теорема 3.8. *При $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, и п. в. $x_2 \in (0, a)$ справедливо неравенство*

$$\left\| \left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon;\, x_2)\right)^{1/2} \Upsilon_\lambda (k;\, \varepsilon;\, x_2) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(0,\,1))} \leqslant C_4;$$

константа $C_4 = 14 \cdot 26^{1/2} \delta^{1/2}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)\left(7 C_T^{(1)} C_T + C_T^{(2)}\right)\left(1 + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2}$ зависит только от исходных данных.

3.4. Операторное семейство $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon)$ и его спектральный росток. Равномерность полученных в предыдущем пункте оценок по переменной $x_2 \in (0, a)$ позволяет перенести их со слоев $L_2(0,\, 1)$ в прямой интеграл $L_2(\Omega)$. Переход этот, однако, требует дополнительных определений.

В соответствии с (3.6), (3.11) и (3.12)–(3.17)

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\, \varepsilon) = \mathfrak{A}(k) + \varepsilon\left(\mathfrak{Y}_2^* \mathfrak{Y}(k) + \mathfrak{Y}^*(k)\, \mathfrak{Y}_2\right) + \varepsilon^2 \mathfrak{Q} + \varepsilon^2 \lambda \mathfrak{Q}_*.$$

Здесь $\mathfrak{A}(k)$ есть оператор, отвечающий квадратичной форме

$$\mathfrak{a}(k)\,[u,\, u] = \|\mathfrak{X}(k)\, u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in D\,[\mathfrak{a}(k)] = L_2\left((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\right),$$

в которой

$$\mathfrak{X}(k) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathfrak{X}(k;\, x_2)\, dx_2 = \mathfrak{X}_0 + k\mathfrak{X}_1, \quad D\left(\mathfrak{X}(k)\right) = L_2\left((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\right),$$

$$\mathfrak{X}_0 = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathfrak{X}_0(x_2)\, dx_2 = g_1^{1/2} \mathrm{D}_1, \qquad D\left(\mathfrak{X}_0\right) = L_2\left((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\right),$$

$$\mathfrak{X}_1 = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathfrak{X}_1(x_2)\, dx_2 = g_1^{1/2},$$

а

$$\mathfrak{Y}(k) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus\widetilde{\mathfrak{Y}}(k)\,dx_2 = \mathrm{D}_1 + k\mathcal{I}_{L_2(\Omega)}, \quad D(\mathfrak{Y}(k)) = L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),$$

$$\mathfrak{Y}_2 = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus\mathfrak{Y}_2(x_2)\,dx_2 = h_1, \qquad D(\mathfrak{Y}_2) = L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),$$

$$\mathfrak{Q} = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus\mathfrak{Q}(x_2)\,dx_2 = Q, \qquad D(\mathfrak{Q}) = L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),$$

$$\mathfrak{Q}_* = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus\mathfrak{Q}_*(x_2)\,dx_2 = Q_*.$$

Тем самым $\mathfrak{X}(k)$ и $\mathfrak{Y}(k)$ — замкнутые операторы дифференцирования первого порядка, $\mathfrak{Q}_*$ — ограниченный оператор умножения на $Q_*(\cdot)$.

Спектральную меру оператора $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)$, соответствующую промежутку $[0,\,\sigma]$, обозначим через $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,\sigma)$; как и прежде, примем соглашение использовать для краткости символ $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ вместо $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,\delta)$. Ясно, что из представления (3.6) вытекает разложимость спектрального проектора оператора $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)$, в частности

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2. \tag{3.32}$$

При $\langle k,\,\varepsilon\rangle = \mathbf{0}$ соотношение (3.32) переходит в равенство

$$\mathcal{P} = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus\widetilde{\mathcal{P}}dx_2, \tag{3.33}$$

в котором $\mathcal{P}$ — ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство $\mathfrak{N}$ функций, зависящих только от переменной x_2:

$$\mathfrak{N} = N(\mathfrak{A}(0)) = \Big\{u \in L_2(\Omega) : u(\cdot,\,x_2) = \mathrm{const} \ \text{ при п. в. } \ x_2 \in (0,\,a)\Big\}. \tag{3.34}$$

Возможно и другое толкование множества $\mathfrak{N}$: (3.34) естественным образом изоморфно $L_2(0,\,a)$, поэтому

$$\mathfrak{N} \simeq \int\limits_{(0,\,a)} \oplus\widetilde{\mathfrak{N}}dx_2.$$

С равномерно ограниченной измеримой операторнозначной функцией $(x_2 \mapsto \mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2))$, заданной п. в. на интервале $(0,\,a)$, связан единственный непрерывный разложимый оператор в пространстве $\mathfrak{N}$, который обозначим через $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ и назовем спектральным ростком семейства операторов $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ при $\tau = \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} = 0$:

$$\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2. \tag{3.35}$$

Таким образом, $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ представляет собой оператор умножения на функцию $(x_2 \mapsto \mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2))$ от переменной x_2, определенную в (3.25), и так же, как и $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)$, зависит лишь от параметра $\boldsymbol{\vartheta}$, но не от τ.

На спектральный росток $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ переносится оценка вида (3.27) из леммы 3.4.

Лемма 3.9. *При* $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]$

$$\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon) \geqslant \left(c_* + c_\natural \frac{\varepsilon^2}{k^2+\varepsilon^2}\right)\mathcal{I}_{\mathfrak{N}}; \tag{3.36}$$

константы c_* *и* $c_\natural$ *определены в* (3.8) *и* (1.15) *соответственно.*

Введем также $\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon)$, $\Psi_\lambda(k;\,\varepsilon)$ и $\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)$ как операторы, соответствующие оператор-функциям $\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon;\,\cdot)$, $\Psi_\lambda(k;\,\varepsilon;\,\cdot)$ и $\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon;\,\cdot)$ соответственно:

$$\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \Phi_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2, \tag{3.37}$$

$$\Psi_\lambda(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \Psi_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2, \tag{3.38}$$

$$\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2. \tag{3.39}$$

Тогда соотношения (3.6), (3.26), (3.29)–(3.33) и (3.35) влекут

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \mathcal{P} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon), \tag{3.40}$$

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \mathcal{P} + (k\Lambda + \varepsilon\mathrm{M})\,\mathcal{P} + \mathcal{P}\,(k\Lambda^* + \varepsilon\mathrm{M}^*) + \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon), \tag{3.41}$$

$$\left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon) = k^2 g_1^0 + 2\varepsilon k h_1^0 + \varepsilon^2 Q^0 + \varepsilon^2\lambda Q_*^0, \tag{3.42}$$

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{3/2}\Psi_\lambda(k;\,\varepsilon). \tag{3.43}$$

Следующее утверждение является прямым следствием из леммы 3.2 и формулы (3.6).

Лемма 3.10. *Оператор* $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)$ *при* $\langle k,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\pi)\times(0,1]$ *положительно определен. Более того,*

$$a_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)[u,u] \geqslant \left(c_*\left(k^2+\varepsilon^2\right)+c_\natural\varepsilon^2\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$
$$u \in L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right);$$

постоянные c_*, $c_\natural$ *определены в* (3.8) *и* (1.15) *соответственно.*

Разложение (3.6) позволяет перенести первую часть утверждения леммы 3.5 на спектральный проектор оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)$.

Лемма 3.11. *При* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$,

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon;\delta) = \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon;3\delta).$$

Равенства (3.37), (3.38), (3.40) и (3.43) и теорема 3.6 обеспечивают справедливость следующего результата.

Теорема 3.12. *Имеют место представления* (3.40), (3.43), *причем при* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, *выполнены оценки*

$$\|\Phi_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_1,$$
$$\|\Psi_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_2;$$

постоянные C_1, C_2 *выписаны в теореме* 3.6.

Определение (3.39) оператора $\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)$, а также разложения (3.32) и (3.33) проекторов $\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)$, $\mathcal{P}$ вместе с теоремой 3.7 влекут следующее утверждение.

Теорема 3.13. *При* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, *справедливо равенство*

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P} = \mathcal{P} + (k\Lambda+\varepsilon\mathrm{M})\mathcal{P} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P}, \tag{3.44}$$

притом

$$\|\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_3;$$

постоянная C_3 *определена в теореме* 3.7.

Вполне аналогично из теоремы 3.8 получается равномерная оценка оператора $\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)$.

Теорема 3.14. *Пусть* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$. *Тогда*

$$\left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_4;$$

константа C_4 *задана в теореме* 3.8.

3.5. Спектральный росток операторного семейства $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$. Аппроксимация операторного семейства $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)$ дает возможность ввести аналог спектрального ростка для $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ и приблизить с его помощью операторный пучок $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ при малых ε.

Пусть $\langle k,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\pi)\times(0,1]$ и $s_\lambda(k;\varepsilon)$ — полуторалинейная форма оператора $\mathcal{S}_\lambda(k;\varepsilon)$. В пространстве $L_2(0,a)$ введем форму

$$\begin{gathered} l_\lambda(k;\varepsilon)[w,w] = \left(k^2+\varepsilon^2\right) s_\lambda(k;\varepsilon)[w,w] \\ + \varepsilon^2 \int\limits_{(0,a)} \left(g_2^0(x_2)\,|\mathrm{D}_2 w|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{D}_2 w\cdot\overline{h_2^0(x_2)\,w}\right)\right) dx_2, \\ w\in D[l_\lambda(k;\varepsilon)] = \widetilde{H}^1(0,a),\ \langle k,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\pi)\times(0,1]. \end{gathered} \tag{3.45}$$

Ясно, что $l_\lambda(k;\varepsilon)$ есть сужение $b_\lambda^0(k;\varepsilon)$ на подпространство $\mathcal{P}\widetilde{H}^1(\Omega)\simeq\widetilde{H}^1(0,a)$, а следовательно, и самая форма $l_\lambda(k;\varepsilon)$ является замкнутой и положительно определенной вместе с $b_\lambda^0(k;\varepsilon)$. Самосопряженный положительно определенный оператор, соответствующий $l_\lambda(k;\varepsilon)$, обозначим через $\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)$. Легко видеть, что из-за липшицевости по переменной x_2 своих коэффициентов он определен на $D(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)) = \widetilde{H}^2(0,a)$ и имеет вид

$$\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon) = k^2 g_1^0 + 2\varepsilon k h_1^0 + \varepsilon^2 Q^0 + \varepsilon^2\lambda Q_*^0 + \varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2 g_2^0 \mathrm{D}_2 + \left(h_2^0\right)^*\mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2 h_2^0\right). \tag{3.46}$$

Отметим еще тождество, вытекающее из соотношений для форм входящих в него операторов:

$$\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\,\mathcal{P} = \mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\,\mathcal{P}, \tag{3.47}$$

т.е. отображение $\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)$ — часть $\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)$ в подпространстве $\mathcal{P}\widetilde{H}^1(\Omega)$.

§4. Предварительные оценки

В этом параграфе сосредоточен ряд подготовительных оценок для введенных операторов, который закладывает основу всего дальнейшего изложения.

4.1. Оценки с операторами $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ и $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)$.

Лемма 4.1. *Пусть $\langle k,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\pi)\times(0,1]$. Тогда справедливы соотношения*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1}, \tag{4.1}$$

$$\left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1}, \tag{4.2}$$

где c_* — постоянная, определенная равенством (3.8).

Доказательство. Разложим при п. в. $x_2 \in (0,\, a)$ функцию $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ по ортогональному базису пространства $L_2(0,\, 1)$:

$$u(x_1,\, x_2) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_m(x_2)\, e^{2\pi i m x_1}.$$

Тогда ввиду того, что $k \in [-\pi,\, \pi)$, выполнена оценка

$$\|(\mathrm{D}_1 + k)\, u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (2\pi m + k)^2 \int\limits_{(0,\, a)} |\widehat{u}_m(x_2)|^2\, dx_2 \geqslant k^2\, \|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (4.3)$$

Остается воспользоваться неравенствами (2.9) и (3.5). □

Лемма 4.2. *При* $\langle k,\, \varepsilon\rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]$ *верны следующие оценки*:

$$\left\|(\mathrm{D}_1 + k)\, (\mathcal{B}_\lambda(k;\, \varepsilon))^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\, \|g_1^{-1}\|^{1/2}_\infty, \quad (4.4)$$

$$\left\|(\mathrm{D}_1 + k)\, \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\, \varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\, \|g_1^{-1}\|^{1/2}_\infty, \quad (4.5)$$

$$\left\|\varepsilon \mathrm{D}_2\, (\mathcal{B}_\lambda(k;\, \varepsilon))^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\, \|g_2^{-1}\|^{1/2}_\infty. \quad (4.6)$$

Замечание. Так как $R\left((\mathcal{B}_\lambda(k;\, \varepsilon))^{-1/2}\right) = \widetilde{H}^1(\Omega)$, $R\left(\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\, \varepsilon)\right)^{-1/2}\right) = L_2\left((0,\, a);\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\right)$, то все композиции операторов в (4.4)–(4.6) корректно определены.

Доказательство. Неравенство (2.9) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\, \varepsilon))^{1/2}\, u\right\|^2_{L_2(\Omega)} &= b_\lambda(k;\, \varepsilon)\,[u,\, u] \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}\, \|g_1^{-1}\|^{-1}_\infty\, \|(\mathrm{D}_1 + k)\, u\|^2_{L_2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\, \|g_2^{-1}\|^{-1}_\infty\, \|\mathrm{D}_2 u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega), \end{aligned}$$

из которого следуют (4.4), (4.6), а оценка (3.5) влечет

$$\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\, \varepsilon)\right)^{1/2} u\right\|^2_{L_2(\Omega)} = a^{(1)}_\lambda(k;\, \varepsilon)\,[u,\, u] \geqslant \tfrac{1}{2}\, \|g_1^{-1}\|^{-1}_\infty\, \|(\mathrm{D}_1 + k)\, u\|^2_{L_2(\Omega)},$$
$$u \in L_2\left((0,\, a);\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\right),$$

откуда вытекает (4.5). □

4.2. Оценки со спектральными проекторами.

Лемма 4.3. *При* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, *имеют место неравенства*

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2} (\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon))^\perp \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_5, \tag{4.7}$$

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2} \mathcal{P}^\perp \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_6, \tag{4.8}$$

$$\left\| \left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2} \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} C_7, \tag{4.9}$$

в которых постоянные C_5, C_6, C_7 *зависят только от исходных параметров задачи.*

Доказательство. Пусть $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Предположим сначала, что выполнено условие $c_\natural\varepsilon^2 < 3\delta$ (напомним: постоянная $c_\natural$ определена в (1.15)). Согласно лемме 3.10 точная нижняя граница оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ строго больше числа $c_\natural\varepsilon^2$, из чего следует положительная определенность $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 c_\natural \mathcal{I}_{L_2(\Omega)}$. Поскольку в соответствии с определениями (2.8) и (3.1) форм $b_\lambda(k;\,\varepsilon)$ и $a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ и следствием 1.2 (при $f=h_2$)

$$\begin{aligned}
&\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2} u \right\|^2_{L_2(\Omega)} = b_\lambda(k;\,\varepsilon)[u,\,u] \geqslant a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)[u,\,u] \\
&\quad - \varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \|(\mathrm{D}_1+k)\,u\|^2_{L_2(\Omega)} - \varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \left(\|h_2\|^4_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty}\right) \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \\
&\quad = \left\| \left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 c_\natural \mathcal{I}_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} u \right\|^2_{L_2(\Omega)} - \varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \|(\mathrm{D}_1+k)\,u\|^2_{L_2(\Omega)},
\end{aligned}$$

то, применяя (4.4), получаем

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 c_\natural \mathcal{I}_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2} \right\|^2_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \\
&\quad \leqslant 1 + \varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \left\| (\mathrm{D}_1+k)\,(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2} \right\|^2 \leqslant 1 + 2\varepsilon^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty.
\end{aligned}$$

А тогда вследствие леммы 3.11

$$\begin{aligned}
&\left\| (\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon))^\perp (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \\
&\leqslant \left(1 + 2\varepsilon^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2} \left\| (\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon))^\perp \left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 c_\natural \mathcal{I}_{L_2(\Omega)}\right)^{-1/2} \right\| \\
&\leqslant \left(1 + 2\varepsilon^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2} \left(3\delta - \tfrac{1}{2}c_\natural\varepsilon^2\right)^{-1/2} \\
&< \left(1 + 2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2} \left(\tfrac{3}{2}\delta\right)^{-1/2} = \widetilde{C}_5.
\end{aligned}$$

Если же, обратно, $c_\natural \varepsilon^2 \geqslant 3\delta$, то нужная оценка очевидна из формулы (4.1):

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^\perp\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\\&\qquad\leqslant\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\leqslant\left(\tfrac{1}{3}c_*^{-1}c_\natural\delta^{-1}\right)^{1/2}=\widehat{C}_5.\end{aligned}$$

Тем самым неравенство (4.7) доказано с константой $C_5 = \max\left\{\widetilde{C}_5,\, \widehat{C}_5\right\}$.

Далее, оценка (4.8) вытекает из (4.1) и (4.7) с учетом (3.40) и теоремы 3.12:

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\\&\quad=\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\Big(\left(\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^\perp+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\Big)\right\|\\&\quad\leqslant c_*^{-1/2}C_1+C_5=C_6.\end{aligned}$$

Докажем теперь последнее неравенство. Согласно представлению (3.43), теореме 3.12 и определению (3.42) (если принять во внимание оценки усредненных коэффициентов (1.23), (1.24), (1.26) и (1.27)), при любом элементе $u \in L_2\,(\Omega)$

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,u\right\|_{L_2(\Omega)}^2=\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,u,\,u\right)_{L_2(\Omega)}\\&\quad\leqslant\Big(\left(k^2+\varepsilon^2\right)\left\|\mathcal{S}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P}\right\|+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{3/2}\left\|\Psi_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right\|\Big)\,\|u\|_{L_2(\Omega)}^2\\&\quad\leqslant\left(k^2+\varepsilon^2\right)\Big(\|g_1\|_\infty+\left(\|g_1\|_\infty\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2}\|h_1\|_{2,\,\infty}\\&\quad+\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\|h_1\|_{2,\,\infty}^2+\|Q\|_{1,\,\infty}+\lambda\,\|Q_*\|_\infty+C_2\Big)\,\|u\|_{L_2(\Omega)}^2\\&\quad=\left(k^2+\varepsilon^2\right)C_7^2\,\|u\|_{L_2(\Omega)}^2\,,\quad k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2,\ \ \varepsilon>0,\end{aligned}$$

из чего следует (4.9). □

4.3. Оценки с эффективным оператором. Цель данного пункта состоит в дополнении оценок из п. 4.1–4.2 неравенствами, включающими эффективный оператор. Базой нижеследующих рассуждений будет служить формула (2.12), которую преобразуем, применяя (1.23), к более удобному для приложения виду:

$$\begin{aligned}&b_\lambda^0\,(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u]\geqslant\tfrac{1}{2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\,u\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|\mathrm{D}_2u\|_{L_2(\Omega)}^2\\&\quad+\varepsilon^2\,(\lambda-\lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|u\|_{L_2(\Omega)}^2\,,\quad u\in\widetilde{H}^1\,(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Повторяя приемы, которые были использованы в доказательствах лемм 4.1 и 4.2, можно легко перенести фигурирующие в них оценки с исходного оператора на эффективный. Выведем еще одно неравенство с отображением $\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$.

Пусть $u \in \mathcal{P}^\perp \widetilde{H}^1\,(\Omega)$, тогда $\mathcal{P}u = 0$ и

$$\|(\mathrm{D}_1 + k)\,u\|_{L_2(\Omega)} \geqslant \pi\,\|u\|_{L_2(\Omega)}\,, \quad k \in [-\pi,\,\pi) \tag{4.11}$$

(ср. с (4.3)). Комбинируя (4.10) и (4.11), приходим к соотношению

$$\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty.$$

Тем самым установлена

Лемма 4.4. *Пусть* $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]$. *Тогда*

$$\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1}\left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{-1}, \tag{4.12}$$

$$\left\|(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}, \tag{4.13}$$

$$\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}, \tag{4.14}$$

$$\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty. \tag{4.15}$$

Благодаря тождеству (3.47) оценки вида (4.12) и (4.14) могут быть выписаны и для оператора $\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$. Добавим к ним еще неравенство

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^\perp\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\\
&\quad= \left\|\left(\mathcal{P}^\perp - \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\mathcal{P}\right\|\\
&\quad= \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\left\|\Phi_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\mathcal{P}\right\| \leqslant c_*^{-1/2}C_1 = C_8,
\end{aligned}$$

которое получается из представления (3.40), теоремы 3.12 и оценки для $\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$, подобной (4.12), и сформулируем итог.

Лемма 4.5. *При произвольных* $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]$ *имеют место неравенства*

$$\left\|\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1}\left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{-1}, \tag{4.16}$$

$$\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}, \tag{4.17}$$

$$\left\|\left(\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^\perp\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_8; \tag{4.18}$$

постоянная C_8 определяется только по параметрам задачи.

Наконец, приведем утверждение об ограниченности композиций оператора, обратного к эффективному, и дифференцирования второго порядка.

Лемма 4.6. *При $\langle k, \varepsilon\rangle \in [-\pi, \pi) \times (0, 1]$ выполнены оценки*

$$\left\|(\mathrm{D}_1 + k)^2 \left(\mathcal{B}^0_\lambda (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty , \tag{4.19}$$

$$\left\|\varepsilon \mathrm{D}_2 \left(\mathrm{D}_1 + k\right) \left(\mathcal{B}^0_\lambda (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2} \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2} , \tag{4.20}$$

$$\left\|\varepsilon^2 \mathrm{D}_2^2 \left(\mathcal{B}^0_\lambda (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2C_9 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty ; \tag{4.21}$$

константа C_9 зависит лишь от данных задачи.

Замечание. Корректность формулировки леммы 4.6 обусловливает совпадение области определения оператора $\mathcal{B}^0_\lambda (k;\, \varepsilon)$ с пространством $\widetilde{H}^2 (\Omega)$.

Доказательство. Доказательство первых двух неравенств следует из перестановочности самосопряженных операторов $\mathcal{B}^0_\lambda (k;\, \varepsilon)$, D_1 и леммы 4.4. Проверку последнего удобно отложить до следующего параграфа. □

§5. Оценки коммутаторов

Настоящий параграф содержит несколько вспомогательных утверждений технического характера, касающихся оценок коммутаторов дифференцирования D_2 с оператором $(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1}$ и спектральным проектором $\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)$. Существенную роль в доказательстве этих оценок играет ранее не использовавшееся условие гладкости коэффициентов по второй переменной.

5.1. Исследование коммутатора операторов $(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1}$ и D_2. Начнем с утверждения о частичном (по переменной x_2) повышении гладкости решения эллиптического уравнения

$$\begin{aligned}&(\mathrm{D}_1 + k)\, g_1(\mathbf{x})\, (\mathrm{D}_1 + k)\, u + \varepsilon^2 \mathrm{D}_2 g_2(\mathbf{x}) \mathrm{D}_2 u \\ &\quad + \varepsilon \overline{h_1 (\mathbf{x})}\, (\mathrm{D}_1 + k)\, u + \varepsilon\, (\mathrm{D}_1 + k)\, h_1 (\mathbf{x})\, u + \varepsilon^2 \overline{h_2 (\mathbf{x})} \mathrm{D}_2 u + \varepsilon^2 \mathrm{D}_2 h_2 (\mathbf{x})\, u \\ &\quad + \varepsilon^2 Q (\mathbf{x})\, u + \varepsilon^2 \lambda Q_* (\mathbf{x})\, u = f (\mathbf{x})\end{aligned}$$

с периодическими граничными условиями при $f \in L_2 (\Omega)$.

Лемма 5.1. *При условиях 1, 2, 3, 4 на коэффициенты из принадлежности функции и области $D (\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))$ следуют включения $u \in \widetilde{H}^1 (\Omega)$, $\mathrm{D}_2 u \in \widetilde{H}^1 (\Omega)$.*

Лемма 5.1 следует из условий гладкости коэффициентов указанного уравнения и их периодичности по второй переменной, а ее проверка аналогична доказательству [LaU, теорема 10.1, гл. III].

Лемма 5.2. *При $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, верны включение*

$$\overline{\left[(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1},\, \mathrm{D}_2\right]} \in \mathbf{B}\left(L_2(\Omega)\right)$$

и оценка

$$\left\|\left[(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1},\, \mathrm{D}_2\right]\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{10}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1/2}; \tag{5.1}$$

постоянная C_{10} зависит только от исходных параметров задачи.

Доказательство. Сразу отметим, что поскольку операторы $(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}$ и D_2, рассматриваемый на области определения $L_2\left((0,\,1)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,a)\right)$, самосопряжены, а композиция $\mathrm{D}_2(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}$ — ограничена (леммы 4.1, 4.2), то коммутатор $\left[(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1},\, \mathrm{D}_2\right]$ допускает замыкание.

Докажем его ограниченность. Для $u,\, v\in D(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))$ ввиду леммы 5.1 справедливы включения $\mathrm{D}_2 u,\, \mathrm{D}_2 v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, и

$$\begin{aligned}
&b_\lambda(k;\,\varepsilon)[\mathrm{D}_2 u,\, v] - b_\lambda(k;\,\varepsilon)[u,\, \mathrm{D}_2 v]\\
&\quad= \int_\Omega \Big(g_1(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)v} + \varepsilon^2 g_2(\mathbf{x})\mathrm{D}_2^2 u\cdot\overline{\mathrm{D}_2 v}\\
&\qquad\quad + \varepsilon(\mathrm{D}_1+k)\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{h_1(\mathbf{x})v} + \varepsilon h_1(\mathbf{x})\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)v}\\
&\qquad\quad + \varepsilon^2\mathrm{D}_2^2 u\cdot\overline{h_2(\mathbf{x})v} + \varepsilon^2 h_2(\mathbf{x})\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{\mathrm{D}_2 v}\\
&\qquad\qquad\qquad + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{v} + \varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{v}\Big)d\mathbf{x}\\
&\quad - \int_\Omega \Big(g_1(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)u\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon^2 g_2(\mathbf{x})\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{\mathrm{D}_2^2 v}\\
&\qquad\quad + \varepsilon(\mathrm{D}_1+k)u\cdot\overline{h_1(\mathbf{x})\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon h_1(\mathbf{x})u\overline{(\mathrm{D}_1+k)\mathrm{D}_2 v}\\
&\qquad\quad + \varepsilon^2\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{h_2(\mathbf{x})\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon^2 h_2(\mathbf{x})u\overline{\mathrm{D}_2^2 v}\\
&\qquad\qquad\qquad + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})u\overline{\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})u\overline{\mathrm{D}_2 v}\Big)d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= -\int_\Omega \Big(&(\mathrm{D}_2 g_1)(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)\,v} + \varepsilon^2 (\mathrm{D}_2 g_2)(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{\mathrm{D}_2 v} \\
&- \varepsilon (\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{(\mathrm{D}_2 h_1)(\mathbf{x})\,v} + \varepsilon (\mathrm{D}_2 h_1)(\mathbf{x})\,u\overline{(\mathrm{D}_1+k)\,v} \\
&- \varepsilon^2 \mathrm{D}_2 u\cdot\overline{(\mathrm{D}_2 h_2)(\mathbf{x})\,v} + \varepsilon^2 (\mathrm{D}_2 h_2)(\mathbf{x})\,u\overline{\mathrm{D}_2 v} \\
&\qquad + \varepsilon^2 (\mathrm{D}_2 Q)(\mathbf{x})\,u\overline{v} + \varepsilon^2\lambda (\mathrm{D}_2 Q_*)(\mathbf{x})\,u\overline{v}\Big) d\mathbf{x};
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

при интегрировании по частям были использованы периодичность коэффициентов по переменной x_2 и совпадение следов на гранях $\{x_2 = 0\}$ и $\{x_2 = a\}$ функций u и v, $\mathrm{D}_2 u$ и $\mathrm{D}_2 v$ (последнее — в силу леммы 5.1). Доказанное равенство справедливо для функций $u = (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi$ и $v = (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi$ с φ и ψ из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Левая его часть при этом примет вид

$$
\begin{aligned}
&\Big(\mathrm{D}_2 (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi,\,\psi\Big)_{L_2(\Omega)} - \Big(\varphi,\,\mathrm{D}_2 (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi\Big)_{L_2(\Omega)} \\
&\quad = -\left(\overline{\Big[(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1},\,\mathrm{D}_2\Big]}\varphi,\,\psi\right)_{L_2(\Omega)};
\end{aligned}
$$

правая же,

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \Big(&(\mathrm{D}_2 g_1)(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi} \\
&+ \varepsilon^2 (\mathrm{D}_2 g_2)(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi\cdot\overline{\mathrm{D}_2 (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi} \\
&- \varepsilon (\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathrm{D}_2 h_1)(\mathbf{x})(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi} \\
&+ \varepsilon (\mathrm{D}_2 h_1)(\mathbf{x})(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi} \\
&- \varepsilon^2 \mathrm{D}_2 (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathrm{D}_2 h_2)(\mathbf{x})(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi} \\
&+ \varepsilon^2 (\mathrm{D}_2 h_2)(\mathbf{x})(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi\cdot\overline{\mathrm{D}_2 (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi} \\
&+ \varepsilon^2 (\mathrm{D}_2 Q)(\mathbf{x})(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi} \\
&+ \varepsilon^2\lambda (\mathrm{D}_2 Q_*)(\mathbf{x})(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\psi}\Big) d\mathbf{x},
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

станет полуторалинейным непрерывным функционалом от φ и ψ. Действительно, первые два и последнее слагаемые непрерывны в силу липшицевости коэффициентов (условия 1 и 3) и оценок из лемм 4.1 и 4.2. Далее, условие 2 и следствие 1.2 (при $f = \partial_2 h_j$) обеспечивают подчиненность операторов умножения на $\partial_2 h_j$, $j \in \{1, 2\}$, оператору дифференцирования $\mathrm{D}_1 + k\mathcal{I}$:

$$\begin{gathered}\|(\partial_2 h_j)\, u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\partial_2 h_j\|^2_{2,\,\infty} \Big(\|(\mathrm{D}_1 + k)\, u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\,\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big), \\ u \in L_2\left((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1\,(0,\, 1)\right), \;\; k \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{5.4}$$

Вместе с неравенствами (4.1), (4.4) и (4.6) это доказывает ограниченность слагаемых, возникших из членов первого порядка. Наконец, непрерывность предпоследнего слагаемого получается из условия 2, формул (4.1), (4.4) и оценки

$$\begin{gathered}\big\||\partial_2 Q|^{1/2} u\big\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\partial_2 Q\|_{1,\,\infty} \Big(\|(\mathrm{D}_1 + k)\, u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\,\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big), \\ u \in L_2\left((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1\,(0,\, 1)\right), \;\; k \in \mathbb{R},\end{gathered} \tag{5.5}$$

основанной на следствии 1.2 (с $f = |\partial_2 Q|^{1/2}$). Таким образом,

$$\begin{aligned}&\overline{\Big[(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1},\, \mathrm{D}_2\Big]} \\ &\qquad = \Big((\mathrm{D}_1 + k)\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\Big)^* (\mathrm{D}_2 g_1)\,(\mathrm{D}_1 + k)\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1} \\ &\qquad + \varepsilon^2 \Big(\mathrm{D}_2\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\Big)^* (\mathrm{D}_2 g_2)\, \mathrm{D}_2\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1} \\ &\qquad - \varepsilon\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\,(\mathrm{D}_2 h_1)^*\,(\mathrm{D}_1 + k)\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1} \\ &\qquad + \varepsilon \Big((\mathrm{D}_1 + k)\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\Big)^* (\mathrm{D}_2 h_1)\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1} \\ &\qquad - \varepsilon^2\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\,(\mathrm{D}_2 h_2)^*\,\mathrm{D}_2\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1} \\ &\qquad + \varepsilon^2 \Big(\mathrm{D}_2\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\Big)^* (\mathrm{D}_2 h_2)\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1} \\ &\qquad + \varepsilon^2\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\,(\mathrm{D}_2 Q)\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1} \\ &\qquad + \varepsilon^2 \lambda\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\,(\mathrm{D}_2 Q_*)\,(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\end{aligned} \tag{5.6}$$

при $\langle k,\, \varepsilon\rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]$ есть ограниченный в $L_2\,(\Omega)$ оператор.

Полученное представление позволяет установить и неравенство (5.1): из (5.6) в композиции с $\mathcal{P}^{\perp}$ и оценок (5.4) и (5.5) вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\left\| \left[\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}, \mathrm{D}_2 \right] \mathcal{P}^{\perp} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\| \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \mathcal{P}^{\perp} \right\| \\
&\times \Bigg(\|\partial_2 g_1\|_\infty \left\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 + \|\partial_2 g_2\|_\infty \left\| \varepsilon \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \\
&+ 2\varepsilon \left(\left\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\| + 2^{1/2} \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\| \right) \\
&\times \left(\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty} \left\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\| + \|\partial_2 h_2\|_{2,\infty} \left\| \varepsilon \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\| \right) \\
&+ \varepsilon^2 \|\partial_2 Q\|_{1,\infty} \left(\left\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 + 2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \right) \\
&+ \varepsilon^2 \lambda \|\partial_2 Q_*\|_\infty \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \Bigg).
\end{aligned}$$

Тогда леммы 4.1, 4.2 и 4.3 приводят к требуемой оценке:

$$\begin{aligned}
&\left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2} \left\| \left[\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}, \mathrm{D}_2 \right] \mathcal{P}^{\perp} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \\
&\quad \leqslant 2 c_*^{-1/2} C_6 \left(\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|\partial_2 g_1\|_\infty + \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \|\partial_2 g_2\|_\infty \right) \\
&\quad + 4 c_*^{-1/2} C_6 \left(c_*^{-1/2} + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2} \right) \left(\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2} \|\partial_2 h_1\|_{2,\infty} + \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2} \|\partial_2 h_2\|_{2,\infty} \right) \\
&\quad + 2 c_*^{-1/2} C_6 \|\partial_2 Q\|_{1,\infty} \left(c_*^{-1} + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \right) + c_*^{-3/2} C_6 \lambda \|\partial_2 Q_*\|_\infty = C_{10}.
\end{aligned}$$

□

Несложно видеть, что утверждение леммы 5.2 справедливо и для эффективного оператора. В частности, имеет место представление вида (5.6) с эффективным оператором и усредненными коэффициентами. Данный факт используется для завершения доказательства леммы 4.6.

Окончание доказательства леммы 4.6. Чтобы завершить проверку леммы 4.6, необходимо установить неравенство (4.21) с оператором $\varepsilon^2 \mathrm{D}_2^2 \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}$. Запишем для этого сужение последнего на $C_0^\infty(\Omega)$ в виде

$$\varepsilon^2 \mathrm{D}_2^2 \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1} = -\varepsilon^2 \mathrm{D}_2 \left[\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}, \mathrm{D}_2 \right] + \varepsilon^2 \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1} \mathrm{D}_2.$$

Первое слагаемое может быть оценено благодаря представлению коммутатора $\left[\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\,\mathrm{D}_2\right]$ вида (5.6) и лемме 4.4:

$$\begin{aligned}
&\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left[\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\varepsilon)\right)^{-1},\varepsilon\mathrm{D}_2\right]\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant\varepsilon\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\left\|\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\\
&\quad\times\Bigg(\left\|\partial_2 g_1^0\right\|_\infty\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2+\left\|\partial_2 g_2^0\right\|_\infty\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\\
&\qquad+2\varepsilon\left\|\partial_2 h_1^0\right\|_\infty\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\left\|\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\\
&\qquad+2\varepsilon\left\|\partial_2 h_2^0\right\|_\infty\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\left\|\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\\
&\qquad+\varepsilon^2\left(\left\|\partial_2 Q^0\right\|_\infty+\lambda\left\|\partial_2 Q_*^0\right\|_\infty\right)\left\|\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\Bigg)\\
&\quad\leqslant 2^{3/2}c_*^{-1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\Big(\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\left\|\partial_2 g_1^0\right\|_\infty+\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\left\|\partial_2 g_2^0\right\|_\infty\Big)\\
&\quad\;+4c_*^{-1}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\Big(\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\left\|\partial_2 h_1^0\right\|_\infty+\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\left\|\partial_2 h_2^0\right\|_\infty\Big)\\
&\quad\;+2^{1/2}c_*^{-3/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\Big(\left\|\partial_2 Q^0\right\|_\infty+\lambda\left\|\partial_2 Q_*^0\right\|_\infty\Big)=\widetilde{C}_9;
\end{aligned}$$

второе — на основании леммы 4.4:

$$\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varepsilon\mathrm{D}_2\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_{\lambda}^{0}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\leqslant 2\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty=\widehat{C}_9.$$

Тогда (4.21) выполнено с постоянной $C_9=\frac{1}{2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{-1}\Big(\widetilde{C}_9+\widehat{C}_9\Big)$. Лемма доказана полностью. $\square$

5.2. Исследование коммутатора операторов $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ и D_2. Пусть Γ — контур в $\mathbb{C}$, который определен следующим образом:

$$\Gamma=\Big\{z\in\mathbb{C}\colon\ \operatorname{dist}\{z,\,[0,\,\delta]\}=\delta\Big\}.\tag{5.7}$$

При $z\in\Gamma$ введем обозначение $\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)=\left(\mathcal{A}_{\lambda}^{(1)}(k;\,\varepsilon)-z\mathcal{I}\right)$.

Для вычисления второго коммутатора будем пользоваться утверждением о дифференцировании по параметру x_2 решения уравнения

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{D}_1+k)\,g_1(x_1,\,x_2)\,(\mathrm{D}_1+k)\,u\\
&\quad+\varepsilon\overline{h_1(x_1,\,x_2)}\,(\mathrm{D}_1+k)\,u+\varepsilon\,(\mathrm{D}_1+k)\,h_1(x_1,\,x_2)\,u\\
&\quad+\varepsilon^2 Q(x_1,\,x_2)\,u+\varepsilon^2\lambda Q_*(x_1,\,x_2)\,u-zu=\varphi(x_1,\,x_2)
\end{aligned}$$

с периодическими граничными условиями при гладкой финитной правой части и $z\in\Gamma\setminus\mathbb{R}$.

Лемма 5.3. *Пусть* $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. *Тогда при* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *и* $z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}$ *функция* $u = \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\varphi$ *имеет обобщенную производную* $\mathrm{D}_2 u$, *причем* $\mathrm{D}_2 u \in L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right)$.

Доказательство леммы приведено в приложении А.

Стоит отметить, что при $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, согласно лемме 3.11 интервал $(\delta, 3\delta]$ не содержит точек спектра $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)$, а следовательно,

$$\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \delta^{-1}, \quad k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2,\ \varepsilon>0,\ z\in\Gamma. \tag{5.8}$$

Кроме того, для спектрального проектора $\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)$ верно представление в виде интеграла от резольвенты оператора $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)$ в точке z по контуру Γ:

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} dz. \tag{5.9}$$

Лемма 5.4. *При* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, *справедливо включение*

$$\overline{\left[\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon),\, \mathrm{D}_2\right]} \in \mathbf{B}\left(L_2(\Omega)\right),$$

притом выполнены оценки

$$\left\|\left[\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon),\, \mathrm{D}_2\right]\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{11}, \tag{5.10}$$

$$\left\|\left[\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon),\, \mathrm{D}_2\right]\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} C_{12}, \tag{5.11}$$

постоянные C_{11}, C_{12} *в которых зависят только от исходных данных задачи.*

Доказательство. Коммутатор $\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)$ и D_2 допускает замыкание. Благодаря представлению (5.9) для доказательства непрерывности оператора $\left[\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon),\mathrm{D}_2\right]$ достаточно установить равномерную ограниченность коммутатора резольвенты $\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}$ с дифференцированием D_2 при $z \in \Gamma\setminus\mathbb{R}$.

Пусть u, v — функции из области $L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right)$, равные нулю в окрестности множества $\{x_2=0\}\cup\{x_2=a\}$ и обладающие обобщенными производными $\mathrm{D}_2 u$, $\mathrm{D}_2 v$ класса $L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right)$. При данном выборе

u, v интегрирование по частям (по переменной x_2) обеспечивает справедливость равенства

$$
\begin{aligned}
&a_{\lambda}^{(1)}(k;\varepsilon)\left[\mathrm{D}_2u,\,v\right]-z\left(\mathrm{D}_2u,\,v\right)_{L_2(\Omega)}-a_{\lambda}^{(1)}(k;\varepsilon)\left[u,\,\mathrm{D}_2v\right]+z\left(u,\,\mathrm{D}_2v\right)_{L_2(\Omega)}\\
&\quad=\int\limits_{\Omega}\Big(g_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1+k\right)\mathrm{D}_2u\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1+k\right)v}\\
&\qquad\qquad+\varepsilon\left(\mathrm{D}_1+k\right)\mathrm{D}_2u\cdot\overline{h_1(\mathbf{x})\,v}+\varepsilon h_1(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2u\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1+k\right)v}\\
&\qquad\qquad+\varepsilon^2Q(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2u\cdot\overline{v}+\varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2u\cdot\overline{v}\Big)d\mathbf{x}\\
&\quad-\int\limits_{\Omega}\Big(g_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1+k\right)u\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1+k\right)\mathrm{D}_2v}\\
&\qquad\qquad+\varepsilon\left(\mathrm{D}_1+k\right)u\cdot\overline{h_1(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2v}+\varepsilon h_1(\mathbf{x})\,u\overline{\left(\mathrm{D}_1+k\right)\mathrm{D}_2v}\\
&\qquad\qquad+\varepsilon^2Q(\mathbf{x})\,u\overline{\mathrm{D}_2v}+\varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\,u\overline{\mathrm{D}_2v}\Big)d\mathbf{x}\\
&\quad-z\int\limits_{\Omega}\mathrm{D}_2u\cdot\overline{v}d\mathbf{x}+z\int\limits_{\Omega}u\overline{\mathrm{D}_2v}d\mathbf{x}\\
&\quad=-\int\limits_{\Omega}\Big(\left(\mathrm{D}_2g_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1+k\right)u\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1+k\right)v}-\varepsilon\left(\mathrm{D}_1+k\right)u\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_2h_1\right)(\mathbf{x})\,v}\\
&\qquad+\varepsilon\left(\mathrm{D}_2h_1\right)(\mathbf{x})\,u\overline{\left(\mathrm{D}_1+k\right)v}+\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2Q\right)(\mathbf{x})\,u\overline{v}+\varepsilon^2\lambda\left(\mathrm{D}_2Q_*\right)(\mathbf{x})\,u\overline{v}\Big)d\mathbf{x}.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

В качестве u и v возьмем функции $\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\varphi$ и $\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\psi$ с $\varphi,\,\psi\in C_0^{\infty}(\Omega)$: финитность по переменной x_2 очевидна, а существование по ней производных класса $L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)$ следует из леммы 5.3. Левая часть (5.12) при подстановке таких u, v окажется полуторалинейной формой замыкания коммутатора от элементов φ, ψ:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}_2\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\varphi,\,\psi\right)_{L_2(\Omega)}-\left(\varphi,\,\mathrm{D}_2\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\psi\right)_{L_2(\Omega)}\\
&\qquad=-\left(\overline{\left[\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1},\,\mathrm{D}_2\right]}\varphi,\,\psi\right)_{L_2(\Omega)};
\end{aligned}
$$

а правая вследствие предположений о гладкости коэффициентов (условия 1, 2, 3) и оценок (5.4), (5.5) и (5.8) и леммы 4.2 станет непрерывным полуторалинейным функционалом от φ, ψ и примет вид

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Big(& (\mathrm{D}_2 g_1)(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\psi} \\ & -\varepsilon(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathrm{D}_2 h_1)(\mathbf{x})\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\psi} \\ & +\varepsilon(\mathrm{D}_2 h_1)(\mathbf{x})\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\psi} \\ & +\varepsilon^2(\mathrm{D}_2 Q)(\mathbf{x})\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\psi} \\ & +\varepsilon^2\lambda(\mathrm{D}_2 Q_*)(\mathbf{x})\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\psi}\Big)d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Поэтому для замыкания коммутатора верно представление

$$\begin{aligned} & \overline{\left[\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1},\mathrm{D}_2\right]} \\ & \quad =\left((\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right)^*(\mathrm{D}_2 g_1)(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} \\ & \quad\quad -\varepsilon\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\overline{z}}(k;\varepsilon)\right)^{-1}(\mathrm{D}_2 h_1)^*(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} \\ & \quad\quad +\varepsilon\left((\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right)^*(\mathrm{D}_2 h_1)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} \\ & \quad\quad +\varepsilon^2\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\overline{z}}(k;\varepsilon)\right)^{-1}(\mathrm{D}_2 Q)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} \\ & \quad\quad +\varepsilon^2\lambda\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\overline{z}}(k;\varepsilon)\right)^{-1}(\mathrm{D}_2 Q_*)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Это представление, условия 1, 2, 3, оценки (5.4), (5.5) и (5.8), а также лемма 4.2 приводят к неравенству

$$\begin{aligned} & \left\|\left[\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1},\mathrm{D}_2\right]\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \\ & \leqslant \|\partial_2 g_1\|_\infty\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 \\ & +2\varepsilon\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 \\ & +2^{3/2}\varepsilon\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\| \\ & \times\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\| \end{aligned}$$

$$+\varepsilon^2 \|\partial_2 Q\|_{1,\infty} \left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2$$
$$+2\varepsilon^2 \|\partial_2 Q\|_{1,\infty} \left\|\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 + \varepsilon^2\lambda \|\partial_2 Q_*\|_\infty \left\|\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2$$
$$\leqslant 2\left(c_1(\delta)\right)^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|\partial_2 g_1\|_\infty$$
$$+4c_1(\delta)\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2} \|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left(c_1(\delta)\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}+\delta^{-1}\right)$$
$$+2\|\partial_2 Q\|_{1,\infty}\left(\left(c_1(\delta)\right)^2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty+\delta^{-2}\right)+\delta^{-2}\lambda\|\partial_2 Q_*\|_\infty=\widetilde{C}_{11}, \quad z\in\Gamma\setminus\mathbb{R},$$

где было введено обозначение

$$c_1(\delta)=\max\left\{\frac{s^{1/2}}{|s-z|} : s\in[0,\,\delta]\cup[3\delta,\,\infty],\, z\in\Gamma\right\}.$$

А тогда из формулы (5.9) для спектрального проектора вытекает следующий результат:

$$\|[\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon),\,\mathrm{D}_2]\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \tfrac{2\delta+2\pi\delta}{2\pi}\widetilde{C}_{11}=C_{11}.$$

Перейдем к доказательству второй оценки. Из соотношения (5.13) и неравенств (5.4) и (5.5) получаем

$$\left\|\left[\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1},\,\mathrm{D}_2\right]\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}$$
$$\leqslant \|\partial_2 g_1\|_\infty \left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|$$
$$\times\left\|\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\| \left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\right\|$$
$$+2\varepsilon\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2$$
$$+2^{3/2}\varepsilon\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|$$
$$\times\left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\| \left\|\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|$$
$$+\varepsilon^2 \|\partial_2 Q\|_{1,\infty} \left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2$$
$$+2\varepsilon^2 \|\partial_2 Q\|_{1,\infty} \left\|\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 + \varepsilon^2\lambda \|\partial_2 Q_*\|_\infty \left\|\left(\mathcal{A}_{\lambda,z}^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2,$$
$$z\in\Gamma\setminus\mathbb{R}.$$

Продолжим эту оценку, используя леммы 4.2 и 4.3 и неравенство (5.8):

$$
\begin{aligned}
&\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1/2}\left\|\left[\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\,\mathrm{D}_2\right]\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\\
&\leqslant 2c_1(\delta)\,\delta^{-1}C_7\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\|\partial_2 g_1\|_\infty\\
&\quad+4c_1(\delta)\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\|\partial_2 h_1\|_{2,\,\infty}\left(c_1(\delta)\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}+\delta^{-1}\right)\\
&\quad+2\,\|\partial_2 Q\|_{1,\,\infty}\left((c_1(\delta))^2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty+\delta^{-2}\right)+\delta^{-2}\lambda\,\|\partial_2 Q_*\|_\infty=\widetilde{C}_{12},\\
&\hspace{20em} z\in\Gamma\setminus\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Тем самым формула (5.11) доказана с константой $C_{12}=\frac{2\delta+2\pi\delta}{2\pi}\widetilde{C}_{12}$. □

5.3. $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$**-инвариантность** $\widetilde{H}^1(\Omega)$**.** В заключение данного параграфа приведем утверждение об инвариантности пространства $\widetilde{H}^1(\Omega)$ относительно действия проектора $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$.

Лемма 5.5. *При* $\langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ *имеет место включение*

$$
\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\widetilde{H}^1(\Omega)\subset\widetilde{H}^1(\Omega)\,.
$$

Доказательство. Пусть $u\in\widetilde{H}^1(\Omega)$. Тогда $u\in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)=D\left[a^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right]$, а следовательно, $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u\in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)$, т.е. $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$ имеет обобщенную производную $\mathrm{D}_1\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$ из класса $L_2(\Omega)$, и следы $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$ на гранях $\{x_1=0\}$ и $\{x_1=1\}$ совпадают. Поскольку

$$
\mathrm{D}_2\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u\right)=\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathrm{D}_2u+\left[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right]u,
$$

то существует и обобщенная производная $\mathrm{D}_2\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$, принадлежащая на основании оценки (5.10) пространству $L_2(\Omega)$. Наконец, периодические граничные условия по переменной x_2 для $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$ вытекают из периодичности функции u и коэффициентов оператора $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ по второму аргументу (условия 1, 2, 3) и разложения в прямой интеграл (3.32) спектрального проектора $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$. □

§6. Старший член аппроксимации оператора $\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}$

Здесь приведено доказательство первой оценки теоремы 2.2. Последовательной редукцией эта оценка преобразуется к соотношению, включающему только исходный оператор и его спектральный росток — при условии $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon>0$, после чего проверка требуемого неравенства может быть основана на абстрактном утверждении, модификации [Su1, лемма 7.1].

6.1. Сведение к спектральному ростку.

Теорема 6.1. *Пусть из предположений теоремы 2.2 при* $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, *вытекает неравенство*

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} - (\mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} \mathcal{P} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \widehat{C} \varepsilon^{-1}$$

с постоянной $\widehat{C}$, *зависящей от исходных данных задачи* (1.18). *Тогда при всех* $\langle k,\, \varepsilon \rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]$ *выполнена оценка*

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C \varepsilon^{-1},$$

константа C *в которой определена по данным задачи.*

Доказательство. Для оператора $\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)$ определим по описанному выше принципу росток $\mathcal{S}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)$. Из правил вычисления эффективных коэффициентов видно, что $\left(g_j^0\right)^0 = g_j^0$, $\left(h_j^0\right)^0 = h_j^0\, (j \in \{1,\, 2\})$, $\left(Q^0\right)^0 = Q^0$, $\left(Q_*^0\right)^0 = Q_*^0$, а потому $\mathcal{S}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon) = \mathcal{S}_\lambda (k;\, \varepsilon)$ и $\mathcal{L}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon) = \mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon)$. При этом ввиду оценок (1.23) параметр d_0 (см. (3.22)), а вместе с ним и δ (см. (3.23)), подходит как для исходного оператора, так и для усредненного. Кроме того, число τ_0^0, введенное для $\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)$ по аналогии с (3.24), оказывается, как и τ_0, меньше единицы. Поэтому из условия настоящей теоремы, примененной к операторам $\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon)$ и $\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)$, вытекают справедливые при $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \widehat{\tau}^2 = \min\left\{\tau_0^2,\, \left(\tau_0^0\right)^2\right\}$, $\varepsilon > 0$, неравенства

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} - (\mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} \mathcal{P} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \widehat{C} \varepsilon^{-1},$$
$$\left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} - (\mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} \mathcal{P} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \widehat{C}^0 \varepsilon^{-1},$$

в которых постоянные $\widehat{C}$, $\widehat{C}^0$ зависят только от исходных данных задачи. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} \left\| (\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left(\widehat{C} + \widehat{C}^0\right) \varepsilon^{-1}, \\ k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \widehat{\tau}^2, \ \ \varepsilon > 0. \end{gathered} \tag{6.1}$$

С другой стороны, если $k^2 + \varepsilon^2 > \widehat{\tau}^2$, $\langle k,\, \varepsilon \rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]$, то леммы 4.1 и 4.4 влекут оценку

$$\begin{gathered} \left\| (\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} < 2 c_*^{-1} \widehat{\tau}^{-1} \varepsilon^{-1}, \\ k^2 + \varepsilon^2 > \widehat{\tau}^2, \ \ \langle k,\, \varepsilon \rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]\,. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Таким образом, требуемое неравенство вытекает из (6.1) и (6.2) с константой $C = \max\{\widehat{C} + \widehat{C}^0,\, 2c_*^{-1}\widehat{\tau}^{-1}\}$, зависящей, как видно из определений входящих в нее величин, лишь от исходных параметров задачи. $\square$

Введем в пространстве $L_2(\Omega)$ ограниченный оператор $\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$:

$$\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon) = (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\mathcal{P} - \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}. \tag{6.3}$$

Леммы 4.1, 4.3 и 4.5 тогда приводят к соотношению

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1} - (\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1/2}(C_6 + C_8)\,\varepsilon^{-1} + \|\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))},$$

которое означает, что для удовлетворения условию теоремы 6.1 необходимо соответствующим образом оценить $\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$.

Теорема 6.2. *Пусть $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, а оператор $\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$ определен в* (6.3). *Тогда*

$$\|\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{14}\varepsilon^{-1};$$

константа C_{14} зависит только от исходных данных задачи (1.18).

6.2. Доказательство теоремы 6.2.

Абстрактное утверждение. Обсудим специальный вопрос, касающийся возможности факторизации оператора $\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$ при условии $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. Существенную роль в его решении играет следующее утверждение абстрактного характера.

Лемма 6.3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ — ортогональные проекторы в этом пространстве. Пусть $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$ — две замкнутые положительно определенные полуторалинейные формы, заданные на плотных множествах в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ соответственно. Через $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ обозначим самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$, отвечающие формам $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$. Предположим, что выполнены следующие условия*:

1°) $D[\mathfrak{t}_2] \subset D[\mathfrak{t}_1]$;
2°) $\mathfrak{P}D[\mathfrak{t}_1] \subset D[\mathfrak{t}_2]$;
3°) $\mathfrak{Q}D[\mathfrak{t}_1] \subset D[\mathfrak{t}_1]$;
4°) *при всех $u \in D(\mathfrak{T}_2)$ и $v \in D(\mathfrak{T}_1)$ верно представление*

$$\mathfrak{t}_2[u, \mathfrak{P}v] - \mathfrak{t}_1[\mathfrak{Q}u, v] = (\mathfrak{G}_0 u, \mathfrak{G}v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}, \tag{6.4}$$

в котором $\mathfrak{G}\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{G}_0\colon \mathfrak{P}\mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенные линейные операторы, действующие из $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ в некоторое сепарабельное комплексное гильбертово пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$, причем

$D(\mathfrak{T}_1) \subseteq D(\mathfrak{G})$, $D(\mathfrak{T}_2) \subset D(\mathfrak{G}_0)$ *и* $\mathfrak{G}\mathfrak{T}_1^{-1} \in \mathbf{B}(\mathfrak{H}, \widetilde{\mathfrak{H}})$, $\mathfrak{G}_0\mathfrak{T}_2^{-1} \in \mathbf{B}(\mathfrak{P}\mathfrak{H}, \widetilde{\mathfrak{H}})$.

Тогда справедливо тождество

$$\mathfrak{T}_1^{-1}\big|_{\mathfrak{P}\mathfrak{H}} - \mathfrak{Q}\mathfrak{T}_2^{-1} = \left(\mathfrak{G}\mathfrak{T}_1^{-1}\right)^* \left(\mathfrak{G}_0\mathfrak{T}_2^{-1}\right). \tag{6.5}$$

Доказательство. Рассмотрим элементы $u = \mathfrak{T}_2^{-1}\varphi$, $v = \mathfrak{T}_1^{-1}\psi$ с произвольными $\varphi \in \mathfrak{P}\mathfrak{H}$, $\psi \in \mathfrak{H}$. Тогда равенство (6.4) с такими u, v сразу приводит к (6.5). □

Применение леммы 6.3. Пусть $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. Воспользуемся леммой 6.3 при $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{P} = \mathcal{P}$, $\mathfrak{Q} = \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)$ и

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}_1 &= b_\lambda(k;\varepsilon), & D[\mathfrak{t}_1] &= D[b_\lambda(k;\varepsilon)] = \widetilde{H}^1(\Omega),\\
\mathfrak{T}_1 &= \mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon), & D(\mathfrak{T}_1) &= D(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)) \subset \widetilde{H}^1(\Omega),\\
\mathfrak{t}_2 &= l_\lambda(k;\varepsilon), & D[\mathfrak{t}_2] &= D[l_\lambda(k;\varepsilon)] \simeq \widetilde{H}^1(0,a),\\
\mathfrak{T}_2 &= \mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon), & D(\mathfrak{T}_2) &= D(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)) \simeq \widetilde{H}^2(0,a).
\end{aligned}$$

Для этого достаточно проверить условие 4°: условия 1°, 2°, очевидно, выполнены, а 3° прямо следует из леммы 5.5.

Обозначим через $\mathfrak{I}[u,v]$ левую часть (6.4) при $u \in \widetilde{H}^2(0,a)$, $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Тогда

$$\mathfrak{I}[u,v] = l_\lambda(k;\varepsilon)[u,\mathcal{P}v] - b_\lambda(k;\varepsilon)[\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u, v] = \mathfrak{I}_1[u,v] + \mathfrak{I}_2'[u,v], \tag{6.6}$$

где формы $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2'$, в согласии с (2.8), (3.1) и (3.45), имеют вид

$$\mathfrak{I}_1[u,v] = \left(k^2+\varepsilon^2\right)\left(\mathcal{S}_\lambda(k;\varepsilon)u, \mathcal{P}v\right)_{L_2(0,a)} - \left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u, v\right)_{L_2(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_2'[u,v] = {}&\varepsilon^2\left(g_2^0\mathrm{D}_2u, \mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,a)} - \varepsilon^2\left(g_2\mathrm{D}_2\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u, \mathrm{D}_2v\right)_{L_2(\Omega)}\\
&+\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2u, h_2^0\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,a)} - \varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u, h_2v\right)_{L_2(\Omega)}\\
&+\varepsilon^2\left(h_2^0u, \mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,a)} - \varepsilon^2\left(h_2\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u, \mathrm{D}_2v\right)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Используя равенства

$$\begin{gathered}
\left(h_2^0u, \mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,a)} = \left(\mathrm{D}_2h_2^0u, \mathcal{P}v\right)_{L_2(0,a)},\\
\left(h_2\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u, \mathrm{D}_2v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(\mathrm{D}_2h_2\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u, v\right)_{L_2(\Omega)},
\end{gathered}$$

представим форму $\mathfrak{I}_2'$ в виде суммы пяти слагаемых:

$$\mathfrak{I}_2' = \sum_{j=2}^{6}\mathfrak{I}_j. \tag{6.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I}_2[u, v] = -\varepsilon^2 \left(g_2 \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon) - \mathcal{P}\right) u, \mathrm{D}_2 v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\mathfrak{I}_3[u, v] = \varepsilon^2 \left(g_2^0 \mathrm{D}_2 u, \mathrm{D}_2 \mathcal{P} v\right)_{L_2(0,a)} - \varepsilon^2 \left(g_2 \mathrm{D}_2 u, \mathrm{D}_2 v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\mathfrak{I}_4[u, v] = \varepsilon^2 \left(\mathrm{D}_2 u, \left(h_2^0 + \left(h_2^0\right)^*\right) \mathcal{P} v\right)_{L_2(0,a)} + \varepsilon^2 \left(\mathrm{D}_2 u, \left(h_2 + h_2^*\right) \mathcal{P}^\perp v\right)_{L_2(\Omega)}\\
&\qquad - \varepsilon^2 \left(\mathrm{D}_2 \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon) u, \left(h_2 + h_2^*\right) v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\mathfrak{I}_5[u, v] = \varepsilon^2 \left(\left(\mathrm{D}_2 h_2^0\right) u, \mathcal{P} v\right)_{L_2(0,a)} + \varepsilon^2 \left(\left(\mathrm{D}_2 h_2\right) u, \mathcal{P}^\perp v\right)_{L_2(\Omega)}\\
&\qquad - \varepsilon^2 \left(\left(\mathrm{D}_2 h_2\right) \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon) u, v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\mathfrak{I}_6[u, v] = -\varepsilon^2 \left(\left(h_2^* \mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2 h_2\right) u, \mathcal{P}^\perp v\right)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Форма $\mathfrak{I}_1$. Согласно (3.43) верно равенство

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1[u, v] = -\left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{3/2} \left(u, \Psi_\lambda(k;\varepsilon) v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(G_{01} u, G_1 v\right)_{L_2(\Omega)},&\\
u \in \widetilde{H}^2(0, a),\ v \in \widetilde{H}^1(\Omega),&
\end{aligned} \tag{6.8}$$

в котором были введены непрерывные операторы

$$G_{01} = -\left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{3/4} \mathcal{I}_{L_2(0,a)}, \quad G_1 = \left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{3/4} \Psi_\lambda(k;\varepsilon).$$

Из теоремы 3.12 и лемм 4.1, 4.5 вытекают следующие оценки:

$$\left\| G_{01} \left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1} \mathcal{P} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1} \left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{-1/4} = \check{C}_{01} \left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{-1/4}, \tag{6.9}$$

$$\left\| G_1 \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1/2} C_2 \left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{1/4} = \check{C}_1 \left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{1/4}. \tag{6.10}$$

Форма $\mathfrak{I}_2$. Определим операторы $G_{02} = -\varepsilon^{1/2} \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon) - \mathcal{P}\right)$ и $G_2 = \varepsilon^{3/2} g_2 \mathrm{D}_2$ на областях $D(G_{02}) \simeq H^1(0, a)$ и $D(G_2) = L_2\left((0, 1); H^1(0, a)\right)$ и перепишем с их помощью форму $\mathfrak{I}_2$:

$$\mathfrak{I}_2[u, v] = \left(G_{02} u, G_2 v\right)_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \widetilde{H}^2(0, a),\ v \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{6.11}$$

Принимая во внимание (3.40), представим оператор G_{02} суммой трех слагаемых:

$$\begin{aligned}
G_{02} = -\varepsilon^{1/2} \left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2} \Phi_\lambda(k;\varepsilon) \mathrm{D}_2 - \varepsilon^{1/2} \left[\mathrm{D}_2, \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\right] \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)&\\
- \varepsilon^{1/2} \left[\mathrm{D}_2, \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\right] \left(\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^\perp.&
\end{aligned}$$

Тогда из теоремы 3.12 и лемм 4.5 и 5.4 следует

$$\begin{aligned}&\left\|G_{02}\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\\&\quad\leqslant c_*^{-1/2}\left(2^{1/2}C_1\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}+c_*^{-1/2}C_{12}+C_8C_{11}\right)\varepsilon^{-1/2}=\check{C}_{02}\varepsilon^{-1/2}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Оценка

$$\left\|G_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant 2^{1/2}\left\|g_2\right\|_\infty\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\varepsilon^{1/2}=\check{C}_2\varepsilon^{1/2}\tag{6.13}$$

получается из леммы 4.2.

Форма $\mathfrak{I}_3$. Заметим, что по определению (1.22) коэффициента g_2^0 оператор умножения в пространстве $\mathfrak{N}$ на функцию g_2^0 имеет вид $g_2^0=\mathcal{P}g_2|_{\mathfrak{N}}$. Это обстоятельство позволяет упростить выражение, задающее форму $\mathfrak{I}_3$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_3[u,\,v]&=\varepsilon^2\left(g_2^0\mathrm{D}_2u,\,\mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)}-\varepsilon^2\left(g_2\mathrm{D}_2u,\,\mathrm{D}_2\left(\mathcal{P}+\mathcal{P}^\perp\right)v\right)_{L_2(\Omega)}\\&=-\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2g_2\mathrm{D}_2u,\,\mathcal{P}^\perp v\right)_{L_2(\Omega)}=\left(G_{03}u,\,G_3v\right)_{L_2(\Omega)},\\&\qquad\qquad u\in\widetilde{H}^2(0,\,a),\;v\in\widetilde{H}^1(\Omega),\end{aligned}\tag{6.14}$$

где $G_{03}=-\varepsilon^{3/2}\mathrm{D}_2g_2\mathrm{D}_2$, $D(G_{03})\simeq H^2(0,\,a)$, а $G_3=\varepsilon^{1/2}\mathcal{P}^\perp$. Напомним, что область определения оператора $\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ есть $\widetilde{H}^2(0,\,a)$, поэтому композиция отображений D_2^2 и $\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}$ вполне корректна; и, кроме того, в силу тождества (3.47) она совпадает с $\mathrm{D}_2^2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}$, что позволяет оценить ее на основании леммы 4.6. Приведем соотношения

$$\begin{aligned}&\left\|G_{03}\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\\&\quad\leqslant 2^{1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\left(c_*^{-1/2}\left\|\partial_2g_2\right\|_\infty+2^{1/2}C_9\left\|g_2\right\|_\infty\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\right)\varepsilon^{-1/2}\\&\quad=\check{C}_{03}\varepsilon^{-1/2},\end{aligned}\tag{6.15}$$

$$\left\|G_3\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_6\varepsilon^{1/2}=\check{C}_3\varepsilon^{1/2},\tag{6.16}$$

которые можно извлечь из лемм 4.3, 4.5 и 4.6 с учетом сделанного замечания.

Форма $\mathfrak{I}_4$. Представив оператор умножения в $\mathfrak{N}$ на функцию h_2^0 как композицию

$$h_2^0=\mathcal{P}h_2|_{\mathfrak{N}},\tag{6.17}$$

запишем форму $\mathfrak{I}_4$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_4[u,v] = -\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)-\mathcal{P}\right)u,\,(h_2+h_2^*)\,v\right)_{L_2(\Omega)},\\ u\in\widetilde{H}^2(0,a),\, v\in\widetilde{H}^1(\Omega).\end{aligned}\tag{6.18}$$

Положим

$$\begin{aligned} G_{04} &= -\varepsilon^{1/2}\mathrm{D}_2\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)-\mathcal{P}\right), && D(G_{04})\simeq H^1(0,a),\\ G_4 &= \varepsilon^{3/2}(h_2+h_2^*), && D(G_4)=L_2\big((0,a);H^1(0,1)\big)\end{aligned}$$

(отметим, что при таком определении $G_{04}=G_{02}$), тогда

$$\mathfrak{I}_4[u,v] = (G_{04}u,\,G_4v)_{L_2(\Omega)},\quad u\in\widetilde{H}^2(0,a),\, v\in\widetilde{H}^1(\Omega).\tag{6.19}$$

Используя неравенство (6.12), следствие 1.2 (для $f=h_2+h_2^*$) и леммы 4.1, 4.2, получаем

$$\left\|G_{04}\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant \check{C}_{02}\varepsilon^{-1/2}=\check{C}_{04}\varepsilon^{-1/2},\tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}\left\|G_4\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} &\leqslant 2^{3/2}\|h_2\|_{2,\infty}\left(c_*^{-1/2}+\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\right)\varepsilon^{1/2}\\ &= \check{C}_4\varepsilon^{1/2}.\end{aligned}\tag{6.21}$$

Форма $\mathfrak{I}_5$. В соответствии с (3.40) и (6.17)

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_5[u,v] = -\varepsilon^2\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\left((\mathrm{D}_2h_2)\,\Phi_\lambda(k;\varepsilon)\,u,\,v\right)_{L_2(\Omega)} = (G_{05}u,\,G_5v)_{L_2(\Omega)},\\ u\in\widetilde{H}^2(0,a),\, v\in\widetilde{H}^1(\Omega).\end{aligned}\tag{6.22}$$

Здесь операторы G_{05}, G_5 имеют вид

$$\begin{aligned} G_{05} &= -\varepsilon^{1/2}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda(k;\varepsilon),\\ G_5 &= \varepsilon^{3/2}(\mathrm{D}_2h_2)^*,\quad D(G_5)=L_2\big((0,a);H^1(0,1)\big).\end{aligned}$$

Оценки композиций

$$\left\|G_{05}\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant c_*^{-1}C_1\varepsilon^{-1/2}=\check{C}_{05}\varepsilon^{-1/2},\tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}\left\|G_5\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} &\leqslant 2^{1/2}\|\partial_2h_2\|_{2,\infty}\left(c_*^{-1/2}+\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\right)\varepsilon^{1/2}\\ &= \check{C}_5\varepsilon^{1/2}\end{aligned}\tag{6.24}$$

вытекают из следствия 1.2 (при $f=\partial_2h_2$), теоремы 3.12 и лемм 4.1, 4.2 и 4.5.

Форма $\mathfrak{I}_6$. Зададим операторы G_{06}, G_6 формулами

$$G_{06} = -\varepsilon^{3/2}\left(h_2^*\mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2 h_2\right),$$
$$G_6 = \varepsilon^{1/2}\mathcal{P}^{\perp}$$

на областях $D(G_{06}) \simeq H^1(0, a)$ и $D(G_6) = L_2(\Omega)$. Ясно, что

$$\mathfrak{I}_6[u, v] = (G_{06}u, G_6 v)_{L_2(\Omega)}, \quad u \in \widetilde{H}^2(0, a), v \in \widetilde{H}^1(\Omega), \tag{6.25}$$

притом

$$\begin{aligned}\left\|G_{06}\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} &\\ \leqslant c_*^{-1/2}\left(c_*^{-1/2}\|\partial_2 h_2\|_{2,\infty} + 2^{3/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\|h_2\|_{2,\infty}\right)\varepsilon^{-1/2} &\\ = \check{C}_{06}\varepsilon^{-1/2},&\end{aligned}\tag{6.26}$$

$$\left\|G_6\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \check{C}_3\varepsilon^{1/2} = \check{C}_6\varepsilon^{1/2} \tag{6.27}$$

(см. следствие 1.2 (для $f = h_2 + h_2^*$ и $f = \partial_2 h_2$), лемму 4.5 и неравенство (6.16)).

Итог. Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}} = L_2\left(\Omega; \mathbb{C}^6\right) \simeq \oplus_{j=1}^6 L_2(\Omega)$. Положим

$$\mathbf{G}_0\colon L_2(0, a) \to L_2\left(\Omega; \mathbb{C}^6\right), \qquad \mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} G_{01}\\ \vdots \\ G_{06}\end{pmatrix}, \qquad D(\mathbf{G}_0) \simeq H^2(0, a);$$

$$\mathbf{G}\colon L_2(\Omega) \to L_2\left(\Omega; \mathbb{C}^6\right), \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_1\\ \vdots \\ G_6\end{pmatrix}, \qquad D(\mathbf{G}) = H^1(\Omega).$$

Видно, что операторы $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{G}$ плотно определены в соответствующих пространствах и $D(\mathfrak{T}_1) \subset D[t_1] \subset D(\mathbf{G})$, $D(\mathfrak{T}_2) \subset D(\mathbf{G}_0)$. Тождества (6.6) и (6.7) и представления (6.8), (6.11), (6.14), (6.19), (6.22), (6.25) означают, что форму $\mathfrak{I}$ можно записать в виде

$$\mathfrak{I}[u, v] = \sum_{j=1}^{6}(G_{0j}u, G_j v)_{L_2(\Omega)} = (\mathbf{G}_0 u, \mathbf{G}v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^6)},$$
$$u \in \widetilde{H}^2(0, a), v \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Далее, из неравенств (6.9), (6.12), (6.15), (6.20), (6.23), (6.26) следует ограниченность оператора $\mathbf{G}_0\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}$ с оценкой нормы

$$\left\|\mathbf{G}_0\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega), L_2(\Omega;\mathbb{C}^6))} \leqslant C_{15}\varepsilon^{-1/2}, \tag{6.28}$$

где $C_{15} = \sum\limits_{j=1}^{6} \check{C}_{0j}$. Непрерывность композиции $\mathbf{G}\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1}$ следует из формул (4.1), (6.10), (6.13), (6.16), (6.21), (6.24), (6.27), причем

$$\left\| \mathbf{G}\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega),\, L_2(\Omega;\mathbb{C}^6))} \leqslant C_{16}\varepsilon^{-1/2} \tag{6.29}$$

с постоянной $C_{16} = c_*^{-1/2} \sum\limits_{j=1}^{6} \check{C}_j$. Таким образом, условие 4° леммы 6.3 проверено.

Применим теперь утверждение леммы 6.3. Ввиду (6.5) справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) &= \left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P} - \mathcal{F}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) \left(\mathcal{L}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P} \\ &= \left(\mathbf{G}\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1}\right)^* \left(\mathbf{G}_0\left(\mathcal{L}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}\right). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Сопоставляя его и (6.28), (6.29), приходим к оценке

$$\left\| \mathcal{J}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{15}C_{16}\varepsilon^{-1} = C_{14}\varepsilon^{-1}, \quad k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2,\ \ \varepsilon > 0,$$

с заданными только по исходным данным задачи константами C_{15}, C_{16}, которая и завершает доказательство теоремы 6.2.

§7. Аппроксимация оператора $\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1}$ с учетом корректора

Назначением этого параграфа является доказательство второй части утверждения теоремы 2.2. Наибольшую сложность при этом представляет ее проверка при $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, — тема п. 7.1, а для $k^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$, $\langle k,\, \varepsilon\rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]$, оценка — предмет п. 7.2 — получается сравнительно просто.

7.1. Аппроксимация с корректором оператора $\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1}$ при $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$. Ближайшая цель состоит в получении оценки оператора $\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}^0_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P} - \mathcal{K}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) \mathcal{P}$ в равномерной операторной топологии пространства $\mathbf{B}\left(L_2\left(\Omega\right),\, H^1\left(\Omega\right)\right)$. Будем исходить из тождества

$$\begin{aligned} &\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{1/2} \left(\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}^0_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P} - \mathcal{K}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) \mathcal{P}\right) \\ &\quad = \left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1/2} \mathcal{P}^\perp + \left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{1/2} \mathcal{J}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) \\ &\quad + \left(k^2 + \varepsilon^2\right) \left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{1/2} \Upsilon_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) \left(\mathcal{L}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

при выводе которого были использованы формулы (2.14), (3.44), (3.47) и (6.3).

Лемма 7.1. *Пусть $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. Тогда выполнена оценка*

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{1/2} \mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{17}; \tag{7.2}$$

постоянная C_{17} зависит лишь от исходных данных задачи.

Доказательство. Согласно (6.30), для оператора $(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{1/2} \mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$ справедлива факторизация

$$(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{1/2} \mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon) = \left(\mathbf{G}(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2} \right)^* \left(\mathbf{G}_0 (\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1} \mathcal{P} \right),$$

поэтому, применяя неравенства (6.9)–(6.10), (6.12)–(6.13), (6.15)–(6.16), (6.20)–(6.21), (6.23)–(6.24) и (6.26)–(6.27), приходим к оценке

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{1/2} \mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \sum_{j=1}^{6} \check{C}_{0j} \check{C}_j = C_{17}.$$

□

Лемма 7.2. *При $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, имеет место неравенство*

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{1/2} \Upsilon_\lambda(k;\varepsilon) (\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1} \mathcal{P} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{18} \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1}, \tag{7.3}$$

где C_{18} — константа, выражающаяся только через данные задачи.

Замечание. Лемма 5.5 об инвариантности пространства $\widetilde{H}^1(\Omega)$ относительно $\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)$ и свойства функций Λ и M придают, благодаря представлению (3.44), композиции операторов в (7.3) смысл.

Доказательство. При $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} a^{(2)}[v,v] \leqslant \|h_2\|_{2,\infty}^2 \|(\mathrm{D}_1+k)v\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ + (1+\|g_2\|_\infty) \|\mathrm{D}_2 v\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2\|h_2\|_{2,\infty}^2 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{7.4}$$

(см. следствие 1.2 для $f = h_2$). Рассмотрим в качестве v элемент $\left(k^2+\varepsilon^2\right) \Upsilon_\lambda(k;\varepsilon) (\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1} \mathcal{P}u$ с $u \in L_2(\Omega)$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Соотношения (3.40), (3.44) гарантируют выполнение тождеств

$$\begin{aligned} \left(k^2+\varepsilon^2\right)(\mathrm{D}_1+k)\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P} = (\mathrm{D}_1+k)\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P} \\ - (k(\mathrm{D}_1\Lambda)+\varepsilon(\mathrm{D}_1\mathrm{M}))\mathcal{P} - k\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon) - \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\right)\mathcal{P} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathrm{D}_2\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P} = [\mathrm{D}_2, \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)]\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon) \\ - \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}[\mathrm{D}_2, \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)]\Phi_\lambda(k;\varepsilon) \\ - (k(\mathrm{D}_2\Lambda)+\varepsilon(\mathrm{D}_2\mathrm{M}))\mathcal{P} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\mathrm{D}_2\mathcal{P}, \end{aligned}$$

которые, в свою очередь, влекут неравенства

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{D}_1+k)\,v\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant \left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\,\mathcal{P}\right\| \\ &\times\left(\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right\|\right. \\ &\left.+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Big(1+\|\partial_1\Lambda\|_\infty+\|\partial_1\mathrm{M}\|_{2,\,\infty}+\|\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\|\Big)\right),\end{aligned}\tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}\|\mathrm{D}_2v\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant \left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\,\mathcal{P}\right\| \\ &\times\Big(\|[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)]\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\|+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\|[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)]\|\,\|\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon)\| \\ &+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\left(\|\partial_2\Lambda\|_\infty+\|\partial_2\mathrm{M}\|_\infty\right)\Big) \\ &+\left(k^2+\varepsilon^2\right)\|\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\|\left\|\mathrm{D}_2\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\mathcal{P}\right\|\left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\,\mathcal{P}\right\|.\end{aligned}\tag{7.6}$$

Из (7.5), теоремы 3.13 и лемм 4.2, 4.3, 4.5 тогда получаем оценку

$$\begin{aligned}&\varepsilon\,\|(\mathrm{D}_1+k)\,v\|_{L_2(\Omega)} \\ &\quad\leqslant c_*^{-1}\left(1+C_3+2^{1/2}C_7\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}+\|\partial_1\Lambda\|_\infty+\|\partial_1\mathrm{M}\|_{2,\,\infty}\right) \\ &\quad=\widehat{C}_{18}^{(1)},\end{aligned}\tag{7.7}$$

а из (7.6), теорем 3.12, 3.13 и лемм 4.5, 5.4 —

$$\begin{aligned}&\varepsilon\,\|\mathrm{D}_2v\|_{L_2(\Omega)} \\ &\quad\leqslant c_*^{-1}\left(2^{1/2}c_*^{1/2}C_3\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}+C_1C_{11}+C_{12}+\|\partial_2\Lambda\|_\infty+\|\partial_2\mathrm{M}\|_\infty\right) \\ &\quad=\widehat{C}_{18}^{(2)}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Дополнив (7.4), (7.7) и (7.8) очевидным (с учетом теоремы 3.13 и леммы 4.5) соотношением

$$\varepsilon\,\|v\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\varepsilon\left(k^2+\varepsilon^2\right)\|\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\|\left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\,\mathcal{P}\right\|\leqslant c_*^{-1}C_3\varepsilon,$$

имеем

$$\varepsilon^2a^{(2)}[v,\,v]\leqslant\left(2c_*^{-2}C_3^2+\left(\widehat{C}_{18}^{(1)}\right)^2\right)\|h_2\|_{2,\,\infty}^2+\left(\widehat{C}_{18}^{(2)}\right)^2\left(1+\|g_2\|_\infty\right)=\widehat{C}_{18}^2.$$

А поскольку

$$a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v]\leqslant c_*^{-2}C_4^2=\widetilde{C}_{18}^2$$

ввиду теоремы 3.14 и леммы 4.5, то из представления (3.3) формы оператора $\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ следует неравенство

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\, v \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}^2_{18} + \widehat{C}^2_{18} = C^2_{18},$$

которое и является искомым. □

Подведем промежуточный итог. Тождество (7.1) приводит к оценке

$$\begin{aligned}
&\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2} \Big((\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1} - \big(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\big)^{-1} \mathcal{P} - \mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P} \Big) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \\
&\quad \leqslant \left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\, \mathcal{P}^\perp \right\| + \left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\, \mathcal{J}_\lambda(k;\,\varepsilon) \right\| \\
&\quad + \big(k^2+\varepsilon^2\big) \left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\, \Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\, (\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\, \mathcal{P} \right\|.
\end{aligned}$$

В соответствии с двумя последними леммами, а также неравенством (4.8), она допускает следующее продолжение:

$$\begin{aligned}
&\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2} \Big((\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1} - \big(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\big)^{-1} \mathcal{P} - \mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P} \Big) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \\
&\quad \leqslant C_6 + C_{17} + C_{18} = C_{19}, \quad k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2,\ \ \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Для завершения доказательства неравенства (2.17) теоремы 2.2 при $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, необходимо устранить в (7.9) проекторы $\mathcal{P}$. Изучим сначала этот вопрос для старшего члена, но прежде выпишем легко проверяемую с помощью следствия 1.2 оценку квадратичной формы $b_\lambda(k;\,\varepsilon)$ сверху, которая потребуется далее:

$$\begin{aligned}
b_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v] &\leqslant \Big(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty} \Big) \, \|(\mathrm{D}_1 + k)\, v\|^2_{L_2(\Omega)} \\
&+ \varepsilon^2 \left(1 + \|g_2\|_\infty\right) \|\mathrm{D}_2 v\|^2_{L_2(\Omega)} \\
&+ \varepsilon^2 \Big(2\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|h_2\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty \Big) \, \|v\|^2_{L_2(\Omega)}\,, \\
&\qquad v \in \widetilde{H}^1(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]\,.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Лемма 7.3. *Пусть* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2} \big(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\big)^{-1} \mathcal{P}^\perp \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{20};$$

постоянная C_{20} *зависит лишь от исходных данных задачи.*

Доказательство. Положим в (7.10) $v = \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp u$ с функцией $u \in L_2(\Omega)$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Тогда $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ и, согласно лемме 4.4,

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp u\right\|^2_{L_2(\Omega)} = b_\lambda(k;\,\varepsilon)[v,\,v] \leqslant \left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|$$
$$\times\Bigg(\left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)\left\|(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2$$
$$+\,\varepsilon^2\left(1 + \|g_2\|_\infty\right)\left\|\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2$$
$$+\,\varepsilon^2\left(2\|h_1\|^2_{2,\,\infty} + 2\|h_2\|^2_{2,\,\infty} + 2\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\|Q_*\|_\infty\right)\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|\Bigg)$$
$$\leqslant 4\pi^{-2}\Bigg(\left(1+2\pi^{-2}\right)\|g_1^{-1}\|^2_\infty\left(\|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\|Q_*\|_\infty\right)$$
$$+\,\|g_1^{-1}\|_\infty\left(\|g_1^{-1}\|_\infty\left(1 + \|g_1\|_\infty\right) + \|g_2^{-1}\|_\infty\left(1 + \|g_2\|_\infty\right)\right)\Bigg) = C_{20}^2.$$

□

Осталось показать, что проектор $\mathcal{P}$, находящийся в композиции с корректором, может быть заменен на тождественный оператор. Этот факт устанавливает

Лемма 7.4. *При всех $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, справедливы неравенства*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\Lambda\,(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{21},$$
$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\varepsilon\mathrm{M}\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{22};$$

постоянные C_{21} и C_{22} определены через исходные данные задачи.

Доказательство. Воспользуемся формулой (7.10) при

$$v = \Lambda\,(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp u,\ \text{ где }\ u \in L_2(\Omega),\ \ \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1,$$

и оценками лемм 4.4, 4.6:

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\Lambda\,(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp u\right\|^2_{L_2(\Omega)} = b_\lambda(k;\,\varepsilon)[v,\,v]$$
$$\leqslant 2\left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)$$
$$\times\Bigg(\|\Lambda\|^2_\infty\left\|(\mathrm{D}_1 + k)^2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2$$
$$+\,\|\partial_1\Lambda\|^2_\infty\left\|(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|\Bigg)$$

$$+ 2\varepsilon^2 \left(1 + \|g_2\|_\infty\right) \left(\|\Lambda\|_\infty^2 \left\| \mathrm{D}_2 \left(\mathrm{D}_1 + k\right) \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \right\|^2 \right.$$
$$\left. + \|\partial_2\Lambda\|_\infty^2 \left\| \left(\mathrm{D}_1 + k\right) \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp \right\| \right)$$
$$+ \varepsilon^2 \left(2\|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + 2\|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + 2\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty \right) \|\Lambda\|_\infty^2$$
$$\times \left\| \left(\mathrm{D}_1 + k\right) \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp \right\|$$
$$\leqslant 8 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^2 \left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\infty}\right)$$
$$\times \left(\|\Lambda\|_\infty^2 + \pi^{-2} \|\partial_1\Lambda\|_\infty^2 \right)$$
$$+ 8 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left(1 + \|g_2\|_\infty\right) \left(\pi^{-2} \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|\partial_2\Lambda\|_\infty^2 + \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \|\Lambda\|_\infty^2 \right)$$
$$+ 4\pi^{-2} \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^2 \left(2\|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + 2\|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + 2\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty \right) \|\Lambda\|_\infty^2 = C_{21}^2.$$

Пусть теперь $v = \varepsilon \mathrm{M} \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp u$ (u по-прежнему принадлежит единичной сфере пространства $L_2\left(\Omega\right)$). Тогда аналогично $v \in \widetilde{H}^1\left(\Omega\right)$ и следствие 1.2 и лемма 4.4, примененные к (7.10) с указанной функцией v, приводят к соотношению

$$\varepsilon^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{1/2} \mathrm{M} \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp u \right\|_{L_2(\Omega)}^2 = b_\lambda \left(k;\, \varepsilon\right) [v,\, v]$$
$$\leqslant 2\varepsilon^2 \left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)$$
$$\times \left(\left(\|\mathrm{M}\|_\infty^2 + \|\partial_1\mathrm{M}\|_{2,\,\infty}^2 \right) \left\| \left(\mathrm{D}_1 + k\right) \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp \right\| \right.$$
$$\left. + 2 \|\partial_1\mathrm{M}\|_{2,\,\infty}^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp \right\|^2 \right)$$
$$+ 2\varepsilon^4 \left(1 + \|g_2\|_\infty\right) \left(\|\mathrm{M}\|_\infty^2 \left\| \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp \right\| \right.$$
$$\left. + \|\partial_2\mathrm{M}\|_\infty^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp \right\|^2 \right)$$
$$+ \varepsilon^4 \left(2\|h_1\|_{2,\infty}^2 + 2\|h_2\|_{2,\infty}^2 + 2\|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty \right) \|\mathrm{M}\|_\infty^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 \left(k; \varepsilon\right)\right)^{-1} \mathcal{P}^\perp \right\|^2$$
$$\leqslant 8\pi^{-2} \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^2 \left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)$$
$$\times \left(\|\mathrm{M}\|_\infty^2 + \left(1 + 2\pi^{-2}\right) \|\partial_1\mathrm{M}\|_{2,\,\infty}^2 \right)$$

$$+ 8\pi^{-2} \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty (1 + \|g_2\|_\infty) \left(\pi^{-2} \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|\partial_2 \mathrm{M}\|_\infty^2 + \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \|\mathrm{M}\|_\infty^2\right)$$
$$+ 4\pi^{-4} \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^2 \left(2 \|h_1\|_{2,\infty}^2 + 2 \|h_2\|_{2,\infty}^2 + 2 \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty\right) \|\mathrm{M}\|_\infty^2,$$

правую часть которого примем за определение константы C_{22}^2. □

Итак, в соответствии с (7.9) и леммами 7.3, 7.4 при всех $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, получена необходимая оценка

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{1/2} \left((\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} - \mathcal{K}_\lambda (k;\, \varepsilon)\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \sum_{j=19}^{22} C_j = \widetilde{C}_1, \tag{7.11}$$

постоянная $\widetilde{C}_1$ в которой определяется только через исходные данные задачи.

7.2. Аппроксимация с корректором оператора $(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1}$ при $k^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$. При условии $k^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$, $\langle k,\, \varepsilon\rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]$, каждое слагаемое неравенства

$$\begin{aligned} &\left\|(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{1/2} \left((\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} - \mathcal{K}_\lambda (k;\, \varepsilon)\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \\ &\quad\leqslant \left\|(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1/2}\right\| + \left\|(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{1/2} \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\| \\ &\quad+ \left\|(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{1/2} \Lambda (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\| \\ &\quad+ \left\|(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{1/2} \varepsilon \mathrm{M} \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\| \end{aligned} \tag{7.12}$$

может быть оценено отдельно. Положим в формуле (7.10) $v = \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} u$, $u \in L_2 (\Omega)$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$, и применим лемму 4.4:

$$\begin{aligned} &\left\|(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{1/2} \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} u\right\|_{L_2(\Omega)}^2 = b_\lambda (k;\, \varepsilon)\, [v,\, v] \leqslant \left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\| \\ &\times \left(\left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\infty}\right) \left\|(\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\right. \\ &+ \varepsilon^2 (1 + \|g_2\|_\infty) \left\|\mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \\ &\left.+ \varepsilon^2 \left(2 \|h_1\|_{2,\infty}^2 + 2 \|h_2\|_{2,\infty}^2 + 2 \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty\right) \left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\|\right) \end{aligned}$$

$$\leqslant 2c_*^{-1}\Big(\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty (1+\|g_1\|_\infty) + \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty (1+\|g_2\|_\infty)$$
$$+ \left(c_*^{-1} + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\right)\left(\|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\right)\Big)\tau_0^{-2} = C_{23}^2.$$

Далее, сказанное в лемме 7.4 может быть с незначительными изменениями перенесено на случай $k^2+\varepsilon^2 > \tau_0^2$, $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$, именно

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,\Lambda\,(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}^2$$
$$\leqslant 2\left(1+\|g_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)$$
$$\times\Big(\|\Lambda\|_\infty^2\left\|(\mathrm{D}_1+k)^2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2$$
$$+\|\partial_1\Lambda\|_\infty^2\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|\Big)$$
$$+2\varepsilon^2(1+\|g_2\|_\infty)\Big(\|\Lambda\|_\infty^2\left\|\mathrm{D}_2\,(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2$$
$$+\|\partial_2\Lambda\|_\infty^2\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|\Big)$$
$$+\varepsilon^2\left(2\,\|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + 2\,\|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + 2\,\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\right)$$
$$\times\|\Lambda\|_\infty^2\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|$$
$$\leqslant 4c_*^{-1}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\left(1+\|g_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)$$
$$\times\left(\|\Lambda\|_\infty^2 + \|\partial_1\Lambda\|_\infty^2\,\tau_0^{-2}\right)$$
$$+4\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty(1+\|g_2\|_\infty)\left(2\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\|\Lambda\|_\infty^2 + c_*^{-1}\,\|\partial_2\Lambda\|_\infty^2\right)$$
$$+2c_*^{-1}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\left(2\,\|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + 2\,\|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + 2\,\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\right)\|\Lambda\|_\infty^2 = C_{24}^2.$$

Такой же путь приводит к оценке последнего члена, возникшего из корректора:

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,\varepsilon\mathrm{M}\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}^2 \leqslant \left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|$$
$$\times\Big(2\varepsilon^2\left(1+\|g_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)$$

$$\times \Bigg(\Big(\|\mathrm{M}\|_\infty^2 + \|\partial_1 \mathrm{M}\|_{2,\infty}^2 \Big) \Big\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon) \right)^{-1/2} \Big\|^2$$

$$+ 2 \|\partial_1 \mathrm{M}\|_{2,\infty}^2 \Big\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} \Big\| \Bigg)$$

$$+ 2\varepsilon^4 \left(1 + \|g_2\|_\infty\right) \left(\|\mathrm{M}\|_\infty^2 \Big\| \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k; \varepsilon) \right)^{-1/2} \Big\|^2 + \|\partial_2 \mathrm{M}\|_\infty^2 \Big\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k; \varepsilon) \right)^{-1} \Big\| \right)$$

$$+ \varepsilon^4 \Big(2 \|h_1\|_{2,\infty}^2 + 2 \|h_2\|_{2,\infty}^2 + 2 \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty \Big) \|\mathrm{M}\|_\infty^2 \Big\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k; \varepsilon) \right)^{-1} \Big\| \Bigg)$$

$$\leqslant 4 \Big(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|_{2,\infty}^2 + \|h_2\|_{2,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\infty} \Big)$$

$$\times \Big(c_*^{-1} \left\| g_1^{-1} \right\|_\infty \Big(\|\mathrm{M}\|_\infty^2 + \|\partial_1 \mathrm{M}\|_{2,\infty}^2 \Big) + c_*^{-2} \|\partial_1 \mathrm{M}\|_{2,\infty}^2 \tau_0^{-2} \Big)$$

$$+ 2 \left(1 + \|g_2\|_\infty\right) \Big(2 c_*^{-1} \left\| g_2^{-1} \right\|_\infty \|\mathrm{M}\|_\infty^2 + c_*^{-2} \|\partial_2 \mathrm{M}\|_\infty^2 \Big)$$

$$+ c_*^{-2} \Big(2 \|h_1\|_{2,\infty}^2 + 2 \|h_2\|_{2,\infty}^2 + 2 \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty \Big) \|\mathrm{M}\|_\infty^2 = C_{25}^2.$$

Добавляя к трем этим неравенствам (4.1) и продолжая (7.12) с их помощью, получаем окончательный результат:

$$\Big\| \left(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{1/2} \Big(\left(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0 (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} - \mathcal{K}_\lambda (k;\, \varepsilon) \Big) \Big\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}$$
$$\leqslant c_*^{-1/2} \tau_0^{-1} + C_{23} + C_{24} + C_{25} = \widetilde{C}_2, \qquad (7.13)$$
$$k^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2, \quad \langle k,\, \varepsilon \rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]\,.$$

Оценки (7.11), (7.13) полностью завершают проверку теоремы 2.2, при этом константа $\widetilde{C}$ во втором ее неравенстве оказывается равной $\max_{j \in \{1,2\}} \widetilde{C}_j$ и зависит лишь от данных задачи.

§8. Краевые задачи типа Дирихле и типа Неймана

8.1. Определение операторов ${}^N\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ и ${}^D\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$. Постановка задачи. Определим в Π матрицу-функцию $\breve{g}(\cdot) = \operatorname{diag}\{\breve{g}_1(\cdot), \breve{g}_2(\cdot)\}$, для элементов которой выполнено следующее условие.

Условие 5.

1) $\breve{g}_j(\cdot)$, $j \in \{1,\, 2\}$, *измеримы и положительны*;
2) $\breve{g}_j(\cdot,\, x_2)$, $j \in \{1,\, 2\}$, *при п. в.* $x_2 \in (0,\, a)$ *периодичны с периодом* 1:
$$\breve{g}_j(x_1 + 1,\, x_2) = \breve{g}_j(x_1,\, x_2)\,, \quad \mathbf{x} \in \Pi;$$
3) $\breve{g}_j(\cdot)$ *и* $\left(\breve{g}_j(\cdot)\right)^{-1}$, $j \in \{1,\, 2\}$, *равномерно ограничены*:
$$\left\|\breve{g}_j\right\|_\infty,\, \left\|\breve{g}_j^{-1}\right\|_\infty < \infty;$$

4) *верны включения*

$$\breve{g}_j \in \mathrm{Lip}\left([0,\, a]\,;\, L_\infty\,(0,\,1)\right) \quad (j \in \{1,\,2\})\,.$$

Определим комплекснозначные отображения $\breve{h}_j\,(\cdot)$, $j \in \{1,\,2\}$, и вещественнозначную функцию $\breve{Q}\,(\cdot)$, для которых справедливо

Условие 6.

1) $\breve{Q}\,(\cdot)$, $\breve{h}_j\,(\cdot)$, $j \in \{1,\,2\}$, *измеримы в полосе* Π;
2) $\breve{Q}\,(\cdot,\,x_2)$, $\breve{h}_j\,(\cdot,\,x_2)$, $j \in \{1,\,2\}$, *при п. в.* $x_2 \in (0,\,a)$ *периодичны с периодом* 1:

$$\begin{aligned} \breve{Q}\,(x_1+1,\,x_2) &= \breve{Q}\,(x_1,\,x_2)\,, \qquad \mathbf{x} \in \Pi, \\ \breve{h}_j\,(x_1+1,\,x_2) &= \breve{h}_j\,(x_1,\,x_2)\,, \qquad \mathbf{x} \in \Pi; \end{aligned}$$

3) *имеют место включения*

$$\begin{aligned} &\breve{Q} \in \mathrm{Lip}\left([0,\, a]\,;\, L_1\,(0,\,1)\right), \\ &\breve{h}_j \in \mathrm{Lip}\left([0,\, a]\,;\, L_2\,(0,\,1)\right) \qquad (j \in \{1,\,2\})\,; \end{aligned}$$

4) *следы функции* $\breve{h}_2\,(\cdot)$ *на противоположных гранях* Π *равны нулю*:

$$\breve{h}_2\,(x_1,\,0) = \breve{h}_2\,(x_1,\,a) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Наконец, введем функцию $\breve{Q}_*\,(\cdot)$, соответствующую следующим требованиям.

Условие 7.

1) $\breve{Q}_*\,(\cdot)$ *положительна и измерима в полосе* Π;
2) $\breve{Q}_*\,(\cdot,\,x_2)$ *при п. в.* $x_2 \in (0,\,a)$ *периодична с периодом* 1:

$$\breve{Q}_*\,(x_1+1,\,x_2) = \breve{Q}_*\,(x_1,\,x_2)\,, \quad \mathbf{x} \in \Pi;$$

3) $\breve{Q}_*\,(\cdot)$ *и* $\left(\breve{Q}_*\,(\cdot)\right)^{-1}$ *равномерно ограничены в* Π:

$$\left\|\breve{Q}_*\right\|_\infty,\, \left\|\breve{Q}_*^{-1}\right\|_\infty < \infty;$$

4) *справедливо включение*

$$\breve{Q}_* \in \mathrm{Lip}\left([0,\, a]\,;\, L_\infty\,(0,\,1)\right).$$

Пусть λ_0, $c_\natural$ определены по коэффициентам $\breve{g}_j\,(\cdot)$, $\breve{h}_j\,(\cdot)$, $j \in \{1,\,2\}$, $\breve{Q}\,(\cdot)$ и $\breve{Q}_*\,(\cdot)$ в (1.16), (1.15) и λ удовлетворяет условию 4. Пусть операторы ${}^N\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$

и ${}^{D}\mathcal{B}_{\lambda}^{\varepsilon}$ заданы положительно определенными замкнутыми (доказательство полностью повторяет проверку этих свойств для $b_{\lambda}^{\varepsilon}$) формами

$$\begin{aligned}{}^{N}b_{\lambda}^{\varepsilon}[u,\,u] = \int\limits_{\Pi}\Bigg(\sum_{j=1}^{2}\Big(\breve{g}_j^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{D}_j u\cdot\overline{\breve{h}_j^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,u}\Big)\Big)\\ + \breve{Q}^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,|u|^2 + \lambda\breve{Q}_*^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,|u|^2\Bigg)d\mathbf{x},\ \ u\in D\left[{}^{N}b_{\lambda}^{\varepsilon}\right] = H^1(\Pi),\ \ \varepsilon\in(0,\,1]\,,\end{aligned} \tag{8.1}$$

и

$$\begin{aligned}{}^{D}b_{\lambda}^{\varepsilon}[u,\,u] = \int\limits_{\Pi}\Bigg(\sum_{j=1}^{2}\Big(\breve{g}_j^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{D}_j u\cdot\overline{\breve{h}_j^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,u}\Big)\Big)\\ + \breve{Q}^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,|u|^2 + \lambda\breve{Q}_*^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,|u|^2\Bigg)d\mathbf{x},\ \ u\in D\left[{}^{D}b_{\lambda}^{\varepsilon}\right] = \mathring{H}^1(\Pi),\ \ \varepsilon\in(0,\,1]\,,\end{aligned} \tag{8.2}$$

соответственно. Ниже в качестве префикса для обозначения краевых условий типа Неймана или Дирихле будет использован знак $\# \in \{N,\,D\}$.

Как и ранее, первая часть задачи усреднения для ${}^{\#}\mathcal{B}_{\lambda}^{\varepsilon}$ заключается в нахождении такого оператора ${}^{\#}\mathcal{B}_{\lambda}^{0}$ с не зависящими от периодической переменной x_1 коэффициентами, чтобы обратное к нему отображение явилось бы пределом обратного к исходному при стремлении ε к нулю в равномерной операторной топологии; предельный оператор называется эффективным. Форма, задающая ${}^{\#}\mathcal{B}_{\lambda}^{0}$, сохраняет прежний вид:

$$\begin{aligned}{}^{\#}b_{\lambda}^{0}[u,\,u] = \int\limits_{\Pi}\Bigg(\sum_{j=1}^{2}\Big(\breve{g}_j^{0}(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{D}_j u\cdot\overline{\breve{h}_j^{0}(\mathbf{x})\,u}\Big)\Big)\\ + \breve{Q}^{0}(\mathbf{x})\,|u|^2 + \lambda\breve{Q}_*^{0}(\mathbf{x})\,|u|^2\Bigg)d\mathbf{x},\ \ u\in D\left[{}^{\#}b_{\lambda}^{0}\right] = D\left[{}^{\#}b_{\lambda}^{\varepsilon}\right].\end{aligned} \tag{8.3}$$

Коэффициенты формы (8.3) построены при помощи правил, описанных в (1.22), по коэффициентам отображения ${}^{\#}\mathcal{B}_{\lambda}^{\varepsilon}$. Вторая же часть связана с поиском такого оператора ${}^{\#}\mathcal{K}_{\lambda}^{\varepsilon}$ (корректора), чтобы сумма $\left({}^{\#}\mathcal{B}_{\lambda}^{0}\right)^{-1}$ с $\varepsilon\left({}^{\#}\mathcal{K}_{\lambda}^{\varepsilon}\right)$ приближала бы оператор $\left({}^{\#}\mathcal{B}_{\lambda}^{\varepsilon}\right)^{-1}$ по метрике пространства $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi)\,,\,H^1(\Pi)\right)$ при малом ε. Как и в случае эффективного оператора, выражение, задающее корректор, остается неизменным:

$${}^{\#}\mathcal{K}_{\lambda}^{\varepsilon} = \left(\breve{\Lambda}^{\varepsilon}\mathrm{D}_1 + \breve{\mathrm{M}}^{\varepsilon}\right)\left({}^{\#}\mathcal{B}_{\lambda}^{0}\right)^{-1},\quad \varepsilon\in(0,\,1]\,; \tag{8.4}$$

функции $\breve{\Lambda}$, $\breve{\mathrm{M}}$ введены согласно (1.30) и (1.31) по коэффициентам оператора ${}^{\#}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$.

8.2. Основной результат. Разрешением задачи усреднения для оператора ${}^{\#}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$ является

Теорема 8.1. *При выполнении условий* 4, 5, 6, 7 *для отображения* ${}^{\#}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$, $\# \in \{N, D\}$, *в* $L_2(\Pi)$, *определенного одной из форм* (8.1), (8.2), *при* $\varepsilon \in (0, 1]$ *справедливы оценки*

$$\left\|\left({}^{\#}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}\right)^{-1} - \left({}^{\#}\mathcal{B}^{0}_{\lambda}\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon, \tag{8.5}$$

$$\left\|\left({}^{\#}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}\right)^{-1} - \left({}^{\#}\mathcal{B}^{0}_{\lambda}\right)^{-1} - \varepsilon\left({}^{\#}\mathcal{K}^{\varepsilon}_{\lambda}\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi),\, H^1(\Pi))} \leqslant \widetilde{C}\varepsilon, \tag{8.6}$$

в которых ${}^{\#}\mathcal{B}^{0}_{\lambda}$ — *эффективный оператор, заданный формой* (8.3) *с коэффициентами, построенными по принципам* (1.22), *а* ${}^{\#}\mathcal{K}^{\varepsilon}_{\lambda}$ — *корректор, введенный соотношением* (8.4); *постоянные* C *и* $\widetilde{C}$ *зависят только от исходных данных задачи.*

8.3. Операторы четного и нечетного продолжений. Основным инструментом приведения задач типа Дирихле и типа Неймана к периодической является их продолжение в удвоенную полосу с помощью операторов четного или нечетного продолжения. Описанием этих операторов и связанных с ними объектов и займемся.

Обозначим через Π_c область, являющуюся дополнением $\overline{\Pi}$ до 2Π:

$$\Pi_c = \mathbb{R} \times (a,\, 2a)\,.$$

Пусть $L_2^{\pm}(2\Pi)$ — подпространства в $L_2(2\Pi)$ четных и нечетных относительно прямой $\{x_2 = a\}$ функций:

$$L_2^{\pm}(2\Pi) = \Big\{u \in L_2(2\Pi) : u(x_1,\, x_2) = \pm u(x_1,\, 2a - x_2) \ \text{ при п. в. } \mathbf{x} \in 2\Pi\Big\}.$$

Ясно, что ортогональная сумма этих подпространств совпадает со всем пространством $L_2(2\Pi)$, т.е.

$$L_2(2\Pi) = L_2^{+}(2\Pi) \oplus L_2^{-}(2\Pi)\,.$$

Ортогональные проекторы $\mathcal{P}^{\pm}$ на $L_2^{\pm}(2\Pi)$ действуют по правилу

$$\left(\mathcal{P}^{\pm}u\right)(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\left(u(x_1,\, x_2) \pm u(x_1,\, 2a - x_2)\right), \quad u \in L_2(2\Pi)\,, \ \ \mathbf{x} \in 2\Pi.$$

Введем операторы $\mathcal{W}^{\pm} \in \mathbf{B}\left(L_2(\Pi), L_2^{\pm}(2\Pi)\right)$ четного и нечетного продолжений следующим образом:

$$\left(\mathcal{W}^{\pm}u\right)(\mathbf{x}) = 2^{-1/2}\left(u(x_1, x_2)\chi_{\Pi}(x_1, x_2) \pm u(x_1, 2a - x_2)\chi_{\Pi_c}(x_1, x_2)\right), \quad u \in L_2(\Pi). \tag{8.7}$$

Несложно видеть, что $\mathcal{W}^{\pm}$ унитарны, а обратный к ним оператор представляет собой композицию операторов умножения на $2^{1/2}$ и сужения на Π.

Лемма 8.2. *Пусть $\widetilde{H}^1_{\pm}(2\Pi) = \mathcal{P}^{\pm}\widetilde{H}^1(2\Pi)$. Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{W}^{+}H^1(\Pi) = \widetilde{H}^1_{+}(2\Pi), \tag{8.8}$$

$$\mathcal{W}^{-}\mathring{H}^1(\Pi) = \widetilde{H}^1_{-}(2\Pi), \tag{8.9}$$

при этом для $u_+ \in H^1(\Pi)$ и $u_- \in \mathring{H}^1(\Pi)$ выполнены соотношения

$$\partial_1\mathcal{W}^{\pm}u_{\pm} = \mathcal{W}^{\pm}\partial_1 u_{\pm}, \tag{8.10}$$

$$\partial_2\mathcal{W}^{\pm}u_{\pm} = \mathcal{W}^{\mp}\partial_2 u_{\pm}. \tag{8.11}$$

Доказательство. Существование обобщенных производных функций $\mathcal{W}^{\pm}u_{\pm}$ по переменной x_1 следует из параллельности прямой $\{x_2 = a\}$ и направления дифференцирования, а по переменной x_2 — из непрерывности $u_{\pm}$ на указанной прямой. Совпадение следов $\mathcal{W}^{\pm}u_{\pm}$ на противоположных гранях полосы 2Π прямо следует из определений операторов $\mathcal{W}^{\pm}$ и класса $\mathring{H}^1(\Pi)$. Обратные включения очевидны, заметим лишь, что для всех функций u из класса $\widetilde{H}^1_{-}(2\Pi) = \widetilde{H}^1(2\Pi) \cap L_2^{-}(2\Pi)$ при п. в. $x_1 \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$u(x_1, 0) = u(x_1, a) = u(x_1, 2a) = 0.$$

Этим доказаны (8.8) и (8.9). Формулы (8.10), (8.11) получаются из (8.7) непосредственно. $\square$

8.4. Построение оператора с периодическими граничными условиями. В данном пункте приведена конструкция оператора с периодическими граничными условиями, который в некотором смысле отвечает ортогональной сумме операторов с граничными условиями типов Дирихле и Неймана. Возможность построения такого оператора позволяет использовать для доказательства теоремы 8.1 уже полученную теорему 1.6.

По коэффициентам формы ${}^{\#}b_\lambda^\varepsilon$ определим функции

$$\begin{aligned} g_1 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+\breve{g}_1, & g_2 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+\breve{g}_2,\\ h_1 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+\breve{h}_1, & h_2 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^-\breve{h}_2,\\ Q &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+\breve{Q}, & Q_* &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+\breve{Q}_*. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Используя аргументы леммы 8.2, легко видеть, что введенные отображения удовлетворяют условиям 1, 2, 3. Фиксируем число λ согласно условию 4 и зададим оператор $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ — положительно определенный дифференциальный оператор с периодическими граничными условиями — квадратичной формой

$$b_\lambda^\varepsilon[u,\,u] = \int\limits_{2\Pi}\left(\sum_{j=1}^{2}\left(g_j^\varepsilon(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{D}_j u\cdot\overline{h_j^\varepsilon(\mathbf{x})\,u}\right)\right)\right.$$
$$\left. + Q^\varepsilon(\mathbf{x})\,|u|^2 + \lambda Q_*^\varepsilon(\mathbf{x})\,|u|^2\right)d\mathbf{x},\quad u\in D\left[b_\lambda^\varepsilon\right] = \widetilde{H}^1(2\Pi)\,,\ \ \varepsilon\in(0,\,1]\,.$$

Следует заметить, что исходные данные рассматриваемых задач совпадают с исходными данными (1.18).

Лемма 8.3. *Подпространства $L_2^\pm(2\Pi)$ приводят $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$.*

Доказательство. Соотношение

$$\mathcal{P}^- D\left[b_\lambda^\varepsilon\right] = \widetilde{H}_-^1(2\Pi) = L_2^-(2\Pi)\cap D\left[b_\lambda^\varepsilon\right]$$

очевидно, а равенство

$$b_\lambda^\varepsilon[u,\,u] = b_\lambda^\varepsilon\left[\mathcal{P}^+u,\,\mathcal{P}^+u\right] + b_\lambda^\varepsilon\left[\mathcal{P}^-u,\,\mathcal{P}^-u\right],\quad u\in D\left[b_\lambda^\varepsilon\right],$$

выполнено из-за инвариантности пространств $L_2^\pm(2\Pi)$ относительно операторов умножения на $g_j(\cdot)$, $j\in\{1,\,2\}$, $Q_*(\cdot)$ (с областью определения $L_2(2\Pi)$), $h_1(\cdot)$, $Q(\cdot)$ и дифференцирования D_1 и антиинвариантности[1] относительно операторов умножения на $h_2(\cdot)$ и дифференцирования D_2 (все — с областью определения $\widetilde{H}^1(2\Pi)$). $\square$

Части $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon|_{L_2^\pm(2\Pi)}$ оператора $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ в подпространствах $L_2^\pm(2\Pi)$ будем обозначать через ${}^\pm\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ (соответствующие формы — через ${}^\pm b_\lambda^\varepsilon$). Положение леммы 8.3 тогда означает, что $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ представляет собой ортогональную сумму операторов ${}^\pm\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$. Далее, поскольку имеют место соотношения

[1]Подпространство V линейного пространства называется антиинвариантным относительно линейного преобразования T, если $V\perp TV$.

$\mathcal{W}^+ H^1(\Pi) = \widetilde{H}^1_+(2\Pi)$ и $\mathcal{W}^- \mathring{H}^1(\Pi) = \widetilde{H}^1_-(2\Pi)$ (лемма 8.2) и при произвольных $u_+ \in H^1(\Pi)$ и $u_- \in \mathring{H}^1(\Pi)$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} {}^{+}b^\varepsilon_\lambda \left[\mathcal{W}^+ u_+, \mathcal{W}^+ u_+\right] &= {}^{N}b^\varepsilon_\lambda \left[u_+, u_+\right], \\ {}^{-}b^\varepsilon_\lambda \left[\mathcal{W}^- u_-, \mathcal{W}^- u_-\right] &= {}^{D}b^\varepsilon_\lambda \left[u_-, u_-\right], \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{W}^+\right)^* {}^{+}\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda \mathcal{W}^+ &= {}^{N}\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda, \\ \left(\mathcal{W}^-\right)^* {}^{-}\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda \mathcal{W}^- &= {}^{D}\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda. \end{aligned}$$

Все вместе это означает, что справедливо разложение

$$\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda = \left(\mathcal{W}^+\right) {}^{N}\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda \left(\mathcal{W}^+\right)^* \oplus \left(\mathcal{W}^-\right) {}^{D}\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda \left(\mathcal{W}^-\right)^*. \tag{8.13}$$

8.5. Построение предельных операторов с периодическими граничными условиями. Определим эффективный оператор $\mathcal{B}^0_\lambda$ для задачи усреднения в полосе 2Π через форму

$$\begin{aligned} b^0_\lambda[u, u] = \int\limits_{2\Pi} \Biggl(\sum_{j=1}^{2} \Bigl(g^0_j(\mathbf{x}) \left|\mathrm{D}_j u\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Bigl(\mathrm{D}_j u \cdot \overline{h^0_j(\mathbf{x})\, u}\Bigr)\Bigr) \\ + Q^0(\mathbf{x}) |u|^2 + \lambda Q^0_*(\mathbf{x}) |u|^2 \Biggr) d\mathbf{x}, \quad u \in D\left[b^0_\lambda\right] = \widetilde{H}^1(2\Pi), \end{aligned}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} g^0_1 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+ \breve{g}^0_1, & g^0_2 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+ \breve{g}^0_2, \\ h^0_1 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+ \breve{h}^0_1, & h^0_2 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^- \breve{h}^0_2, \\ Q^0 &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+ \breve{Q}^0, & Q^0_* &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+ \breve{Q}^0_*. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Далее, зададим корректор для оператора $\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda$ соотношением

$$\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda = \left(\Lambda^\varepsilon \mathrm{D}_1 + \mathrm{M}^\varepsilon\right) \left(\mathcal{B}^0_\lambda\right)^{-1}, \quad \varepsilon \in (0, 1],$$

где функции Λ и M имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+ \breve{\Lambda}, \\ \mathrm{M} &= 2^{1/2}\mathcal{W}^+ \breve{\mathrm{M}}. \end{aligned}$$

Ясно, что так определенные отображения $\mathcal{B}^0_\lambda$ и $\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda$ действительно являются эффективным оператором и корректором для $\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda$. Повторяя рассуждения п. 8.4 в применении к $\mathcal{B}^0_\lambda$ и $\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda$, получаем для них следующие представления:

$$\mathcal{B}_\lambda^0 = (\mathcal{W}^+)\, {}^N\mathcal{B}_\lambda^0\, (\mathcal{W}^+)^* \oplus (\mathcal{W}^-)\, {}^D\mathcal{B}_\lambda^0\, (\mathcal{W}^-)^*, \tag{8.15}$$

$$\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon = (\mathcal{W}^+)\, {}^N\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon\, (\mathcal{W}^+)^* \oplus (\mathcal{W}^-)\, {}^D\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon\, (\mathcal{W}^-)^*. \tag{8.16}$$

Тогда формулы (8.13), (8.15), (8.16), унитарность преобразований $\mathcal{W}^\pm$ вместе с теоремой 1.6 для оператора $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ в удвоенной полосе 2Π доказывают утверждение теоремы 8.1.

§9. Задача усреднения для оператора с сингулярным потенциалом

Для иллюстрации полученных результатов приведем пример усреднения эллиптического оператора второго порядка с сингулярным (т.е. содержащим растущий множитель) потенциалом.

Предположим, что отображения $g_j(\cdot)$, $h_j(\cdot)$ $(j \in \{1, 2\})$, $Q(\cdot)$, $Q_*(\cdot)$ удовлетворяют условиям 1, 2, 3 в случае периодической задачи и условиям 5, 6, 7 — в случае задачи типа Дирихле или Неймана. Пусть вещественнозначная функция $R(\cdot)$ подчинена тем же ограничениям, что и $Q(\cdot)$; будем считать также, что $\int_{(0,1)} R(y_1, x_2)\, dy_1 = 0$ при п. в. $x_2 \in (0, a)$. Определим с помощью формы

$$\begin{aligned} {}^\# b_\lambda^\varepsilon [u, u] = \int\limits_\Pi \Bigg(\sum_{j=1}^2 \Big(g_j^\varepsilon(\mathbf{x})\, |\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{D}_j u \cdot \overline{h_j^\varepsilon(\mathbf{x})\, u}\Big)\Big) + \varepsilon^{-1} R^\varepsilon(\mathbf{x})\, |u|^2 \\ + Q^\varepsilon(\mathbf{x})\, |u|^2 + \lambda Q_*^\varepsilon(\mathbf{x})\, |u|^2 \Bigg) d\mathbf{x}, \quad u \in D\,[{}^\# b_\lambda^\varepsilon], \ \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \varepsilon \in (0, 1], \end{aligned}$$

самосопряженный полуограниченный снизу оператор ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ в пространстве $L_2(\Pi)$ (сейчас символ # служит для обозначения периодических граничных условий, условий типа Дирихле или Неймана).

Сингулярный потенциал $\varepsilon^{-1} R^\varepsilon(\cdot)$ оператора ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ допускает представление, позволяющее применить к оператору теорему 1.6 или 8.1. Введем функцию $r(\cdot)$ — периодическое по x_1 (период равен 1) решение задачи

$$R(\mathbf{x}) = \mathrm{D}_1 r(\mathbf{x}), \quad r(0, x_2) = 0.$$

Отображение $r(\cdot)$, очевидно, задано соотношением

$$r(\mathbf{x}) = i \int\limits_{(0, x_1)} R(y_1, x_2)\, dy_1$$

и удовлетворяет требованиям, наложенным на h_1, притом его постоянная Липшица $\|r\|_{\mathrm{Lip}([0,a];\, L_2(0,1))}$ оценивается сверху через $\|R\|_{\mathrm{Lip}([0,a];\, L_1(0,1))}$.

Так как $\overline{r(\mathbf{x})} = -r(\mathbf{x})$, то при $u \in D[{}^{\#}b^{\varepsilon}_{\lambda}]$ верно равенство

$$\varepsilon^{-1} R^{\varepsilon}(\mathbf{x})\, u = (r^{\varepsilon}(\mathbf{x}))^{*}\, \mathrm{D}_1 u + \mathrm{D}_1 r^{\varepsilon}(\mathbf{x})\, u,$$

которое приводит форму ${}^{\#}b^{\varepsilon}_{\lambda}$ к виду

$$\begin{aligned} {}^{\#}b^{\varepsilon}_{\lambda}[u,\,u] = \int\limits_{\Pi} \Bigg(\sum_{j=1}^{2} \Big(g^{\varepsilon}_{j}(\mathbf{x})\, |\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{D}_j u \cdot \overline{h^{\varepsilon}_{j}(\mathbf{x})\, u}\Big)\Big) \\ + 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{D}_1 u \cdot \overline{r^{\varepsilon}(\mathbf{x})\, u}\Big) + Q^{\varepsilon}(\mathbf{x})\, |u|^2 + \lambda Q^{\varepsilon}_{*}(\mathbf{x})\, |u|^2 \Bigg) d\mathbf{x},\ u \in D[{}^{\#}b^{\varepsilon}_{\lambda}]. \end{aligned}$$

Таким образом, задача усреднения для соответствующего ей оператора укладывается в уже изученную схему.

Приложение А. Лемма о дифференцировании по параметру

Данное приложение посвящено проверке леммы 5.3. Повторим ее формулировку.

Лемма А.1. *Пусть* $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. *Тогда при* $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ *и* $z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}$ *функция* $u = \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \varphi$ *имеет обобщенную производную* $\mathrm{D}_2 u$, *причем* $\mathrm{D}_2 u \in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)$.

Доказательство. Отметим сразу оценку

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta^{-1} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}$$

функции u, которая следует из формулы (5.8). Далее, по условию леммы, $u \in D\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\,\varepsilon)\right) \subset L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)$ является решением уравнения

$$\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right) u = \varphi,$$

понимаемого в слабом смысле, т.е. u удовлетворяет тождеству

$$a^{(1)}_{\lambda}(k;\,\varepsilon)\,[u,\,\eta] - z\,(u,\,\eta)_{L_2(\Omega)} = (\varphi,\,\eta)_{L_2(\Omega)}, \quad \eta \in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right). \tag{A.1}$$

Выберем в качестве η функцию u, тогда

$$a^{(1)}_{\lambda}(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u] \leqslant \delta^{-2}\,(|z| + \delta)\, \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant 3\delta^{-1} \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Вместе с неравенством (3.5) это приводит к оценке

$$\|(\mathrm{D}_1 + k)\, u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta^{-2}\left(1 + 6\left\|g_1^{-1}\right\|_{\infty} \delta\right) \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} = c_0(\delta)\, \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{A.2}$$

Будем интерпретировать, склеив ребра $\{x_2 = 0\}$ и $\{x_2 = a\}$, область Ω как боковую поверхность цилиндра. Поскольку коэффициенты в выражении (A.1) периодичны по переменной x_2, то их свойства гладкости (условия 1, 2 и 3) перенесутся на полученное пространство $\Sigma = (0,\, 1) \times \mathbb{T}$.

Введем оператор разностного отношения Δ_h, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, формулой $(\Delta_h v)(\mathbf{x}) = h^{-1}(v(x_1,\, x_2 + h) - v(x_1,\, x_2))$, $v \in L_2(\Sigma)$, $\mathbf{x} \in \Sigma$. Возьмем в тождестве (A.1) вместо η функцию $\Delta_{-h}\eta$ с $\eta \in L_2\left(\mathbb{T};\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\right)$, тогда

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Sigma g_1(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1 + k)\, u \cdot \overline{(\mathrm{D}_1 + k)\,\Delta_{-h}\eta}\, d\mathbf{x} \\
&+ \varepsilon \int\limits_\Sigma \Big((\mathrm{D}_1 + k)\, u \cdot \overline{h_1(\mathbf{x})\,\Delta_{-h}\eta} + h_1(\mathbf{x})\, u \overline{(\mathrm{D}_1 + k)\,\Delta_{-h}\eta}\Big)\, d\mathbf{x} \\
&+ \varepsilon^2 \int\limits_\Sigma Q(\mathbf{x})\, u \overline{\Delta_{-h}\eta} d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \lambda \int\limits_\Sigma Q_*(\mathbf{x})\, u \overline{\Delta_{-h}\eta} d\mathbf{x} = \int\limits_\Sigma (zu + \varphi)\, \overline{\Delta_{-h}\eta} d\mathbf{x}, \\
&\hspace{18em} \eta \in L_2\left(\mathbb{T};\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\right).
\end{aligned}$$

Используя для $\zeta,\, \xi \in L_2(\Sigma)$ равенства $(\Delta_h(\zeta\xi))(\mathbf{x}) = (\Delta_h\zeta)(\mathbf{x})\,\xi(\mathbf{x}) + \zeta(x_1,\, x_2 + h)\,(\Delta_h\xi)(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Sigma$, и $\int_\Sigma \zeta \Delta_{-h}\xi d\mathbf{x} = -\int_\Sigma \Delta_h\zeta \cdot \xi d\mathbf{x}$, преобразуем полученное соотношение к виду

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Sigma \Big(g_1(x_1,\, x_2 + h)(\mathrm{D}_1 + k)\,\Delta_h u + (\Delta_h g_1)(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1 + k)\, u\Big)\overline{(\mathrm{D}_1 + k)\,\eta} d\mathbf{x} \\
&+ \varepsilon \int\limits_\Sigma \Big((\mathrm{D}_1 + k)\,\Delta_h u \cdot \overline{h_1(x_1,\, x_2 + h)} + (\mathrm{D}_1 + k)\, u \cdot \overline{(\Delta_h h_1)(\mathbf{x})}\Big)\overline{\eta} d\mathbf{x} \\
&+ \varepsilon \int\limits_\Sigma (h_1(x_1,\, x_2 + h)\,\Delta_h u + (\Delta_h h_1)(\mathbf{x})\, u)\, \overline{(\mathrm{D}_1 + k)\,\eta} d\mathbf{x} \\
&+ \varepsilon^2 \int\limits_\Sigma \Big(Q(x_1,\, x_2 + h)\,\Delta_h u + (\Delta_h Q)(\mathbf{x})\, u\Big)\overline{\eta} d\mathbf{x} \\
&+ \varepsilon^2 \lambda \int\limits_\Sigma \Big(Q_*(x_1,\, x_2 + h)\,\Delta_h u + (\Delta_h Q_*)(\mathbf{x})\, u\Big)\overline{\eta} d\mathbf{x} \\
&= \int\limits_\Sigma (z\Delta_h u + \Delta_h\varphi)\, \overline{\eta} d\mathbf{x}, \quad \eta \in L_2\left(\mathbb{T};\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\right).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Подставим теперь в (A.3) $\eta = \Delta_h u$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Sigma} g_1(x_1,\, x_2+h)\,|(\mathrm{D}_1+k)\,\Delta_h u|^2\,d\mathbf{x}\\
&= -\int\limits_{\Sigma} (\Delta_h g_1)(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)\,\Delta_h u}d\mathbf{x}\\
&-\varepsilon\int\limits_{\Sigma}\Big((\mathrm{D}_1+k)\,\Delta_h u\cdot\overline{h_1(x_1,\, x_2+h)} + (\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{(\Delta_h h_1)(\mathbf{x})}\Big)\overline{\Delta_h u}d\mathbf{x}\\
&-\varepsilon\int\limits_{\Sigma}(h_1(x_1,\, x_2+h)\,\Delta_h u + (\Delta_h h_1)(\mathbf{x})\,u)\,\overline{(\mathrm{D}_1+k)\,\Delta_h u}d\mathbf{x}\\
&-\varepsilon^2\int\limits_{\Sigma}\Big(Q(x_1,\, x_2+h)\,\Delta_h u + (\Delta_h Q)(\mathbf{x})\,u\Big)\overline{\Delta_h u}d\mathbf{x}\\
&-\varepsilon^2\lambda\int\limits_{\Sigma}\Big(Q_*(x_1,\, x_2+h)\,\Delta_h u + (\Delta_h Q_*)(\mathbf{x})\,u\Big)\overline{\Delta_h u}d\mathbf{x}\\
&+\int\limits_{\Sigma}(z\Delta_h u + \Delta_h\varphi)\,\overline{\Delta_h u}d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Левую часть (A.4) оценим снизу:

$$\int\limits_{\Sigma} g_1(x_1,\, x_2+h)\,|(\mathrm{D}_1+k)\,\Delta_h u|^2\,d\mathbf{x} \geqslant \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|(\mathrm{D}_1+k)\,\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)};$$

правую — сверху через

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1}\Big(&\|(\mathrm{D}_1+k)\,\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} + c_1(\varepsilon;\,\delta)\,\|\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)}\\
&+ c_2(\varepsilon;\,\delta)\,\|\varphi\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|\partial_2\varphi\|^2_{L_2(\Sigma)}\Big)
\end{aligned}$$

с рациональными функциями $c_1(\varepsilon;\,\delta)$, $c_2(\varepsilon;\,\delta)$, коэффициенты которых определяются по исходным данным задачи. Здесь были использованы полученные ранее формулы (5.4), (5.5), (A.2) и следствие 1.2 и было учтено, что φ имеет обобщенную производную по второй переменной класса $L_2(\Sigma)$. Таким образом, доказано следующее неравенство:

$$\|(\mathrm{D}_1+k)\,\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant c_1(\varepsilon;\,\delta)\,\|\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} + c_2(\varepsilon;\,\delta)\,\|\varphi\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|\partial_2\varphi\|^2_{L_2(\Sigma)}. \tag{A.5}$$

Согласно условию $\operatorname{Im} z \neq 0$. Приравнивая мнимые составляющие от обеих частей равенства (A.4), приходим к тождеству

$$\operatorname{Im} z \int\limits_{\Sigma} |\Delta_h u|^2 \, d\mathbf{x} = \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} (\Delta_h g_1)(\mathbf{x}) (\mathrm{D}_1 + k) u \cdot \overline{(\mathrm{D}_1 + k) \Delta_h u} d\mathbf{x}$$
$$+ \varepsilon \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} \Big((\mathrm{D}_1 + k) u \cdot \overline{(\Delta_h h_1)(\mathbf{x}) \Delta_h u} + (\Delta_h h_1)(\mathbf{x}) u \overline{(\mathrm{D}_1 + k) \Delta_h u} \Big) d\mathbf{x}$$
$$+ \varepsilon^2 \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} (\Delta_h Q)(\mathbf{x}) u \overline{\Delta_h u} d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \lambda \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} (\Delta_h Q_*)(\mathbf{x}) u \overline{\Delta_h u} d\mathbf{x}$$
$$- \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} \Delta_h \varphi \cdot \overline{\Delta_h u} d\mathbf{x}.$$

Вместе с (A.2) и (A.5) оно позволяет получить оценку

$$\|\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-2} \, \hat{c}_3 (\varepsilon; \delta) \left(\|\varphi\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|\partial_2 \varphi\|^2_{L_2(\Sigma)} \right), \tag{A.6}$$

в которой рациональная функция $\hat{c}_3(\varepsilon; \delta)$ задана исходными параметрами задачи и не зависит от h. В итоге формулы (A.5) и (A.6) доказывают ограниченность множества $\{\Delta_h u\}_{h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ в пространстве $L_2\big(\mathbb{T}; \widetilde{H}^1(0, 1)\big)$:

$$\|\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|\mathrm{D}_1 \Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant C^2_\varphi (\varepsilon; \delta; z).$$

Отсюда следует существование обобщенных производных $\mathrm{D}_2 u$ и $\mathrm{D}_2 \mathrm{D}_1 u$ с оценками норм

$$\|\mathrm{D}_2 u\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|\mathrm{D}_2 \mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant C^2_\varphi (\varepsilon; \delta; z).$$

□

Список литературы

[BSu] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодического эллиптического дифференциального оператора в полосе*, Алгебра и анализ **16** (2004), №1, 269–292.

[Su2] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.

[LaU] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

[BuCaSu] Bunoiu R., Cardone G., Suslina T., *Spectral approach to homogenization of an elliptic operator periodic in some directions*, Math. Methods Appl. Sci. **34** (2011), no. 9, 1075–1096.

[S-HT] Sanchez-Hubert J., Turbe N., *Ondes élastiques dans une bande périodique*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **20** (1986), no. 3, 539–561.

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петергоф, Ульяновская, 3
Россия
E-mail: N.N.Senik@gmail.com

Поступило 20 сентября 2012 г.