# Цикл работ «Усреднение периодических и локально периодических операторов»

**Никита Н. Сеник**

Теория усреднения изучает поведение решений дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Уравнения такого типа возникают, например, при исследовании различных физических процессов в сильно неоднородных средах. С математической точки зрения удобнее рассматривать семейство задач, которое параметризовано величиной, в исходной постановке характеризующей степень неоднородности среды. Часто оказывается, что чем более неоднородной является среда, тем сильнее протекающий в ней процесс походит на аналогичный процесс в однородной «эффективной» среде. Это выражается в том, что последовательность решений исходного семейства уравнений сходится (в каком-либо смысле) к решению задачи с медленно меняющимися (или даже постоянными) коэффициентами.

Интерес представляет не только доказательство самой сходимости, но и нахождение скорости сходимости. Операторные оценки погрешности позволяют достичь обеих целей сразу: с одной стороны, установить самый сильный тип операторной сходимости, а с другой — определить ее скорость.

Внимание к результатам подобного рода в 2001 году привлекла работа М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной, и с того времени данное направление активно развивается. Задачи усреднения для операторов, коэффициенты которых периодичны по каждой переменной уже достаточно хорошо изучены. Об операторных приближениях и оценках погрешности для более общих задач, в которых коэффициенты периодичны лишь по некоторым переменным или локально периодичны, было известно намного меньше. Именно таким вопросам и посвящен данный цикл работ.

Пусть $\mathcal{A}^\varepsilon$ — матричный дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A^\varepsilon \nabla, \tag{1}$$

действующий из комплексного класса Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ в двойственное к нему пространство $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$. Его коэффициент $A^\varepsilon$ зависит от величины $\varepsilon > 0$, которая играет роль малого параметра, причем предполагается, что сам $\mathcal{A}^\varepsilon$ ограничен и слабо коэрцитивен равномерно по $\varepsilon$ из некоторой окрестности $\mathscr{E}$ нуля, то есть при всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$ и $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ справедливы неравенства

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)^n} \tag{2}$$

и

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^\varepsilon u, u)_{\mathbb{R}^d} \geqslant c_A\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} - C_A\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{3}$$

В таком случае $\mathcal{A}^\varepsilon$ оказывается $m$-секториальным с сектором, который не зависит от параметра $\varepsilon \in \mathscr{E}$. Если $\mu$ находится вне сектора, а $f$ принадлежит

$L_2(\mathbb{R}^d)^n$, то сильно эллиптическая система $\mathcal{A}^\varepsilon u_\varepsilon - \mu u_\varepsilon = f$ имеет единственное решение $u_\varepsilon$. Цель задачи состоит в изучении поведения решения в пределе $\varepsilon \to 0$.

Первая попытка распространить подход Бирмана–Суслиной с полностью периодических на более общие периодические задачи была предпринята вскоре после выхода их статьи 2001 года. Выяснилось, что сам метод для подобных задач не годится, но тем не менее в определенных случаях получить операторные приближения удается. Простейшим примером служит скалярный самосопряженный оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ на плоскости, когда матрица коэффициентов $A^\varepsilon(x) = A(x_1, x_2/\varepsilon)$ периодична вдоль оси $x_2$ и диагональна. Именно он изучался в работе Т. А. Суслиной. В статье [1] скалярный самосопряженный оператор мог включать неограниченные младшие члены. Кроме того, в ней рассматривался также оператор в полосе $\mathbb{R} \times (0, 1)$ с условиями Дирихле или Неймана на границе. Однако диагональность матрицы-функции $A^\varepsilon$ всё еще была нужна.

Отправной точкой исследования стали работы [2] и [3], где был предложен новый подход, позволивший получить различные операторные приближения для резольвенты $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ без искусственных условий на структуру старших коэффициентов. В них изучался периодический (вообще говоря, несамосопряженный) оператор такого же типа, как $\mathcal{A}^\varepsilon$ в (1), но еще и с младшими членами. Коэффициент $A^\varepsilon(x)$ имел вид $A(x_1, x_2/\varepsilon)$, где $x = x_1 \oplus x_2 \in \mathbb{R}^d$, а $A$ — ограниченная функция, липшицевая по первому аргументу и периодическая — по второму. Коэффициенты в младших членах выбирались из классов мультипликаторов между подходящими пространствами Соболева. Было доказано, что $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ сходится в равномерной топологии, и найдено два первых члена в соответствующем приближении:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}, \tag{4}$$

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{5}$$

Кроме того, была получена аппроксимация для $\nabla(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$:

$$\|\nabla(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - \nabla(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \nabla \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{6}$$

Погрешности во всех выписанных приближениях точны по порядку $\varepsilon$ и, вообще говоря, не могут быть улучшены. Оценки (4) и (6) типичны для теории усреднения и были известны в частных случаях. Наиболее тонким же результатом является оценка с корректором $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon$, аналога которому в классической теории нет. Впервые подобный результат был получен М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной для полностью периодических операторов, но используемый ими спектральный метод не позволял отказаться от периодической зависимости хотя бы по одной из переменных.

Для доказательства (4)–(6) был предложен неспектральный подход, основанный на специальных «резольвентных» тождествах. Как и в работах Бирмана–Суслиной, нам было удобно использовать теорию Флоке–Блоха, однако она не играла решающей роли. Это позволило позже, в статье [4], распространить оценки (4)–(6) на локально периодический (также, вообще говоря, несамосопряженный) оператор. Коэффициент $A^\varepsilon$ задавался равенством $A^\varepsilon(x) = A(x, x/\varepsilon)$, в котором $A$ — ограниченная функция, липшицевая по первому аргументу и периодическая — по второму. Поскольку о глобальной периодичности коэффициентов данной задачи даже в каком-либо приближенном смысле говорить не приходится, то ее изучение с технической точки зрения существенно отличалось от периодического случая, хотя и было близко к нему в идейном плане. Так, основу, как и ранее, составляли «резольвентные» тождества.

Липшицевость функции $A(\,\cdot\,, y)$, конечно, не является необходимой для самой постановки задачи: достаточно, например, одной только равномерной непрерывности. Обобщение на локально периодический случай, когда по первой переменной функция $A$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $s \in [0, 1)$, было анонсировано в статье [5]; подробное изложение вошло в кандидатскую диссертацию [6]. Как выяснилось, порядок погрешности зависит от степени гладкости. При $s > 0$ в оценках (4) и (5) он был равен соответственно $\varepsilon^s$ и $\varepsilon^{2s/(2-s)}$:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^s \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}, \tag{7}$$

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \mathcal{C}_\mu^\varepsilon(s) f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^{2s/(2-s)} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{8}$$

Отметим, что корректор в (8) теперь зависит от показателя $s$ и даже в «липшицевом» случае имеет еще более сложный вид, чем «периодический» корректор из (5). Оценка вида (6) с прежним корректором уже не имела места: грубо говоря, гладкость образа корректора $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ в шкале пространств Соболева–Слободецкого повторяет гладкость $A$ в гёльдеровой шкале, и потому композиция $\nabla \mathcal{K}_\mu^\varepsilon$ при $s < 1$ не определена как оператор на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$. Однако если заменить дифференцирование $\nabla$ на дробную производную $\nabla^s = (-\Delta)^{s/2}$ и потребовать, чтобы функция

$$\nabla_x^s A(x, y) = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |h|^{-d-2s} |A(x + h, y) - A(x, y)|^2 \, dh \right)^{1/2}$$

(это аналог производной $\nabla_x A(x, y)$ для «нелипшицевого» случая) была равномерно ограничена, то погрешность в соответствующей оценке окажется порядка $\varepsilon^s$:

$$\|\nabla^s (\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - \nabla^s (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon \nabla^s \mathcal{K}_\mu^\varepsilon f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^s \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{9}$$

Что касается случая $s = 0$, то удалось лишь показать, что $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ и $\nabla^r (\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ при $r \in (0, 1)$ сходятся к $(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}$ и $\nabla^r (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}$.

Дальнейшее исследование связано с более сложными локально периодическими задачами усреднения — в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Допускаются любые «разумные» граничные условия, лишь бы область определения оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ была между $\mathring{H}^1(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$, притом в векторном случае различные компоненты могут отвечать различным условиям. На этой области определения предполагается выполнение, во-первых, оценок вида (2) и (3), а во-вторых, теоремы о повышении гладкости:

$(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}L_2(\Omega)^n \subset H^{1+s}(\Omega)^n$ с некоторым $s\in(0,1]$. Примерами могут служить два крайних случая — сильно эллиптическая задача Дирихле и сильно эллиптическая задача Неймана. Первой из них посвящена заметка [7]. Общий случай рассматривается в работе [8]; кроме того, в ней также доказывается, что

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f\|_{L_p(\Omega)^n} \leqslant C\varepsilon^s\|f\|_{L_p(\Omega)^n}, \tag{10}$$

$$\|\nabla(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-\nabla(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f-\varepsilon\nabla\mathcal{K}^\varepsilon_\mu f\|_{L_p(\Omega)^n} \leqslant C\varepsilon^{s/p}\|f\|_{L_p(\Omega)^n} \tag{11}$$

при всех показателях $p$ из некоторой открытой окрестности 2. Более того, если еще предположить, что по второму аргументу функция $A$ принадлежит пространству $\mathrm{VMO}(\mathbb{R}^d)$, то приближения (10) и (11) окажутся справедливыми при любых $p\in(1,\infty)$.

Если отступить от границы, то анализ подобной задачи во многом похож на то, что было во всём пространстве. Влияние границы существенно проявляется в ее малой окрестности и приводит к появлению так называемого пограничного слоя. Именно из-за этого пограничного слоя ухудшается порядок погрешности в приближении (11) и именно из-за него не удается получить аналог приближения (5) при наличии «нетривиальной» границы.

В заметке [7] был также представлен результат усреднения параболической полугруппы оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$, когда на границе ставится условие Дирихле, а константа $C_A$ из (3) равна нулю. При таких предположениях спектр оператора оказывается правее прямой $\operatorname{Re} z = 2\gamma$, а для $t\geqslant\varepsilon^2$

$$\|e^{-t\mathcal{A}^\varepsilon}\varphi-e^{-t\mathcal{A}^0}\varphi\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant C\varepsilon e^{-\gamma t}t^{-1/2}\|\varphi\|_{L_2(\Omega)^n}, \tag{12}$$

$$\|\nabla e^{-t\mathcal{A}^\varepsilon}\varphi-\nabla e^{-t\mathcal{A}^0}\varphi-\varepsilon\nabla\mathcal{K}^\varepsilon(t)\varphi\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant C\varepsilon^{1/2}e^{-\gamma t}t^{-3/4}\|\varphi\|_{L_2(\Omega)^n}. \tag{13}$$

Доказательство опиралось на связь параболической полугруппы и резольвенты через преобразование Лапласа, которая в контексте полностью периодических задач использовалась в работах Т. А. Суслиной и Ю. М. Мешковой.

## Список литературы


[1] *Сеник Н. Н.* Усреднение периодического эллиптического оператора в полосе при различных граничных условиях // *Алгебра и анализ.* — 2013. — Т. 25, № 4. — С. 182–259.

[2] *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных периодических эллиптических операторов в бесконечном цилиндре // *Функц. анализ и его прил.* — 2016. — Т. 50, № 1. — С. 85–89.

[3] *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder // *SIAM J. Math. Anal.* — 2017. — Vol. 49, no. 2. — Pp. 874–898.

[4] *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators. — 2017. — arXiv: 1703.02023 [math.AP].

[5] *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов // *Функц. анализ и его прил.* — 2017. — Т. 51, № 2. — С. 92–96.

[6] *Сеник Н. Н.* Усреднение периодических и локально периодических эллиптических операторов: дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук: 01.01.03 / Сеник Никита Николаевич; СПбГУ. — СПб, 2018. — 144 с.

[7] *Сеник Н. Н.* Об усреднении локально периодических эллиптических и параболических операторов // *Функц. анализ и его прил.* — 2020. — Т. 54, № 1. — С. 87–92.

[8] *Senik N. N.* Homogenization for locally periodic elliptic problems on a domain. — 2020. — arXiv.