Цикл работ
«Полулинейные уравнениия с дробными лапласианами»

Краевые задачи для полулинейных уравнений являются классическим объектом теории дифференциальных уравнений в частных производных. Вопросы существования или несуществования решений, их качественных свойств привлекают большое внимание исследователей с начала второй половины XX века. В последние несколько десятилетий многократно возрос интерес к нелокальным уравнениям с операторами дробного порядка, важными примерами которых являются дробные лапласианы. Бурное развитие этой области может объясняться многими причинами:

- классические уравнения в частных производных не позволяют описывать взаимодействия нелокальной природы, поэтому для реализации соответствующих математических моделей в физике частиц, биологии, гидрогеологии, химии, финансах и других областях стали использоваться нелокальные операторы;
- дробные лапласианы также возникают в теории случайных процессов как инфинитезимальные генераторы симметричных устойчивых процессов Леви;
- теория становится существенно богаче в случае, когда дискретный параметр (в данном случае – порядок производной) «ложится» на непрерывную шкалу.

Также стоит упомянуть, что в последнее время были разработаны новые методы и техники, позволяющие работать с нелокальными операторами (например, продолжения в пространства более высокой размерности, сводящие нелокальную задачу к локальной задаче в пространстве следов [Caffarelli, Silvestre, 2007], [Stinga, Torrea, 2010], [Warma, 2015]; разнообразные вариационные подходы).

В цикле работ Н.С. Устинова исследуется разрешимость и качественные свойства решений для нелокальных полулинейных уравнений вариационной структуры. Для «локальных» уравнений в частных производных с операторами Лапласа и p-Лапласа в левой части аналогичным вопросам посвящен широкий класс работ (см. [Coffman, 1984], [Li, 1990], [Adimurthi, Mancini, 1991], [Wang, 1991], [Byeon, 1997], [Назаров 2004], [Назаров, Щеглова, 2004], [Ghoussoub, Kang, 2004], [Ghoussoub, Robert, 2006], [Демьянов, Назаров, 2005;2006], [Колоницкий, 2010] и др.). Сложность исследований в нелокальном случае заключается в том, что стандартные «локальные» методы либо не работают, либо требуют нетривиальной модификации.

Большая часть цикла работ (см. [1], [3], [5]) посвящена разрешимости полулинейных задач для спектральных (spectral) дробных лапласианов Дирихле и Неймана с критическим ростом правой части в ограниченных областях. Существование решений в подобных задачах зависит от геометрии области и требует тонкого анализа сходимости минимизирующей последовательности. В рамках доказательства разрешимости с помощью нелокальной версии принципа концентрации–компактности Лионса был существенно развит подход из совместных работ Демьянова и Назарова. Кроме того, для спектрального дробного лапласиана Дирихле был получен новый вариант тождества Похожаева, являющийся краеугольным камнем в доказательстве теоремы несуществования решений для задач в звездных областях.

В работе [2] был изучен так называемый «эффект множественности» положительных решений краевых задач для полулинейных уравнений со спектральным или суженным (restricted) лапласианом Дирихле и докритическим ростом правой части. Для этого был усовершенствован подход Ли, основанный на разделении уровней энергии различных подпространств функций с симметриями. Ключевым инструментом здесь является оценка энергии взаимодействия при разбегании двух «горбов» — локализованных частей решения. Также отметим, что в процессе доказательства в работе была получена разрешимость для задачи в кольце с суперкритическим ростом правой части.

Наконец, в работе [4] для задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана был исследован вопрос о постоянстве решениия с наименьшей энергией (ground state solution). Как и в локальном случае, ответ на этот вопрос зависит от размеров области Ω: существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что в области $\Omega_\varepsilon := \{\varepsilon x \mid x \in \Omega\}$ при $\varepsilon > \varepsilon_0$ решение с минимальной энергией непостоянно, а при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ — постоянно.

Список литературы

[1] Ustinov, N., *The effect of curvature in fractional Hardy-Sobolev inequality involving the spectral Dirichlet Laplacian*, Transactions of the American Mathematical Society, **373** (2020), 7785–7815.

[2] Устинов Н.С., *Множественность решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле и Навье*, Записки научных семинаров ПОМИ, **459** (2017), 104–126.

[3] Устинов Н.С., *О достижимости точных констант в дробных неравенствах Харди–Соболева со спектральным лапласианом Дирихле*, Функциональный анализ и его приложения, **53:4** (2019), 93–98.

[4] Устинов Н.С., *О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка*, Функциональный анализ и его приложения, **54:4** (2020), 85–97.

[5] Устинов Н.С., *О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью*, Алгебра и Анализ, **33:1** (2021), 194 – 212.