

К 85-ЛЕТИЮ ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА

УДК 537.874.6

ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ЗОНЫ

© 2023 г. Е. А. Злобина^{a, *}, А. П. Киселев^{a, b, c}^a Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7-9, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация^b Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191023 Российская Федерация^c Институт проблем машиноведения РАН,
Большой проспект В.О., 61, Санкт-Петербург, 199178 Российская Федерация

*E-mail: ezlobina2@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.03.2023 г.

После доработки 02.03.2023 г.

Принята к публикации 27.03.2023 г.

Построено семейство точных решений двумерного уравнения Гельмгольца, удобных для описания поля в переходных зонах, возникающих при дифракции Френеля. В качестве примеров рассмотрены, помимо дифракции на клине, высокочастотные асимптотики поля в задачах дифракции на контурах с негладкой кривизной.

DOI: 10.31857/S0033849423060190, EDN: XOKFIU

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Понятие о дифракции Френеля, восходящее к началу XIX в., возникло при рассмотрении волнового поля в задаче о падении плоской волны на плоский экран в высокочастотном приближении, т.е. на больших по сравнению с длиной волны расстояниях r от кромки:

$$kr \gg 1, \quad (1)$$

где k — волновое число. В классических работах (см., например, [1, 2]) речь шла об описании слияния плоской волны с дифрагированной кромкой цилиндрической волной в окрестности предельного луча (рис. 1а) — там, где они имеют близкие фазы и физически неразличимы. Математическое описание этого волнового процесса двумерным уравнением Гельмгольца¹ с волновым числом k

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (2)$$

приводит к выражению [2–4]

$$u = \exp(ikx) \Phi(Z) \quad (3)$$

со знаменитым интегралом Френеля

$$\Phi(A) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^A \exp(ip^2) dp. \quad (4)$$

Выражение (3) является точным решением уравнения (2) и, соответственно, дает равномерное по углу φ описание поля (мы пользуемся полярными координатами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$). Аргумент интеграла Френеля в (3) равен корню из разности фаз дифрагированной цилиндрической волны kr , расходящейся из начала координат, и падающей волны kx :

$$Z = \sqrt{kr - kx} = \sqrt{2kr} \sin(\varphi/2). \quad (5)$$

В переходной зоне вокруг предельного луча, которая описывается неравенством

$$kr\varphi^4 \ll 1, \quad (6)$$

эти волны сливаются. В переходной зоне разность их фаз имеет вид $k(r - x) = kr\varphi^2/2 + O(kr\varphi^4)$, и поэтому допустимо часто используемое приближение

$$Z \approx z = \sqrt{kr/2} \varphi, \quad (7)$$

дающее удобную неравномерную асимптотику поля вблизи предельного луча. При удалении от предельного луча, в области, где $|z| \gg 1$, т.е.

$$kr\varphi^2 \gg 1, \quad (8)$$

интеграл Френеля допускает асимптотическое представление (см., например, [3]). Ниже пре-

¹ При интерпретации математических выражений для волновых полей предполагается их гармоническая зависимость от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, где t — время, ω — круговая частота.

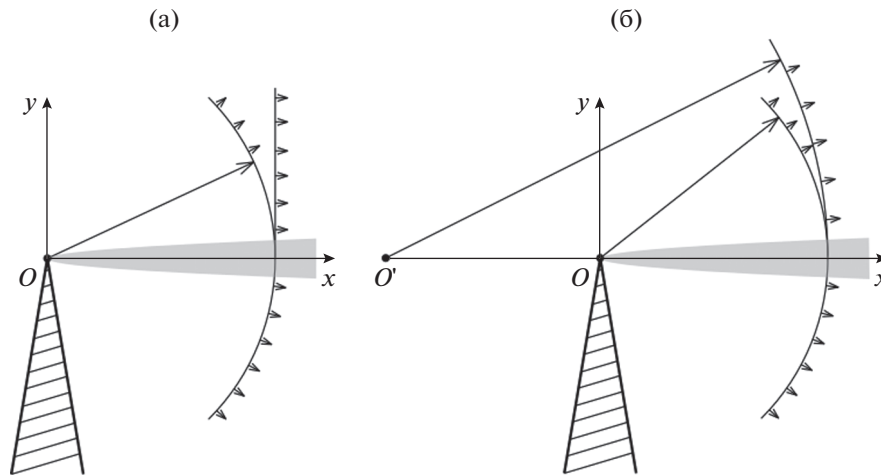


Рис. 1. Дифракция на клине плоской волны (а) и цилиндрической волны (б).

дельного луча, при больших отрицательных значениях z , асимптотика выражения (3) описывает дифрагированную цилиндрическую волну, расходящуюся из начала координат,

$$u \approx A(\varphi, k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}. \quad (9)$$

Здесь A — диаграмма направленности (а по терминологии геометрической теории дифракции [3] — дифракционный коэффициент), имеющая при малых φ вид

$$A(\varphi, k) \approx -\frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}\varphi}. \quad (10)$$

Выше предельного луча, при больших положительных z , формула (3) описывает сложение ди-

фрагированной волны с падающей плоской волной (см. рис. 1):

$$u \approx \exp(ikx) - \frac{\exp(ikr + i\pi/4)}{2\sqrt{\pi kr}\varphi}. \quad (11)$$

Диаграмма волны (9) имеет особенность при $\varphi \rightarrow 0$, из чего следует ее непригодность вблизи предельного луча и необходимость описания волнового поля специальной функцией.

Дифракционный процесс слияния плоской волны с цилиндрической волной, имеющей диаграмму со степенной особенностью вида $A \sim \varphi^\nu$ вблизи предельного луча, мы называем френелевским. Общее описание такого процесса дано Цепелевым [5], который путем разделения переменных в параболических координатах² построил семейство точных решений уравнения Гельмгольца (2):

$$u = CD_{-\nu-1} \left(2\sqrt{kr} \cos \frac{\varphi}{2} \exp \left(-i\frac{\pi}{4} \right) \right) D_\nu \left(2\sqrt{kr} \sin \frac{\varphi}{2} \exp \left(-i\frac{\pi}{4} \right) \right), \quad (12)$$

где D_ν — функция параболического цилиндра [6], C — произвольная постоянная.

Поскольку имеют место соотношения

$$D_0(\sqrt{2Z} \exp(-i\pi/4)) = \exp(iZ^2/2) \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} D_{-1}(\sqrt{2Z} \exp(-i\pi/4)) &= \\ &= \sqrt{2\pi} \exp(-i\pi/4) \exp(-iZ^2/2) \Phi(-Z) \end{aligned} \quad (14)$$

(см. [6]), выражение (3) является частным случаем (12). Решение из семейства (12) со значком ν описывает слияние распространяющейся в области $y > 0$ волны с фазой kx и амплитудой, про-

порциональной $\varphi^{-\nu-1}$, и цилиндрической волны с диаграммой, имеющей на предельном луче особенность φ^ν . Конкретные задачи, в которых такие дифракционные коэффициенты возникают, — это задача о боковой (головной) волне ($\nu = -3/2$, [5]), дифракция на конусе ($\nu = -3/2$, [7]), а также дифракция на клине ($\nu = -1$, [3, 8, 9]) и на границе с различными особенностями кривизны ($\nu \leq -1$, [10–17]).

² Параболические координаты полезны в этих вопросах, поскольку в области (1), (6) разность фаз $kr - kx$ можно считать постоянной на параболах $x = Cy^2$.

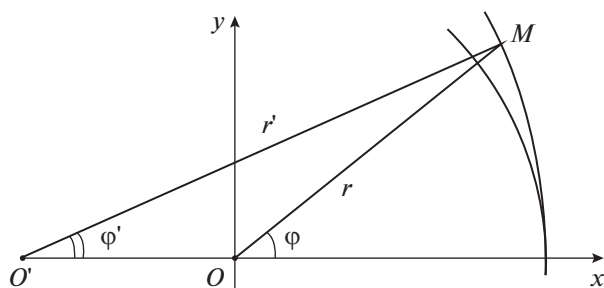


Рис. 2. Слияние двух цилиндрических волн.

Однако в ряде задач, в частности в задачах последнего типа, ни одна из сливающихся вблизи предельного луча волн — ни геометрически отраженная, ни дифрагированная — не может с достаточной точностью рассматриваться как плоская, поэтому необходимо более детальное описание и учет кривизны их фронтов. При этом естественным образом возникает вопрос об асимптотическом описании процесса слияния двух цилиндрических волн, причем одна из них (дифрагированная) присутствует по обе стороны от предельного луча, а другая (отраженная от гладкого участка границы) — только с одной стороны.

Для рассмотренной в ряде учебников [3, 8, 9] задачи дифракции цилиндрической волны на кромке клина, обобщающей упомянутую выше классическую задачу Френеля, простого равномерного по углу описания дифракционного поля нет. При естественном для дифракции Френеля предположении, что расстояние r_0 от источника до вершины клина O велико —

$$kr_0 \gg 1, \quad (15)$$

равно как и расстояние r от кромки до точки наблюдения (1), слияние падающей цилиндрической волны от точечного источника с единичной амплитудой и дифрагированной цилиндрической волны, расходящейся из O , описывается выражением

$$u \approx \frac{\exp(ikr_0 + i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi\sqrt{k}r_0}} \exp(ikr - i\zeta^2) \Phi(\zeta), \quad (16)$$

где

$$\zeta = \sqrt{k\rho/2} \varphi, \quad \rho = r_0 r / (r_0 + r), \quad (17)$$

см., например, в [8], в менее удобном виде — в [9]. Формула (16) получена в предположении, что выполнено неравенство (6). Похожее выражение встречалось и в других дифракционных задачах [12, 16–18]. Отметим, что при удалении источника на бесконечность вдоль оси x , т.е. при $r_0 \rightarrow \infty$, выражение для ζ (17) переходит в z (7), а формула (16) — в (3).

Следует отметить, что термин дифракция Френеля распространился и на задачи с другой структу-

рой дифракционного поля, в частности, на случай гладкого выпуклого препятствия [19], где не возникает дифрагированной цилиндрической волны, однако выражения, аналогичные (3), в описании поля присутствуют. Выражения с интегралом Френеля (4) присутствуют и в задачах об угловых и краевых катастрофах, где изучаются падающие поля, более сложные, чем плоские и цилиндрические волны (например, [20, 21]). Мы придерживаемся в данной работе более классического понимания термина “дифракция Френеля”, имея в виду слияние цилиндрических волн, одна из которых имеет гладкую диаграмму направленности, а другая — диаграмму со степенной особенностью на предельном луче.

Цель данной работы — дать общее простое выражение для поля в переходных зонах френелевского типа. Для этого мы представим семейство точных решений уравнения Гельмгольца (2), удобных для описания слияния двух расходящихся цилиндрических волн, одна из которых присутствует лишь с одной стороны от предельного луча, а другая — с обеих. Наши построения основаны на разделении переменных в эллиптической системе координат, которая вводится так, чтобы цилиндрические волны расходились из ее фокусов.

В данной работе показано, что функции построенного семейства описывают френелевские волновые поля в ряде двумерных задачах дифракции на негладких контурах. Помимо классической дифракции цилиндрической волны на клине, к ним относятся задачи дифракции на контурах с негладкой кривизной. Условия, позволяющие приблизить в окрестности предельного луча отраженную волну цилиндрической волной (9), приводят к ограничениям на ширину переходной зоны. В частности, для контура со скачком кривизны переходная зона характеризуется неравенством [16]

$$kr\varphi^3 \ll 1. \quad (18)$$

2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ФРЕНЕЛЕВСКОГО ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА

Поместим источники цилиндрических волн в точки $O = (0, 0)$ и $O' = (-2a, 0)$ (рис. 2), причем волна из точки O' распространяется только в области $y > 0$, а значения фаз волн в точке O равны. Предельный луч, вблизи которого волны сливаются, в таком случае совпадает с положительной полуосью x .

Расстояние $2a$ между источниками считается большим по сравнению с длиной волны:

$$ka \gg 1. \quad (19)$$

Условие (19) (ср. (15)) отвечает типичному для классической теории дифракции предположению,

что расстояние от препятствия до источника падающей волны много больше длины волны.

Нас интересует поле во *френелевской переходной зоне*, окружающей предельный луч, где угол φ мал, а расстояние r от точки наблюдения M до O велико (1) (см. рис. 2). Отметим, что отсюда немедленно следует малость φ' , а также неравенство $kr' \gg 1$, см. (1), (19).

2.1. Эллиптические координаты

Для описания поля будем использовать эллиптическую систему координат (ξ, η) :

$$\begin{aligned} x + a &= a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \\ 0 \leq \xi, \quad -\pi < \eta \leq \pi, \end{aligned} \quad (20)$$

с фокусами в точках O и O' (см. рис. 2). Координатные линии $\eta = \text{const}$ — гиперболы с фокусами в O и O' , и вблизи оси x примерно параллельны ей³. Значение $\eta = 0$ соответствует оси x . Линии $\xi = \text{const}$ образуют семейство эллипсов с теми же фокусами, и вблизи оси x идут поперек нее.

В дальнейшем будем помещать фокусы эллиптической системы координат в источники двух цилиндрических волн, которые будут сливаться вблизи положительной полуоси x , т.е. в области, где η мало, а ξ положительно.

Из (20) немедленно следует, что расстояния r и r' от точки M до фокусов O и O' (см. рис. 2) равны соответственно

$$r = a(\operatorname{ch} \xi - \cos \eta), \quad r' = a(\operatorname{ch} \xi + \cos \eta). \quad (21)$$

Из (21) для малых значений η получаем

$$\eta = \sqrt{\frac{2a + r - r'}{a}} \left(1 + O\left(\frac{2a + r - r'}{a}\right) \right). \quad (22)$$

Из рассмотрения треугольника OMO' , следует, что

$$\begin{aligned} r' &= 2a + r - \frac{ar}{2a + r} \varphi^2 (1 + O(\varphi^2)), \\ r &= r' - 2a + \frac{ar'}{r' - 2a} (\varphi')^2 (1 + O((\varphi')^2)), \end{aligned} \quad (23)$$

и (22) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{r}{r + 2a}} \varphi (1 + O(\varphi^2)) = \\ &= \sqrt{\frac{r'}{r' - 2a}} \varphi' (1 + O((\varphi')^2)). \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что $r + 2a$ и $r' - 2a$ можно заменить на r' и r соответственно с точностью до $O(2ar\varphi^2/r')$.

³ Вдоль этих линий разность фаз двух волн постоянна, $r' - r = \text{const}$.

Кроме того, есть более симметричное выражение $\eta \approx \sqrt{rr'}(\varphi - \varphi')/2a$.

2.2. Семейство точных решений

Записав уравнение Гельмгольца (2) в эллиптических координатах (20) (см., например, [4]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 a^2 (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) u = 0, \quad (25)$$

будем решать его методом разделения переменных. Положим $u(\xi, \eta) = P(\xi)Q(\eta)$, тогда функции P и Q удовлетворяют уравнениям

$$P''(\xi) + (k^2 a^2 \operatorname{sh}^2 \xi - \lambda) P(\xi) = 0, \quad (26)$$

$$Q''(\eta) + (k^2 a^2 \sin^2 \eta + \lambda) Q(\eta) = 0, \quad (27)$$

с комплексным параметром разделения λ , которые элементарными преобразованиями могут быть сведены к уравнению Матье (см., например, [6]), теория которого нам не потребуется.

Наша цель — описать высокочастотное поле в окрестности предельного луча не слишком близко к O , а именно в области, где выполнены условия (19) и $\varphi \ll 1$, т.е.

$$\eta \ll 1, \quad \xi \gg 1/\sqrt{ka}, \quad (28)$$

см. (21). Для этого построим асимптотики решений уравнения (26) при положительных не слишком малых ξ и уравнения (27) при малых η любого знака. Нас интересуют только параметры разделения вида

$$\lambda = -ika(2v + 1), \quad v < 0. \quad (29)$$

Именно отрицательные v , как мы увидим ниже, возникают при описании френелевских переходных зон. Соответствующее решение уравнения (25) обозначим

$$u_v(\xi, \eta) = P_v(\xi)Q_v(\eta). \quad (30)$$

2.3. Асимптотика решения уравнения (26)

Найдем асимптотику решения (26), отвечающего уходящей волне, в приближении (19). С помощью стандартного метода Вентцеля—Крамерса—Бриллюэнна (см., например, [4]), с точностью до произвольного постоянного множителя получим

$$\begin{aligned} P_v(\xi) &= \frac{\exp\left(ika \int_{\xi}^{\infty} \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + i(2v + 1)/ka} dt\right)}{\sqrt[4]{\operatorname{sh}^2 \xi + i(2v + 1)/ka}} \times \\ &\times \left(1 + O\left(\frac{1}{ka}\right)\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь учтено выражение для параметра разделения (29). В области (28), очевидно, выполнено неравенство $kash^2\xi \gg 1$. Используя его, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi \sqrt{\text{sh}^2 t + i \frac{2v+1}{ka}} dt = \\ & = \int_0^\xi \left(\text{sh} t + i \frac{2v+1}{2kash t} + O\left(\frac{1}{(ka)^2 \text{sh}^3 t}\right) \right) dt = \\ & = \text{ch} \xi + i \frac{2v+1}{4ka} \ln \frac{\text{ch} \xi - 1}{\text{ch} \xi + 1} + O\left(\frac{1}{(ka)^2 (\text{ch} \xi - 1)}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), находим

$$\begin{aligned} P_v(\xi) &= \frac{\exp\left(ikach\xi - \frac{2v+1}{4} \ln \frac{\text{ch} \xi - 1}{\text{ch} \xi + 1}\right)}{\sqrt[4]{\text{ch}^2 \xi - 1}} \times \\ & \times \left(1 + O\left(\frac{1}{ka(\text{ch} \xi - 1)}\right)\right) = \\ & = \frac{(\text{ch} \xi + 1)^{\frac{v}{v+1}}}{(\text{ch} \xi - 1)^{\frac{v}{2}}} \exp(ikach\xi) \times \\ & \times \left(1 + O\left(\frac{1}{ka(\text{ch} \xi - 1)}\right)\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Поправочные члены малы в области, где выполнено неравенство (1), см. (19) и (21).

2.4. Асимптотика решения уравнения (27)

Преобразуем уравнение (27) при малых η , разложив $\sin \eta$ по степеням η :

$$\begin{aligned} Q_v''(\eta) + (k^2 a^2 \eta^2 - ika(2v+1))Q_v(\eta) &= \\ &= O(k^2 a^2 \eta^4 Q_v(\eta)). \end{aligned} \quad (34)$$

Сделав замену переменной

$$H = \sqrt{2ka} \eta \exp(-i\pi/4), \quad (35)$$

придем к уравнению

$$Q_v''(H) + \left(v + \frac{1}{2} - \frac{H^2}{4}\right)Q_v(H) = O\left(\frac{H^4}{ka}\right)Q_v(H). \quad (36)$$

Таким образом, в области, где H (и, соответственно, η) достаточно мало, одно из решений уравнения (36) асимптотически совпадает с функцией параболического цилиндра D_v [6]:

$$Q_v(H) \approx D_v(-H). \quad (37)$$

Можно показать [22], что соответствующая область характеризуется неравенством $ka|\eta|^\mu \ll 1$, $\mu = 2 + 4/(1 - 3v)$ (для отрицательных значений v , рассматриваемых нами, $\mu > 2$).

2.5. Геометрооптическая интерпретация асимптотики функции (30)

Для отвечающего уходящей волне решения (30) уравнения (25) с $v < 0$ из формул (33) и (37) вытекает следующее асимптотическое выражение вблизи предельного луча:

$$u_v(\xi, \eta) \approx C \frac{(\text{ch} \xi + 1)^{\frac{v}{v+1}}}{(\text{ch} \xi - 1)^{\frac{v}{2}}} \exp(ikach\xi) D_v(-H). \quad (38)$$

Здесь H определено в (35), C — произвольная постоянная. Представление (38) пригодно в области, где выполнены неравенства (1) и

$$kr|\phi|^\mu \ll 1, \quad \text{где } \mu = 2 + \frac{4}{1 - 3v}. \quad (39)$$

Отметим, что чем больше модуль v , тем уже область, описываемая (39). Тем не менее, при каждом $v < 0$ аргумент функции параболического цилиндра H может принимать там большие значения.

Обсудим геометрический смысл величин, входящих в (38). С помощью соотношений (21) и (24) множитель перед экспонентой выражается через расстояния r и r' до фокусов O и O' — источников цилиндрических волн:

$$\begin{aligned} \frac{(\text{ch} \xi + 1)^{\frac{v}{v+1}}}{(\text{ch} \xi - 1)^{\frac{v}{2}}} &= \sqrt{\frac{a}{r}} \left(\frac{r+2a}{r}\right)^{\frac{v}{2}} \left(1 + O\left(\frac{r\phi^2}{r+2a}\right)\right) = \\ &= \sqrt{\frac{a}{r'}} \left(\frac{r'}{r'-2a}\right)^{\frac{v+1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{r'(\phi')^2}{r'-2a}\right)\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Показатель экспоненты в (38) с помощью соотношений (21) и (35) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} ikach\xi &= ika + ikr + \frac{H^2}{4} + O\left(\frac{H^4}{ka}\right) = \\ &= -ika + ikr' - \frac{H^2}{4} + O\left(\frac{H^4}{ka}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Теперь рассмотрим аргумент функции параболического цилиндра. Из соотношений (35) и (22) вытекает, что

$$H \approx \sqrt{2k(2a + r - r')} \exp(-i\pi/4), \quad (42)$$

т.е. H выражается через разность значений фаз цилиндрических волн, расходящихся из O и O' . С

помощью соотношения (24) получим еще два представления:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\frac{2kar}{r+2a}} \varphi \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{r\varphi^2}{r+2a}\right)\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2kar'}{r'-2a}} \varphi' \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{r'(\varphi')^2}{r'-2a}\right)\right). \end{aligned} \quad (43)$$

В результате можно записать (38) в геометрических терминах:

$$\begin{aligned} u_v &\approx C \sqrt{\frac{a}{r}} \left(\frac{r+2a}{r}\right)^{\frac{v}{2}} \exp\left(ik\left(r+a - \frac{ar\varphi^2}{2(r+2a)}\right)\right) \times \\ &\quad \times D_v\left(-\sqrt{\frac{2kar}{r+2a}} \varphi \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx \\ &\approx C \sqrt{\frac{a}{r'}} \left(\frac{r'}{r'-2a}\right)^{\frac{v+1}{2}} \exp\left(ik\left(r'-a + \frac{ar'(\varphi')^2}{2(r'-2a)}\right)\right) \times \\ &\quad \times D_v\left(-\sqrt{\frac{2kar'}{r'-2a}} \varphi' \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned} \quad (44)$$

В той части переходной зоны (1), (39), где аргумент функции D_v велик, заменим ее в (38) асимптотикой [6]. Ниже предельного луча, при $\varphi < 0$, имеем одну цилиндрическую волну:

$$u_v \approx A_v(\varphi; k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}, \quad (45)$$

а выше, при $\varphi > 0$ — две:

$$u_v \approx A_v(\varphi; k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} + A'_v(\varphi'; k) \frac{\exp(ikr')}{\sqrt{kr'}}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} A_v(\varphi; k) &= 2^{\frac{v}{2}} C (ka)^{\frac{v+1}{2}} \varphi^v \exp\left(ika - i\frac{\pi v}{4}\right), \\ A'_v(\varphi'; k) &= -C \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-v)} \frac{(\varphi')^{-v-1}}{(2ka)^{\frac{v}{2}}} \times \\ &\quad \times \exp\left(-ika + i\frac{\pi(5v+1)}{4}\right). \end{aligned} \quad (47)$$

Выражение (45) и совпадающее с ним первое слагаемое в (46) описывают цилиндрическую волну, расходящуюся из точки O . Второе слагаемое в (46) отвечает цилиндрической волне, расходящейся из точки O' . Отметим, что чем сингулярнее диаграмма цилиндрической волны на предельном луче, тем уже область (39) пригодности выражения (38).

Рассмотрим приложение полученных результатов в конкретных дифракционных задачах.

3. ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ

Убедимся, что выражение (38) с $v = -1$ описывает процесс слияния падающей цилиндрической и дифрагированной цилиндрической волн в классической двумерной задаче дифракции на клине. Действительно, вследствие формулы (14) выражение (38) совпадает с известным (16) (например, [3, 8, 9]) при надлежащем выборе постоянного множителя. А именно, следует принять

$$C = \exp(ikr_0/2 + i\pi/4)/2\pi\sqrt{2kr_0}. \quad (48)$$

Асимптотика выбранной функции (38) при условии (8) ниже предельного луча имеет вид (45), а выше предельного луча — (46), где расходящаяся из точки O' волна отвечает падающей волне, а расходящаяся из O — дифрагированной волне. Их диаграммы при малых φ имеют следующие выражения:

$$A_{\text{пад}} = \frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi}}, \quad A_{\text{диф}} = \frac{i}{4\pi\varphi} \frac{\exp(ikr_0)}{\sqrt{kr_0}}. \quad (49)$$

Заметим, что неравенство (39) при $v = -1$ сводится к (18) и описывает более узкую область, чем (6). Это связано с тем, что простые оценки [22], приводящие к условию (39), не являются предельно точными.

4. ДИФРАКЦИЯ НА КОНТУРАХ С НЕГЛАДКОЙ КРИВИЗНОЙ

4.1. Предварительные замечания

В этом разделе мы убедимся в том, что построенные выше решения встречаются в ряде двумерных задач дифракции коротких волн на контурах, кривизна которых гладкая всюду, за исключением одной точки O , где имеет скачок или более слабую особенность.

Пусть падающая волна $u^{\text{пад}}$ — цилиндрическая, расходящаяся из точки M_0 , расположенной на расстоянии r_0 от точки O , приходит в O некасательно — под углом скольжения $\varphi_0 > 0$ (рис. 3). Начало координат поместим в точку O , а ось x направим вдоль предельного (геометрически отраженного в O) луча. Положение точки наблюдения M будем характеризовать расстоянием r до точки O и углом φ между осью x и направлением на точку M .

Начнем с качественного обсуждения волнового процесса. Уходящее волновое поле u^{yx} вдали от предельного луча складывается из волны, дифрагированной точкой негладкости $u^{\text{диф}}$, и волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$, геометрически отраженных от гладких частей контура слева и справа от O :

$$u^{\text{yx}}(M) = u^{\text{диф}}(M) + u_{\pm}^{\text{отр}}(M). \quad (50)$$

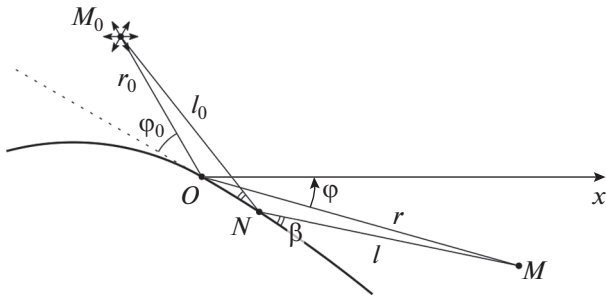


Рис. 3. Дифракция на контуре с негладкой кривизной.

Знак “–” отвечает точкам наблюдения M , лежащим выше, а “+” – ниже предельного луча.

В области, где выполнено неравенство (8), дифрагированная волна представляет собой цилиндрическую волну (9), расходящуюся из точки O . Ее диаграмма, как известно [11–17], имеет на предельном луче степенную сингулярность по углу.

Выражения для геометрически отраженных от гладких частей контура волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$ в случае некасательного падения можно найти лучевым методом (например, [23]). Они имеют вид

$$u_{\pm}^{\text{отр}}(M) = \mathcal{C} \frac{\exp(ik\tau + i\pi/4)}{\sqrt{k\mathcal{F}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k\mathcal{F}}\right)\right), \quad (51)$$

$$\mathcal{F} = l_0 + l + \frac{2\mathfrak{a}l_0l}{\sin\beta}.$$

Здесь l_0 и l – расстояния от точки источника M_0 и от точки наблюдения M до точки геометрического отражения N соответственно; $\tau = l_0 + l$ – значение эйконала (геометрического времени пробега) в точке M ; \mathcal{F} – геометрическое расхождение лучей, β – угол скольжения, \mathfrak{a} – значение кривизны в точке N (см. рис. 3). Наконец, \mathcal{C} зависит от интенсивности и диаграммы направленности источника падающей на контур цилиндрической волны, а также от граничного условия на контуре. Для ненаправленного источника единичной амплитуды и условия Дирихле $\mathcal{C} = -1/2\sqrt{2\pi}$ [23].

На предельном луче фазы геометрически отраженных волн и дифрагированной волны совпадают, что позволяет говорить о слиянии этих волн и возникновении френелевской переходной зоны. Если кривизна контура терпит в O скачок, то выражение (51), очевидно, терпит разрыв на предельном луче и пригодно лишь на некотором удалении от него. Вблизи предельного луча, в переходной зоне, поле должно описываться соответствующей специальной функцией, сглаживающей и эту особенность, и сингулярность дифрагированной волны. Поскольку, как и в случае дифракции на клине, геометрооптическое поле терпит на предельном луче разрыв, естественно, что здесь возникает ин-

теграл Френеля. Однако, в отличие от классической задачи, геометрооптическое поле ненулевое с обеих сторон от предельного луча, и описание его слияния с дифрагированной волной требует двух интегралов Френеля от разных аргументов [10, 12, 16].

В случае же более гладкой кривизны контура выражение (51) непрерывно и описывает геометрически отраженное поле в главном порядке, а френелевское поле представляет собой поправку к нему и описывается функцией параболического цилиндра со значком $\nu < -1$ [14, 15, 17].

4.2. Дифракция на контуре со скачком кривизны

Рассмотрим контур, у которого кривизна \mathfrak{a} в точке O имеет скачок:

$$\mathfrak{a} = \begin{cases} \mathfrak{a}_- & \text{слева от } O, \\ \mathfrak{a}_+ & \text{справа от } O, \end{cases} \quad (52)$$

причем $[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}_+ - \mathfrak{a}_- \neq 0$ может быть любого знака. Здесь и далее падающая волна приходит в точку O некасательно.

В [16] в рамках метода Кирхгофа получено следующее выражение для поля в переходной зоне на умеренных расстояниях $\mathfrak{a}_{\pm}r \lesssim 1$ от O :

$$u^{\text{yx}} = \mathcal{C} \frac{\exp(ik(r_0 + r) + i\pi/4)}{\sqrt{k(r_0 + r)}} \times$$

$$\times \left(\frac{\exp(-i\zeta^2/J_+)}{\sqrt{J_+}} \Phi\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{J_+}}\right) + \right. \quad (53)$$

$$\left. + \frac{\exp(-i\zeta^2/J_-)}{\sqrt{J_-}} \Phi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{J_-}}\right) \right),$$

где Φ – интеграл Френеля (4), величина ζ определена в (17),

$$J_{\pm} = 1 + \frac{2\mathfrak{a}_{\pm}r_0}{\sin\phi_0}, \quad (54)$$

а \mathcal{C} – та же постоянная, что и в (51). Область пригодности формулы (53) описывается неравенствами (1) и (18) – они обеспечивают сшивание асимптотики (53) с лучевыми формулами (51) для волн, геометрически отраженных от гладких частей контура.

Покажем, что выражение (53) переписывается через функции построенного нами семейства (38). Введем величину

$$2a_{\pm} = \frac{r_0}{1 + 2\mathfrak{a}_{\pm}r_0/\sin\phi_0}, \quad (55)$$

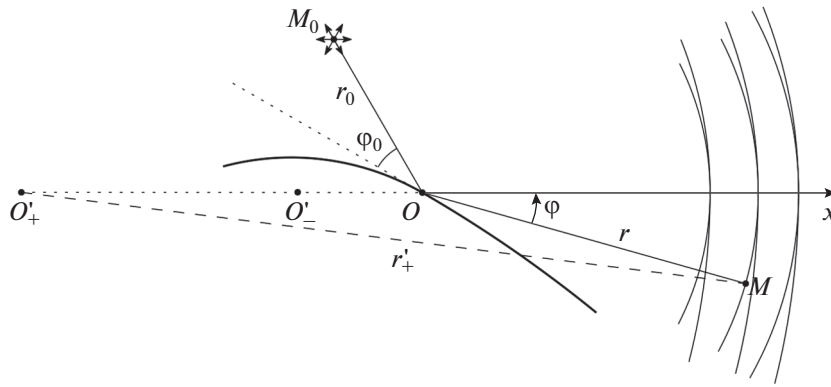


Рис. 4. Дифракция на скачке кривизны.

геометрическую интерпретацию которой дадим ниже. Тогда

$$\frac{\zeta^2}{J_{\pm}} = \frac{krr_0\varphi^2}{2(r_0 + r(1 + 2\alpha_{\pm}r_0/\sin\varphi_0))} = \frac{ka_{\pm}r\varphi^2}{r + 2a_{\pm}}, \quad (56)$$

и с учетом формулы (14) выражение (53) принимает вид суммы двух функций семейства (38) с $v = -1$:

$$u^{yx} = U_+ + U_-, \quad (57)$$

где

$$U_{\pm} = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{kr_0}} \sqrt{\frac{a_{\pm}}{r + 2a_{\pm}}} \times \exp\left(ik\left(r + r_0 - \frac{a_{\pm}r\varphi^2}{2(r + 2a_{\pm})}\right) + i\frac{\pi}{4}\right) \times D_{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{2ka_{\pm}r}{r + 2a_{\pm}}} \varphi \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (58)$$

Таким образом, найденная в рамках метода Кирхгофа [16] формула укладывается в построенную теорию. Заметим, что неравенство (39) при $v = -1$ совпадает с неравенством (18).

Поясним геометрический смысл величин (55). В переходной области, где выполнено неравенство (18), выражения для отраженных волн (51) аппроксимируются цилиндрическими волнами (9), исходящими из точек O'_{\pm} , лежащих на продолжении предельного луча на расстояниях $2a_{\pm}$ от точки O (рис. 4). Действительно, в [16] показано, что лучевые выражения (51) для геометрически отраженных волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$ при условии (18) преобразуются к виду

$$u_{\pm}^{\text{отр}} \approx \mathcal{C} \frac{\exp\left(ik\left(r + r_0 - \rho^2\varphi^2/2J_{\pm}\right) + i\pi/4\right)}{\sqrt{kJ_{\pm}(r + r_0)}}, \quad (59)$$

$$J_{\pm} = 1 + \frac{2\alpha_{\pm}\rho}{\sin\varphi_0},$$

где величина ρ определена в (17). Расстояния r'_{\pm} от O'_{\pm} до точки наблюдения M равны соответственно

$$r'_{\pm} = \sqrt{r^2 + 4a_{\pm}^2 + 2a_{\pm}r\cos\varphi} = 2a_{\pm} + r - \frac{\rho}{2J_{\pm}}\varphi^2 + O\left(\frac{\rho}{J_{\pm}}\varphi^4\right). \quad (60)$$

Легко видеть, что, с точностью до малых членов, величины kr'_{\pm} отличаются от фаз соответствующих экспонент в (59) лишь на постоянное слагаемое $r_0 - 2\alpha_{\pm}$, а выражение в знаменателе (59) переписывается в виде $J_{\pm}(r_0 + r) \approx r_0 r'_{\pm}/2a_{\pm}$. Таким образом, в переходной зоне (18) формулы (59) для геометрически отраженных волн $u_{\pm}^{\text{отр}}$ преобразуются к виду (9):

$$u_{\pm}^{\text{отр}} \approx A_{\pm}^{\text{отр}} \frac{\exp(ikr'_{\pm})}{\sqrt{kr'_{\pm}}}, \quad (61)$$

$$A_{\pm}^{\text{отр}} = \mathcal{C} \sqrt{\frac{2a_{\pm}}{r_0}} \exp\left(ik(r_0 - 2a_{\pm}) + i\frac{\pi}{4}\right).$$

В [16] показано, что на малых расстояниях $\alpha_{\pm}r \ll 1$ аргументы интегралов Френеля в формуле (53) становятся близки и в результате поле аппроксимируется выражением, содержащим одну функцию параболического цилиндра $D_{-3}(\sqrt{2}\zeta \exp(i\pi/4))$. Отметим, что это выражение также является частным случаем формулы (38).

4.3. Дифракция на контуре с "гельдеровской" сингулярностью кривизны

Теперь рассмотрим контур, кривизна которого в точке O имеет особенность вида

$$\alpha(s) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{при } s \leq 0, \\ \alpha_0 + hs^{\lambda} & \text{при } s > 0, \end{cases} \quad 0 < \lambda < 1. \quad (62)$$

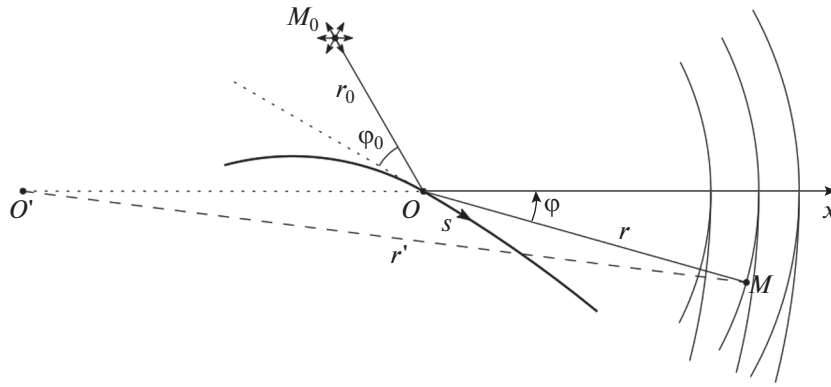


Рис. 5. Дифракция на контуре с “гельдеровской” сингулярностью кривизны.

Здесь s — длина дуги контура, отсчитываемая от точки негладкости O в направлении оси x (рис. 5), а φ_0 и $h \neq 0$ — константы, причем h может быть любого знака. В [14] такая особенность названа “гельдеровской” сингулярностью. Как и раньше, падающая волна приходит в сингулярную точку контура некасательно.

В [17] с помощью метода Кирхгофа получена асимптотика для уходящего поля вблизи предельного луча на умеренных расстояниях $\varphi_0 r \leq 1$ от O . В главном порядке поле дается выражением (51), которое непрерывно, но не гладко на предельном луче, и имеет вид

$$u_0^{yx} = \mathcal{C} \frac{\exp(ik(r+r_0) - i\zeta^2/J + i\pi/4)}{\sqrt{kJ(r+r_0)}}, \quad (63)$$

$$J = 1 + \frac{2\varphi_0 \rho}{\sin \varphi_0},$$

а эффект от “гельдеровской” сингулярности носит поправочный характер и описывается выражением

$$u_h^{yx} = -h \mathcal{C} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\lambda) \exp(i\lambda\pi/4)}{(\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \frac{\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}} J^{1+\frac{\lambda}{2}}} \times$$

$$\times \frac{\exp(ik(r_0+r_1) - i\zeta^2/2J + i\pi/4)}{\sqrt{kJ(r_0+r_1)}} \times$$

$$\times D_{-3-\lambda} \left(\sqrt{\frac{2}{J}} \zeta \exp(-i\pi/4) \right). \quad (64)$$

Здесь величина ζ определена в формуле (17). Асимптотика (63), (64) для поля применима в области, где выполнены неравенства (1), (18) и

$$kh(r|\varphi|)^{2+\lambda} \ll 1, \quad (65)$$

обеспечивающие сшивание с лучевой формулой для отраженной волны.

Покажем, что функция (64) принадлежит семейству (38). Действительно, если принять

$$2a = \frac{r_0}{1 + 2\varphi_0 r_0 / \sin \varphi_0}, \quad (66)$$

то (64) переписывается в виде

$$u_h^{yx} = -h \mathcal{C} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\lambda) \exp(i\pi(1+\lambda)/4)}{(\sqrt{k} \sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{r_0 r}} \left(\frac{2ar}{r+2a} \right)^{\frac{3+\lambda}{2}} \exp \left(ik \left(r + r_0 - \frac{ar\varphi^2}{2(r+2a)} \right) \right) \times$$

$$\times D_{-3-\lambda} \left(\sqrt{\frac{2kar}{r+2a}} \varphi \exp(-i\pi/4) \right). \quad (67)$$

Поясним геометрический смысл величины (66). В [17] проведено асимптотическое упрощение лучевой формулы (51) для отраженной волны в области (8), (18) и (65). Установлено, что в главном порядке отраженное поле описывается выражением (63), а влияние на него “гельдеровской” сингулярности является поправкой. Оно проявляется только ниже предельного луча, при $\varphi < 0$, и имеет вид

$$u_h^{\text{отр}} = -\mathcal{C} \frac{2kh\rho^{2+\lambda} (-\varphi)^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)J^{2+\lambda} (\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \times$$

$$\times \frac{\exp(ik(r+r_0 - \rho\varphi^2/2J) - i\pi/4)}{\sqrt{kJ(r+r_0)}}. \quad (68)$$

В области своей применимости выражение (68) допускает аппроксимацию цилиндрической волной, которая расходится из точки O' , расположенной на продолжении предельного луча на расстоянии $2a$ от точки O (см. рис. 5). Действительно, расстояние от O' до точки O наблюдения записывается совершенно аналогично (60) и отличается от фазы

экспоненты в (68) лишь на постоянное слагаемое $r_0 - 2a$, откуда нетрудно получить, что

$$u_h^{\text{отр}} = A^{\text{отр}} \frac{\exp(ikr')}{\sqrt{kr'}}, \quad A^{\text{отр}} = -\sqrt{\frac{2a}{r_0}} \times \frac{2kh(-2a\varphi')^{2+\lambda} \exp(ik(r_0 - 2a) - i\pi/4)}{(2+\lambda)(1+\lambda)(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}}. \quad (69)$$

В случае “гельдеровской” сингулярности кривизны на ширину переходной зоны накладываются ограничения (18) и (65), более жесткие, чем неравенство (39) с $\nu = -3 - \lambda$, и даже чем соответствующие ограничения в случае скачка кривизны, что объясняется более сложной геометрией фронта отраженной от контура волны.

4.4. Дифракция на контуре с особенностью производной кривизны

Допустим теперь, что производная кривизны контура $\mathfrak{e}^{(j)}(s) = d^j \mathfrak{e} / ds^j$ порядка $j \geq 1$ в точке O имеет скачок с амплитудой h . Как и в случае “гельдеровской” сингулярности кривизны, рассмотренной в разд. 4.3, здесь уходящее поле в главном порядке характеризуется лучевой формулой (51), а эффект негладкости кривизны имеет характер малой поправки. Сравнение выражения для поля в окрестности предельного луча [15, 17] с формулами (45)–(47) показывает, что влияние негладкости производной кривизны порядка j на уходящее поле в переходной зоне описывается функцией семейства (38), причем $\nu = -3 - j$. В полярных координатах она имеет вид (64), где λ следует заменить на j . Ширина переходной зоны характеризуется неравенством (39) с $\nu = -3 - j$ (отметим, что при $\nu < -3$ это ограничение жестче, чем условие (18)).

Случай, когда производная $\mathfrak{e}^{(j)}(s)$, $j \geq 1$, имеет в точке O “гельдеровскую” сингулярность (62), рассматривается аналогично. Влияние негладкости кривизны на уходящее поле описывается функцией семейства (38) со значком $\nu = -3 - j - \lambda$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом работы является получение простых удобных выражений для общего описания френелевских переходных зон.

Построено семейство точных решений уравнения Гельмгольца для описания слияния двух волн с неплоскими фронтами. Продемонстрировано, что функции этого семейства описывают поля в задачах дифракции на контурах с неглад-

кой кривизной в переходной зоне на умеренном расстоянии от точки негладкости. Область пригодности построенных выражений зависит, с одной стороны, от сингулярностей диаграмм волн на предельном луче и, с другой — от геометрии фронтов волн. С увеличением гладкости кривизны контура переходная зона сужается.

Интересным представляется вопрос о численном моделировании волнового поля на основе полученных формул, которое позволило бы выявить их области пригодности в реальных ситуациях.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны участникам Всероссийского семинара “Математическое моделирование волновых процессов” (Российский новый университет) и лично Д.С. Лукину, А.С. Крюковскому, Е.А. Палкину, В.Т. Полякову и А.В. Попову за полезное обсуждение результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00557).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малюжинец Г.Д. // Успехи физ. наук. 1959. Т. 69. № 2. С. 321.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
3. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
4. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы математической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2.
5. Целев Н.В. // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 51. С. 197.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 2.
7. Popov A., Ladyzhensky (Brodskaia) A., Khozioski S. // Russ. J. Math. Phys. 2009. Т. 16. № 2. С. 296.
8. Уфимцев П.Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: Бином, 2012.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматгиз, 1963.
10. James G.L. Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves. L.: Peter Peregrinus Ltd, 1986.
11. Kaminetzky L., Keller J.B. // SIAM J. Appl. Math. 1972. V. 22. № 1. P. 109.
12. Rogoff Z.M., Kiselev A.P. // Wave Motion. 2001. V. 33. № 2. P. 183.
13. Zlobina E.A., Kiselev A.P. // Wave Motion. 2020. V. 96. Article No. 102571.

14. Злобина Е.А., Киселев А.П. // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. № 2. С. 35.
15. Злобина Е.А. // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 493. С. 169.
16. Злобина Е.А., Киселев А.П. // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 130.
17. Злобина Е.А. // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2021. Т. 506. С. 43.
18. Попов А.В. // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 4. С. 594.
19. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения волн. М.: Наука, 1975.
20. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. // РЭ. 2006. Т. 51. № 10. С. 1155.
21. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013.
22. Злобина Е.А. // Мат. заметки. 2023. Т. 114. № 4. С. 666.
23. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972.