

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Санкт-Петербургский государственный университет»

На правах рукописи

Злобина Екатерина Андреевна

# **Высокочастотная дифракция на контурах с негладкой кривизной. Некасательное падение**

Специальность 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор

Киселев Алексей Прохорович

Санкт-Петербург – 2024

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Пограничный слой вблизи точки негладкости</b> . . . . .	11
1.1. Дифракция на скачке кривизны . . . . .	13
1.2. Дифракция на гильдеровской сингулярности кривизны . . . . .	21
1.3. Дифракция на негладкости производной кривизны . . . . .	28
1.4. Импедансные граничные условия . . . . .	32
1.5. Падение цилиндрической волны . . . . .	34
1.6. Полученные результаты и возникшие задачи . . . . .	35
<b>Глава 2. Поле вблизи предельного луча. Кирхгофская эвристика</b> . . . . .	36
2.1. Предварительный анализ интеграла Кирхгофа . . . . .	37
2.2. Случай скачка кривизны . . . . .	38
2.3. Случай гильдеровской сингулярности кривизны . . . . .	42
2.4. Обсуждение . . . . .	44
<b>Глава 3. Слияние двух цилиндрических волн</b> . . . . .	45
3.1. Френелевские переходные зоны . . . . .	45
3.2. Эллиптические координаты . . . . .	48
3.3. Семейство точных решений . . . . .	49
3.4. Геометрооптическая интерпретация асимптотики функции (3.19) . . . . .	51
3.5. Обсуждение . . . . .	53
<b>Глава 4. Пограничный слой вокруг предельного луча</b> . . . . .	54
4.1. Дифракция на контуре со скачком кривизны . . . . .	55
4.2. Дифракция на контуре с гильдеровской сингулярностью кривизны . . . . .	59
4.3. Дифракция на контуре с негладкой производной кривизны . . . . .	61
4.4. Обсуждение . . . . .	61
<b>Глава 5. Аппроксимация решений уравнения Маттье функциями параболического цилиндра</b> . . . . .	62
<b>Глава 6. Анализ лучевой формулы для отраженной волны</b> . . . . .	67
6.1. Случай скачка кривизны . . . . .	67

6.2. Случай гельдеровской сингулярности кривизны . . . . .	71
Заключение . . . . .	73
Приложение А. Функции параболического цилиндра . . . . .	74
Список литературы . . . . .	75

## Введение

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** Работа относится к математической теории дифракции и посвящена построению формул высокочастотной асимптотики в задачах дифракции на негладких препятствиях.

Простейшее описание волновых процессов дает известная с античных времен геометрическая оптика, которая не учитывает конечность длины волны, и поэтому не может объяснить наблюдаемую размытость границы света и тени. Подходы к теоретическому описанию полутеневого поля были впервые предложены в начале XIX века в работах Т. Юнга и О.-Ж. Френеля, рассматривавших задачу о падении плоской волны на плоский экран (см., например, [1]). Длина волны предполагалась малой по сравнению с расстоянием до кромки экрана, но ненулевой. В дальнейшем возникли более продвинутые асимптотические методы, такие как лучевой метод [2], метод параболического уравнения Леонтовича—Фока [3] и геометрическая теория дифракции (ГТД) [4–6].

В ГТД, по-видимому, впервые отчетливо сформулированной Дж. Б. Келлером в середине прошлого века [4], намечена программа построения главных членов высокочастотных асимптотик решений дифракционных задач. Волны, отраженные от гладких участков границы, описываются лучевым методом, а вклады от точек негладкости границы берутся из решений модельных (в русской традиции [2] — эталонных) задач. Если кусочно-гладкая граница в окрестности особенности может быть смоделирована клином или конусом, то дело сводится к задачам, допускающим, в скалярном случае, точное решение. Для границы с негладкой кривизной точно решаемые эталонные задачи не известны.

Более продвинутые версии ГТД, см., например, [5; 6], учитывают, что около особых направлений — *предельных лучей*, — где амплитуда дифрагированной волны сингулярна, а фаза близка к фазе отраженной волны, волновое поле описывается специальными функциями (например, в классической задаче дифракции на полуплоскости — интегралом Френеля). Подобные явления естественно характеризовать как возникновение пограничных слоев, или *переходных зон*, и исследовать с помощью приемов, в совокупности известных как метод пограничного слоя. Под этим понимают технику, основанную на изучении исходной задачи в малой области, окружающей особую точку, обычно с использованием растянутых (масштабированных) переменных. Затем полученное внутреннее разложение сшивается с решением вне окрестности особенности. Погранслоиные приемы, начало применению которых в задачах высокочастотной дифракции положено В. А. Фоком [3] и Р. Бачелом и Дж. Б. Келле-

ром [7], развиты и систематически изложены в фундаментальной монографии В. М. Бабича и Н. Я. Кирпичниковой [8]. Для погранслоинных задач в высокочастотном случае единственность решения может быть обеспечена аналогом условия излучения; при этом детального построения внешнего разложения (что бывает необходимо при рассмотрении других задач математической физики, см., например, [9; 10]) не требуется. Под решением (также мы употребляем принятый в этой тематике термин «поле») везде понимается формальное асимптотическое решение (см., например, [11]), т.е. выражение, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца<sup>1</sup>

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = 0 \quad (1)$$

и граничному условию с невязкой, малой при

$$k/\varkappa \rightarrow \infty.$$

Здесь  $k$  — волновое число, а  $\varkappa$  — характеристический геометрический параметр задачи.

В диссертации последовательная погранслоинная техника в духе В. М. Бабича и Н. Я. Кирпичниковой [8] развивается для двумерных эталонных задач высокочастотной дифракции на контурах, кривизна которых гладкая всюду, за исключением точки  $O$ . Целью работы является построение главного члена асимптотики, описывающего влияние негладкости кривизны на уходящее волновое поле. Рассматриваются следующие типы особенностей:

1. *Скачок кривизны.* В этом случае кривизна контура  $\varkappa = \varkappa(s)$  в малой окрестности  $O$  имеет вид

$$\varkappa(s) = \varkappa_0 + h\theta(s) \quad (2)$$

Здесь  $s$  — длина дуги контура, отсчитываемая от точки  $O$ ,

$$\theta(s) = \begin{cases} 0, & \text{при } s < 0, \\ 1, & \text{при } s \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

— функция Хевисайда, а  $\varkappa_0$  и  $h$  — константы любого знака. В частности,  $\varkappa_0$  может равняться нулю, однако  $h \neq 0$ .

2. *Гельдеровская сингулярность кривизны* описывается выражением

$$\varkappa(s) = \varkappa_0 + hs_+^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Мы предполагаем гармоническую зависимость от времени  $t$  вида  $e^{-i\omega t}$ . Здесь  $\omega$  — круговая частота, связанная с волновым числом  $k$  соотношением  $\omega/c = k$ , и  $c = \text{const}$  — скорость распространения волн, которая принимается равной единице:  $c = 1$ .

Здесь введено стандартное обозначение для функции «с плюсином» [12]

$$s_+^\nu = \begin{cases} 0, & \text{при } s < 0, \\ s^\nu, & \text{при } s \geq 0 \end{cases} \quad \nu > -1, \quad (5)$$

а  $\mathfrak{a}_0$  и  $h \neq 0$  — как и прежде, константы, на знак которых не накладывается никаких ограничений.

3. *Негладкость производной кривизны.* В этом случае скачок или гильдеровскую сингулярность имеет производная кривизны порядка  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ :

$$\frac{d^j}{ds^j} \mathfrak{a}(s) = \mathfrak{a}_j + h s_+^\lambda, \quad 0 \leq \lambda < 1, \quad (6)$$

где  $\mathfrak{a}_j$  — константа любого знака.

Константы  $\mathfrak{a}_0$ ,  $\mathfrak{a}_j$  и  $h$  в формулах (2), (4) и (6) не зависят от  $k$ . Предполагается, что падающая волна приходит в особую точку  $O$  вдоль некасательного к контуру направления.

Задачи дифракции на контурах с негладкой кривизной (особенно в случае скачка) привлекали внимание многих исследователей с 60-х годов прошлого века (см., например, [6; 13–22]) не только своими потенциальными приложениями в аэродинамике и радиофизике, но и тем, что для них не существует точно решаемых эталонных задач. Работы основывались на различных версиях эвристического метода Кирхгофа [5], иногда в комбинации с элементами метода пограничного слоя. В простейшем случае скачка кривизны и идеальных граничных условий (т.е. условий Дирихле или Неймана) [13–15], были найдены выражения для дифрагированной волны. В монографии [6] построена асимптотика поля в переходной зоне в виде суммы двух френелевских интегралов. Задачи дифракции на скачке кривизны или ее производной порядка  $j = 1, 2, \dots$  были рассмотрены Л. Каминецким и Дж. Б. Келлером [16] в случае некасательного падения волны на контур с «пассивным» импедансом. Опираясь на своеобразную версию метода погранслоя, они построили выражение для дифрагированной волны, однако поле в переходной зоне было получено только на предельном луче и только на малых расстояниях от контура. З. Рогофф и А. П. Киселев [18] обратились к качественно другому случаю «активного» импеданса, при некоторых значениях которого возникает поверхностная волна. В рамках метода Кирхгофа они подробно рассмотрели соответствующее поле в переходной зоне для скачка кривизны. Ряд работ (например, [19–22]) посвящен случаям касательного падения или наблюдения, падению поверхностной волны и т.п. Отметим еще стоящую особняком работу А. Ф. Филиппова [17], где с помощью совершенно другой техники исследованы нестационарные задачи дифракции на скачке кривизны

или ее производной порядка  $j = 1, 2, \dots$ , а также кратко затронут случай гельдеровской сингулярности<sup>2</sup>. Полученные в [17] выражения для дифрагированных волн согласуются с результатами [16] для стационарного случая. Важного для стационарных задач вопроса об описании поля вблизи предельного луча в нестационарной постановке не возникает.

В перечисленных выше работах в случае скачка кривизны или ее производной некоторого порядка найдены выражения для дифрагированных волн, однако области применимости полученных формул не обсуждались. Поле в переходной зоне исследовалось лишь для скачка кривизны. Вопрос о сшивании формул с геометрически отраженной волной никогда не рассматривался, что не позволяет оценить размеры области пригодности полученного выражения. Случай гельдеровской сингулярности в стационарном случае вообще не был затронут.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Целью работы является развитие последовательного метода пограничного слоя в двумерных задачах высокочастотной дифракции на контурах с негладкой кривизной в случае некасательного падения и построение асимптотических формул для дифрагированной волны и для уходящего поля в переходной зоне.

Были решены следующие задачи:

1. Построение внутреннего разложения для поля в малой окрестности точки негладкости контура в случаях скачка кривизны, гельдеровской сингулярности кривизны и негладкости производной кривизны.
2. Построение простых удобных формул для асимптотического описания высокочастотного поля в области слияния двух цилиндрических волн.
3. Сшивание внутреннего разложения с построенными асимптотическими формулами вблизи предельного луча и с лучевой формулой для дифрагированной волны вдали от него.
4. Исследование лучевой формулы для отраженной волны с целью определения областей пригодности полученных выражений.

При этом были преодолены значительные аналитические трудности при решении краевых задач с сингулярными коэффициентами и при анализе лучевых формул.

**Методология и методы исследования.** Исследование выполнено в рамках методологии последовательного погранслоного подхода [8]. В работе использовались асимптотические методы, теория обобщенных функций и теория специальных функций.

**Научная новизна.** В диссертационной работе последовательный метод пограничного слоя впервые развит в задачах высокочастотной дифракции на контурах с негладкой кри-

---

<sup>2</sup> По-видимому, это единственная работа, где ранее рассматривалась такая особенность.

визной. Построены удобные простые формулы, пригодные для общего асимптотического описания френелевских переходных зон. Найдены явные представления для дифрагированных волн и выражения для поля в переходных зонах на малых и умеренных расстояниях от контура. Определены области пригодности всех полученных выражений. Основные результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа имеет теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы при изучении математических моделей широкого круга волновых процессов.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Последовательный метод пограничного слоя развит для задач высокочастотной дифракции в случае некасательного падения на контур, кривизна или производная кривизны порядка  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , которого имеет скачок или гельдеровскую сингулярность.
2. Построены высокочастотные асимптотики дифрагированной волны и поля в переходной зоне для каждого типа особенности кривизны.
3. Построены удобные простые формулы для общего асимптотического описания слияния двух высокочастотных цилиндрических волн.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность результатов диссертации обеспечивается использованием проверенных методов и строгими математическими доказательствами. Основные результаты докладывались на семинаре кафедры высшей математики и математической физики СПбГУ, на городском семинаре по вопросам теории распространения волн (ПОМИ РАН), на Санкт-Петербургском акустическом семинаре им. Д.П. Коузова (ИПМаш РАН), на общегородском семинаре по математической физике им. В.И. Смирнова (ПОМИ РАН), на всероссийском семинаре «Математическое моделирование волновых процессов» (РосНОУ, Москва), а также на следующих конференциях:

- международные конференции «Days on Diffraction» (Санкт-Петербург, 2018–2020, 2023);
- Санкт-Петербургские зимние молодежные конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, 2018, 2019, 2021);
- международные конференции «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2019, 2020);
- Conference on Spectral Theory and Mathematical Physics (Сочи, 2020);



- Конференция международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021);
- III конференция математических центров России (Майкоп, 2023);
- Традиционная сессия МИАН—ПОМИ «Дифференциальные уравнения и динамические системы» (Санкт-Петербург, 2023).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях [23–29], из них шесть [24–29] в рецензируемых научных изданиях, рекомендуемых ВАК, и одна [23] в журнале, входящем в международные базы данных Web of Science и Scopus. Кроме того, опубликовано 3 заметки [30–32] в сборниках трудов международных конференций, индексируемых Scopus. В диссертацию не вошли результаты работ [33; 34], посвященных развитию метода пограничного слоя в задачах с касательным падением.

**Личный вклад автора.** Результаты разделов 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 и главы 6 опубликованы в совместных работах диссертанта с А. П. Киселевым [23; 25; 27]. Результаты принадлежат соавторам в равной степени. Результаты глав 3 и 4 опубликованы в статье [28], выполненной в соавторстве с А. П. Киселевым, который осуществлял общее руководство работой. Результаты разделов 1.3–1.5, 2.3 и главы 5 получены соискателем лично и опубликованы в работах [24; 26; 29].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, приложения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 78 страниц текста, включая 18 рисунков. Библиография включает 58 наименований.

**В первой главе** волновое поле исследуется в пограничном слое, окружающем точку  $O$ : разделы 1.1, 1.2 и 1.3 посвящены случаям скачка кривизны (2), гельдеровской сингулярности кривизны (4) и негладкости производной кривизны (6), соответственно. Для простоты выкладок предполагается, что падающая волна — плоская. Полное волновое поле над контуром описывается уравнением Гельмгольца (1). В малой окрестности точки негладкости  $O$  задача переписывается в координатах «длина дуги — нормаль»  $s$  и  $n$ . Растяжение переменных в  $k$  раз приводит к задаче с сингулярными коэффициентами для линейного по  $h$  члена волнового поля. С помощью принципа предельного поглощения выделяется отвечающее уходящей волне решение. Для него получено явное выражение через интеграл от быстроосциллирующей функции с сингулярной амплитудой, что потребовало преодоления значительных аналитических трудностей. Асимптотический анализ интеграла дает формулу для дифрагированной волны, а также описание поля вблизи предельного луча на малых расстояниях от контура.

В разделе 1.4 результаты обобщены на случай импедансного граничного условия.

В разделе 1.5 кратко обсуждается дифракция цилиндрической волны. Показано, что главный член асимптотики, описывающий влияние негладкости кривизны на уходящее поле, отличается от найденного в случае падения плоской волны лишь постоянным множителем.

**Во второй главе** задачи дифракции на контурах с негладкой кривизной исследуются в рамках эвристического метода Кирхгофа. Это позволяет угадать вид спецфункций, описывающих поле в переходной зоне на умеренных расстояниях от точки негладкости, что непросто сделать в рамках погранслоного подхода.

**В третьей главе** изучается специальное семейство точных решений уравнения Гельмгольца, удобных для описания слияния двух цилиндрических волн. При разделении переменных в эллиптических координатах возникает произведение двух функций Матье. Асимптотику одной из них дает классический метод ВКБ [35]. Исследование второй менее тривиально и вынесено в главу 5. Там ее асимптотика вблизи предельного луча выражена через функцию параболического цилиндра  $D_\nu$ , где  $\nu$  определяется параметром разделения. В результате для функции семейства мы получаем простую удобную аппроксимацию.

**В четвертой главе** мы возвращаемся к рассмотрению дифракции на контурах с негладкой кривизной. Волновое поле в переходной зоне, где сливаются цилиндрическая дифрагированная волна и отраженная волна, исследуется на умеренных расстояниях от точки негладкости контура. Мы аппроксимируем отраженную волну цилиндрической вблизи предельного луча, а затем описываем уходящее поле с помощью функций построенного в главе 3 семейства решений уравнения Гельмгольца. Выбор подходящих функций подсказывается результатами главы 2. Оценка ширины переходной зоны требует подробного анализа лучевой формулы для отраженной волны, который приведен в главе 6.

**В пятой главе** приводится доказательство использовавшейся в главе 3 теоремы о том, что решение уравнения Матье с коэффициентами специального вида аппроксимируется функцией параболического цилиндра.

**В шестой главе** проведен детальный анализ лучевой формулы для волны, отраженной от контура с особенностью кривизны. В результате длинных и громоздких выкладок получены упрощенные выражения в малой окрестности точки негладкости и в узкой окрестности предельного луча. Это позволяет определить области пригодности выражений, построенных в главах 1 и 4.

**В заключении** кратко изложены основные результаты диссертации.

**В приложении** приведены часто используемые в диссертации факты о функциях параболического цилиндра.

## Глава 1. Пограничный слой вблизи точки негладкости

Волновое поле  $u$  в бесконечной области  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , ограниченной контуром  $C$  (см. Рисунок 1.1), описывается уравнением Гельмгольца (1). На контуре  $C$  выполнено, например, граничное условие Дирихле

$$u|_C = 0. \quad (1.1)$$

Граничное условие Неймана и импедансное граничное условие (условие третьего рода) рассматриваются вполне аналогично.

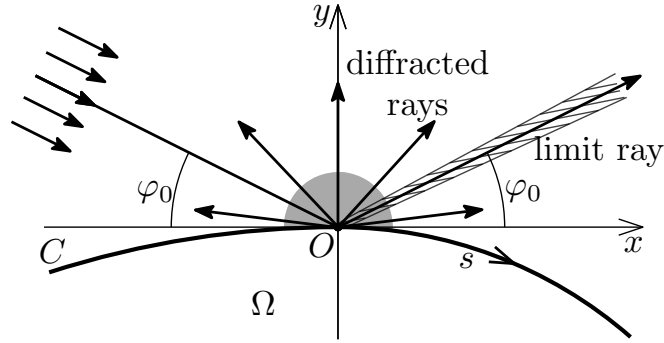


Рисунок 1.1 — Дифракция на контуре с негладкой кривизной

Введем декартовы координаты  $x$  и  $y$  с центром в точке  $O$  и осью  $x$ , направленной по касательной к контуру. Направление отсчета длины дуги контура  $s$  в формулах (2), (4) и (6) согласовано с направлением оси  $x$ :  $x > 0$  для точек контура с  $s > 0$  (см. Рисунок 1.1).

Решение задачи (1), (1.1) мы ищем в виде  $u = u^{\text{inc}} + u^{\text{out}}$ , где

$$u^{\text{inc}} = e^{ik(x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0)} \quad (1.2)$$

— падающая плоская волна с углом скольжения  $\varphi_0$  (координаты  $(x, y)$  введены как показано на Рисунке 1.1: причем направление оси  $x$  согласовано с направлением отсчета длины дуги  $s$  контура), а  $u^{\text{out}}$  — уходящая волна. Падающая волна приходит в точку негладкости контура  $O$  вдоль некасательного направления, то есть  $\varphi_0 > \varepsilon > 0$  с фиксированной и не зависящей от  $k$  константой  $\varepsilon$ .

Согласно геометрической теории дифракции [4; 5] уходящая волна в самом грубом приближении есть сумма двух волн:

$$u^{\text{out}} = u^{\text{ref}} + u^{\text{dif}}. \quad (1.3)$$

Здесь  $u^{\text{ref}}$  — волна, геометрически отраженная от гладких частей контура, а  $u^{\text{dif}}$  — волна, дифрагированная точкой его негладкости. В рассматриваемом нами случае некасательного

падения лучевой метод [2] дает для  $u^{\text{ref}}$  явное выражение<sup>1</sup>, теряющее гладкость на *предельном луче* — луче, геометрически отраженном в особой точке контура  $O$ , см. Рисунок 1.1. Дифрагированная волна  $u^{\text{dif}}$ , см. (1.3), на больших по сравнению с длиной волны расстояниях, т.е. при

$$kr \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

является цилиндрической волной:

$$u^{\text{dif}} = A(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} (1 + \mathcal{E}). \quad (1.5)$$

Здесь  $r$  и  $\varphi$  — классические полярные координаты с центром в  $O$ :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r, \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \quad (1.6)$$

Функцию  $A(\varphi; k)$  называют дифракционным коэффициентом, или диаграммой направленности, см., например, [4; 5]. Неравномерная по углу погрешность  $\mathcal{E}$  зависит, вообще говоря, от угла между предельным лучом и направлением на точку наблюдения

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0, \quad (1.7)$$

т.е.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(r, \tilde{\varphi}; k)$ . Для дифракции на негладких препятствиях (см., например, [5; 16; 23–25]) характерно обращение  $A$  и  $\mathcal{E}$  в бесконечность на предельном луче.

Таким образом, представление (1.3) применимо не во всей рассматриваемой области: вокруг предельного луча возникает пограничный слой, выделенный на Рисунке 1.1 штриховкой — так называемая *переходная зона*. Там фазы геометрически отраженной и дифрагированной волн близки, а сами волны становятся неразличимы, что позволяет говорить об их слиянии. Поскольку выражение (1.5) имеет смысл только на больших расстояниях от точки  $O$ , см. (1.4), около нее возникает другой пограничный слой (закрашенная зона на Рисунке 1.1).

В данной главе волновое поле, дифрагированное контуром с негладкой кривизной, исследуется в малой окрестности точки негладкости  $O$ . Сначала будет рассмотрен случай скачка кривизны, затем — гельдеровской сингулярности, и, наконец, случай, когда особенность имеет производная кривизны некоторого порядка.

---

<sup>1</sup> Подробный анализ лучевой формулы для отраженной волны проведен в главе 6.

## 1.1. Дифракция на скачке кривизны

Рассмотрим дифракцию на контуре, кривизна которого в точке  $O$  имеет скачок, см. (2). В этом случае геометрический характеристический параметр вводится по формуле

$$\varkappa = \max\{|\varkappa_0|, |\varkappa_0 + h|\}. \quad (1.8)$$

Ниже он возникнет естественным образом. Отметим, что  $\varkappa$  не обращается в нуль, поскольку иначе кривизна контура была бы непрерывна в  $O$ .

### 1.1.1. Локальные координаты в окрестности точки $O$

Пусть точка наблюдения  $M$  расположена вблизи точки  $O$ . Будем характеризовать ее положение ортогональными координатами  $s$  и  $n$ , где  $n$  — длина отрезка нормали, опущенного из  $M$  на контур  $C$  (см. Рисунок 1.2). Для точек, лежащих выше контура,  $n \geq 0$ . Аналогом полярных координат (1.6) в малой окрестности точки  $O$  являются координаты  $\varrho$  и  $\vartheta$ :

$$s = \varrho \cos \vartheta, \quad n = \varrho \sin \vartheta, \quad 0 \leq \varrho, \quad -\pi < \vartheta \leq \pi. \quad (1.9)$$

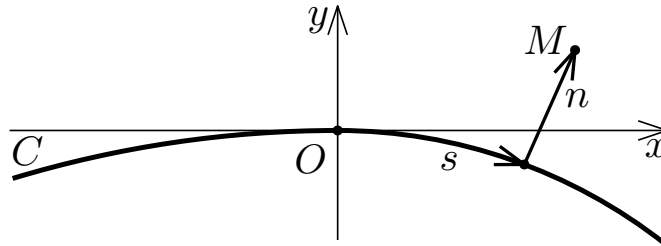


Рисунок 1.2 — Координаты  $s$  и  $n$

С помощью хорошо известных формул дифференциальной геометрии [36] нетрудно выразить декартовы координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  через  $s$  и  $n$ :

$$\begin{cases} x = s + \varkappa_0 n s + h n s_+ + o(\varkappa(n^2 + s^2)), \\ y = n - \frac{\varkappa_0 s^2}{2} - \frac{h s_+^2}{2} + o(\varkappa(n^2 + s^2)). \end{cases} \quad (1.10)$$

Функция «с плюсиком» определена в (5).

Из (1.10) мгновенно получаются соотношения, связывающие полярные координаты (1.6) и их локальный аналог (1.9):

$$\begin{aligned} \varrho &= r [1 + O(\varkappa r)], \\ \vartheta &= \varphi [1 + O(\varkappa r)], \end{aligned} \quad (1.11)$$

так что  $\varrho \approx r$  и  $\vartheta \approx \varphi$  в области, где

$$\varkappa r \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Условие (1.12) везде далее предполагается выполненным.

В малой окрестности точки  $O$  стандартным образом введем растянутые координаты  $S$  и  $N$  (см., напр., [16; 37; 38])

$$S = ks, \quad N = kn \quad (1.13)$$

и разложим координаты  $x$  и  $y$  по отрицательным степеням большого параметра  $k$ :

$$\begin{cases} x = \frac{S}{k} + \frac{\varkappa_0 NS}{k^2} + \frac{hNS_+}{k^2} + O\left(\frac{\varkappa^2(S^3 + N^3)}{k^3}\right), \\ y = \frac{N}{k} - \frac{\varkappa_0 S^2}{2k^2} - \frac{hS_+^2}{2k^2} + O\left(\frac{\varkappa^2(S^3 + N^3)}{k^3}\right). \end{cases} \quad (1.14)$$

### 1.1.2. Падающая волна (1.2) в растянутых координатах

С помощью (1.14) фазы падающей и уходящей плоских волн переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} k(x \cos \varphi_0 \pm y \sin \varphi_0) = S \cos \varphi_0 \pm N \sin \varphi_0 + \frac{1}{k} \left[ \varkappa_0 \left( \mp \frac{\sin \varphi_0}{2} S^2 + \cos \varphi_0 NS \right) + \right. \\ \left. + h \left( \mp \frac{\sin \varphi_0}{2} S_+^2 + \cos \varphi_0 NS_+ \right) \right] + O\left(\frac{\varkappa^2(S^3 + N^3)}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Падающая волна  $u^{\text{inc}}$  в окрестности точки  $O$  принимает вид:

$$u^{\text{inc}} = e^{ik(x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0)} = u_0^{\text{inc}} + \frac{1}{k} \left( \varkappa_0 u_1^{\text{inc}} + h u_1^{\text{inc}, h} \right) + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad (1.15)$$

где функции

$$\begin{aligned} u_0^{\text{inc}} &= e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)}, \\ u_1^{\text{inc}} &= i \left( \frac{\sin \varphi_0}{2} S^2 + \cos \varphi_0 NS \right) e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)}, \\ u_1^{\text{inc}, h} &= i \left( \frac{\sin \varphi_0}{2} S_+^2 + \cos \varphi_0 NS_+ \right) e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

не зависят от амплитуды скачка кривизны  $h$ .

Асимптотика отраженной волны  $u^{\text{ref}}$  (6.1) имеет схожую форму. Ее получение приведено в главе 6.

### 1.1.3. Уравнение Гельмгольца (1) в растянутых координатах

В координатах  $s$  и  $n$  оператор Гельмгольца имеет вид (см., напр., [36])

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 = \frac{1}{1 + n\varkappa} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{1 + n\varkappa} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{1 + n\varkappa} \frac{\partial}{\partial n} \left( (1 + n\varkappa) \frac{\partial}{\partial n} \right) + k^2. \quad (1.17)$$

Раскладывая правую часть формулы (1.17) по степеням  $n$  и переходя к растянутым координатам  $S$  и  $N$ , получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 = k^2 \left( L_0 + \frac{1}{k} (\mathfrak{a}_0 L_1 + h L_1^h) + \dots \right), \quad k \rightarrow \infty,$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial^2}{\partial N^2} + \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 1, & L_1 &= -2N \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial}{\partial N}, \\ L_1^h &= -2N \theta(S) \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \theta(S) \frac{\partial}{\partial N} - N \delta(S) \frac{\partial}{\partial S}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь  $\theta$  — функция Хевисайда (3), а  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

#### 1.1.4. Внутреннее разложение

Будем искать решение задачи (1), (1.1) в виде

$$u^{\text{out}} = U_0^{\text{out}} + \frac{1}{k} (\mathfrak{a}_0 U_1^{\text{out}} + h U_1^{\text{out},h}) + \dots, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Нашей целью является асимптотическое описание влияния скачка кривизны на уходящее поле, поэтому нам интересен только линейный по амплитуде скачка  $h$  член.

#### Задачи пограничного слоя

Подставляя (1.19) в (1) и (1.1) и приравнивая к нулю коэффициенты при степенях  $k$ , мы получаем задачи пограничного слоя. Задача для  $U_1^{\text{out},h}$  имеет вид

$$\begin{cases} L_0 U_1^{\text{out},h} + L_1^h U_0^{\text{out}} = 0, & (1.20a) \\ U_1^{\text{out},h} \Big|_{N=0} = -u_1^{\text{inc},h} \Big|_{N=0}. & (1.20b) \end{cases}$$

а для  $U_0^{\text{out}}$ .

$$\begin{cases} L_0 U_0^{\text{out}} = 0, & (1.21a) \\ U_0^{\text{out}} \Big|_{N=0} = -u_0^{\text{inc}} \Big|_{N=0}, & (1.21b) \end{cases}$$

Операторы  $L_0$  и  $L_1^h$  введены в (1.18), а функции  $u_0^{\text{inc}}$  и  $u_1^{\text{inc},h}$  в (1.16). Имея в виду сшивание с уходящей волной, дополним задачи пограничного слоя типичным для теории высокочастотной дифракции требованием, чтобы их решения удовлетворяли принципу предельного поглощения, см., например, [8; 38]. А именно, замена 1 на  $1 + i\delta$ ,  $\delta > 0$ , в выражении для  $L_0$ , см. (1.18), приводит к задачам, каждая из которых имеет единственное убывающее при  $N \rightarrow \infty$  решение. Предельный переход  $\delta \rightarrow 0$  выделяет нужные нам решения исходных задач пограничного слоя (см., напр., [39]).

Нас не интересует функция  $U_1^{\text{out}}$ , поскольку она не описывает влияние скачка кривизны. Эта функция решает задачу, которая отличается от (1.20) заменой  $L_1^h$  и  $u_1^{\text{inc},h}$  на  $L_1$  и  $u_1^{\text{inc}}$ , соответственно. Можно показать, что  $U_1^{\text{out}}$  сшивается с отраженной волной, но мы опускаем доказательство этого факта.

### Исследование линейного по $h$ члена

Мы мгновенно получаем решение задачи (1.21)

$$U_0^{\text{out}} = -e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}. \quad (1.22)$$

В главе 6 показано, что (1.22) является главным членом разложения отраженной волны. Учитывая (1.16), (1.20) и (1.22), приходим к задаче для  $U_1^{\text{out},h}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) U_1^{\text{out},h} = \\ = ((i \sin \varphi_0 + 2 \cos^2 \varphi_0 N) \theta(S) - i \cos \varphi_0 N \delta(S)) e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}, \end{array} \right. \quad (1.23a)$$

$$U_1^{\text{out},h} \Big|_{N=0} = -\frac{i \sin \varphi_0}{2} S_+^2 e^{iS \cos \varphi_0}. \quad (1.23b)$$

Мы предполагаем, что  $U_1^{\text{out},h}$  удовлетворяет принципу предельного поглощения.

Легко проверить, что функция  $U_1^{\text{out},h}$  представима в виде

$$U_1^{\text{out},h} = W + V, \quad (1.24)$$

где  $W$  и  $V$  удовлетворяют задачам

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) W = \\ = ((i \sin \varphi_0 + 2 \cos^2 \varphi_0 N) \theta(s) - i \cos \varphi_0 N \delta(S)) e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}, \end{array} \right. \quad (1.25a)$$

$$W|_{N=0} = \frac{i \sin \varphi_0}{2} S_+^2 e^{iS \cos \varphi_0}, \quad (1.25b)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) V = 0, \end{array} \right. \quad (1.26a)$$

$$V|_{N=0} = -i \sin \varphi_0 S_+^2 e^{iS \cos \varphi_0}, \quad (1.26b)$$

соответственно. Принцип предельного поглощения обеспечивает единственность решения задач (1.25) и (1.26).

Разбиение (1.24) удобно по следующим причинам. Во-первых, задача (1.25) легко решается в элементарных функциях, а решение задачи (1.26) выражается через интеграл Фурье. Во-вторых,  $W$  сшивается с отраженной волной, в то время как  $V$  описывает дифрагированную волну.



Решение (1.25) очень простое:

$$W = i \left( \frac{\sin \varphi_0}{2} S_+^2 - \cos \varphi_0 N S_+ \right) e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}. \quad (1.27)$$

В главе 6 показано, что это выражение сшивается с геометрически отраженной волной, а потому не представляет для нас интереса.

### Исследование функции $V$

Будем искать решение задачи (1.26) в виде интеграла Фурье

$$V(S, N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\sigma, N) e^{i\sigma S} d\sigma \quad (1.28)$$

с неизвестной плотностью  $\mu(\sigma, N)$ . Преобразование Фурье функции  $S_+^2 e^{iS \cos \varphi_0}$  дается выражением

$$\mathcal{F} [S_+^2 e^{iS \cos \varphi_0}] (\sigma) = \mathcal{F} [S_+^2] (\sigma - \cos \varphi_0) = 2i(\sigma - \cos \varphi_0 - i0)^{-3}, \quad (1.29)$$

см. [12]. Из (1.26) вытекает, что  $\mu(\sigma, N)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 - \sigma^2 \right) \mu = 0 \quad (1.30)$$

и граничному условию

$$\mu|_{N=0} = 2 \sin \varphi_0 (\sigma - \cos \varphi_0 - i0)^{-3}. \quad (1.31)$$

Задача (1.30), (1.31) имеет два линейно независимых решения:

$$\mu = 2 \sin \varphi_0 (\sigma - \cos \varphi_0 - i0)^{-3} e^{\pm iN\sqrt{1-\sigma^2}}. \quad (1.32)$$

Ветвь квадратного корня выбрана так, что при  $-1 < \sigma < 1$  он положителен. Разрезы показаны на Рисунке 1.3 волнистыми линиями. Чтобы интеграл в (1.28) сходил на бесконечности, мы должны взять решение (1.32) с знаком «+» в показателе экспоненты. Регуляризуем интеграл (1.28) с помощью показанной на Рисунке 1.3 деформации контура интегрирования ( $\text{Re } \sigma$  — вещественная часть  $\sigma$ ). Используя локальный аналог полярных координат (1.9), приходим к следующему выражению для решения  $V$  задачи (1.26):

$$V = \frac{\sin \varphi_0}{\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{ik\varrho(\sqrt{1-\sigma^2} \sin \vartheta + \sigma \cos \vartheta)}}{(\sigma - \cos \varphi_0)^3} d\sigma. \quad (1.33)$$

Напомним, что  $\varrho \approx r$  и  $\vartheta \approx \varphi$  в области  $\varkappa r \rightarrow 0$ .

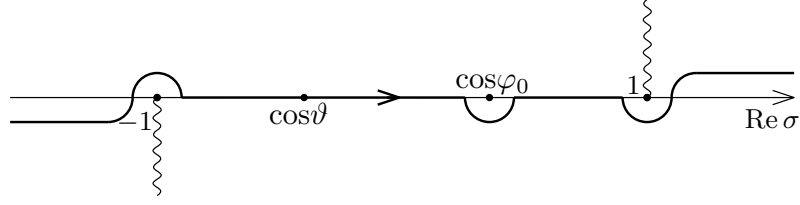
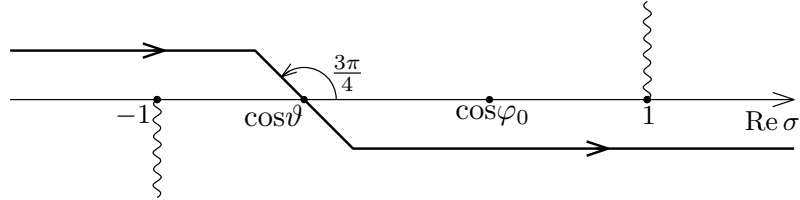
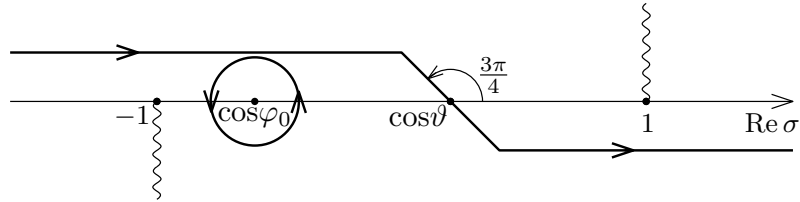


Рисунок 1.3 — Контур интегрирования в (1.33)

В высокочастотном приближении  $kr \rightarrow \infty$  (1.4), стандартная асимптотическая техника (см., напр., [40]) позволит нам описать функцию  $V$  как сумму вкладов полюса  $\sigma = \cos \varphi_0$  и критической точки фазы  $\sigma = \cos \vartheta$ . Везде далее условие (1.4) предполагается выполненным.

**Критическая точка фазы не слишком близка к полюсу.** Пусть критическая точка фазы настолько удалена от полюса, что асимптотика (1.33) может быть найдена стандартным методом перевала (см., напр., [40; 41]), т.е. точка наблюдения расположена не слишком близко к предельного лучу. Контур интегрирования (см. Рисунок 1.3) деформируется в касательный к линии наискорейшего спуска (см., напр., [40]) в точке  $\sigma = \cos \vartheta$ , где она образует с положительным направлением оси абсцисс угол  $3\pi/4$ . В случае  $\cos \varphi_0 > \cos \vartheta$  полюс не дает вклада в интеграл (1.33), см. Рисунок 1.4. Если же  $\cos \varphi_0 < \cos \vartheta$ , см. Рисунок 1.5, то вклад от полюса равен вычету подынтегральной функции в точке  $\sigma = \cos \varphi_0$ .

Рисунок 1.4 — Контур интегрирования в (1.33) при  $\cos \varphi_0 > \cos \vartheta$ Рисунок 1.5 — Контур интегрирования в (1.33) при  $\cos \varphi_0 < \cos \vartheta$ 

Суммируя сказанное, получим асимптотику функции  $hV/k$ , имеющей смысл аддитив-

ной части волнового поля:

$$\frac{hV}{k} = h\theta(\varphi_0 - \vartheta) \left( \frac{n}{\sin^2 \varphi_0} - ik \frac{(s \sin \varphi_0 - n \cos \varphi_0)^2}{\sin \varphi_0} \right) e^{ik(s \cos \varphi_0 + n \sin \varphi_0)} + \tilde{A}(\vartheta; k) \frac{e^{ik\varrho}}{\sqrt{k\varrho}} \left[ 1 + O \left( \frac{1}{k\varrho(\vartheta - \varphi_0)^2} \right) \right], \quad kr \rightarrow \infty, \quad (1.34)$$

где

$$\tilde{A}(\vartheta; k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h \sin \vartheta \sin \varphi_0}{k (\cos \vartheta - \cos \varphi_0)^3} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (1.35)$$

Первое слагаемое в правой части (1.34) описывает вклад полюса. Оно сшивается с отраженной волной, см. главу (6). Второе слагаемое является вкладом критической точки фазы и описывает дифрагированную волну. Асимптотика (1.34) непригодна в областях, где значение  $\vartheta$  близко к 0 или  $\pi$ , т.е. критическая точка фазы  $\cos \theta$  близка к точкам ветвления фазы  $\pm 1$ .

Погрешности в (1.34) малы при выполнении условия

$$\sqrt{kr} |\tilde{\varphi}| \rightarrow \infty, \quad (1.36)$$

означающем, что точка наблюдения находится достаточно далеко от предельного луча. Напомним, что  $\tilde{\varphi}$  — угол между направлением на точку наблюдения и предельным лучом, см. (1.7).

**Сшивка выражений (1.5) и (1.34).** Покажем, что при условии (1.36) второе слагаемое в правой части (1.34) сшивается с цилиндрической волной  $u^{\text{dif}}$  (1.5). Из соотношений (1.11) вытекает, что

$$e^{ik\varrho} = e^{ikr} (1 + O(k\chi r^2)). \quad (1.37)$$

Из формы поправочных членов в (1.37) следует, что размер пограничного слоя вокруг точки  $O$  характеризуется условием

$$k\chi r^2 \rightarrow 0. \quad (1.38)$$

Сравнивая (1.5) и (1.34) получим, что  $A(\varphi; k) = \tilde{A}(\varphi; k)$ , см. (1.35), и дифрагированная волна  $u^{\text{dif}}$  имеет вид

$$u^{\text{dif}} = \tilde{A}(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left( 1 + O \left( \frac{1}{kr\tilde{\varphi}^2} \right) \right). \quad (1.39)$$

Поправочный член мал при выполнении условия (1.36). Выражение (1.39) допускает распространение на большие, не удовлетворяющие условию (1.12), расстояния, но непригодно для направлений, близких к касательным к контуру. Оно согласуется с формулами, полученными ранее в [14–17].

**Критическая точка фазы и полюс близки.** Рассмотрим случай, когда условие (1.36) не выполняется, и получение асимптотики выражения (1.33) требует модификации метода перевала. Пусть точка наблюдения расположена вблизи предельного луча, и выполнено

условие

$$(kr)^{\frac{1}{3}}\tilde{\varphi} \rightarrow 0, \quad (1.40)$$

см. (1.7). В малой окрестности критической точки фазы введем переменную интегрирования  $\sigma = \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta$ ,  $|\zeta| \rightarrow 0$ . Следуя, например, Эрдеи (см., напр., [40]), разложим фазу (1.33) до квадратичных членов и распространим интегрирование из окрестности критической точки фазы на всю ось:

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k} &= \frac{h \sin \varphi_0}{\pi k} \int_{\gamma} \frac{e^{ik(n\sqrt{1-\sigma^2}+s\sigma)}}{(\sigma - \cos \varphi_0)^3} d\sigma = \\ &= \frac{h}{\pi k \sin \varphi_0} e^{ik\varrho} \underbrace{\int}_{\rightarrow} \frac{1 + O(\vartheta - \varphi_0) + O(k\varrho\zeta^3)}{(\zeta - (\vartheta - \varphi_0))^3} e^{-ik\varrho\zeta^2/2} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Выражение (1.41) нетрудно записать в терминах функции параболического цилиндра  $D_{-3}$ , см. (A.4):

$$\frac{hV}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\varrho}{\sin \varphi_0} e^{ik\varrho - i\frac{z^2}{2}} D_{-3} \left( \sqrt{2} z e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \left[ 1 + O(kr(\vartheta - \varphi_0)^3) + O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right) \right]. \quad (1.42)$$

Здесь введена переменная

$$z = \sqrt{\frac{k\varrho}{2}} (\vartheta - \varphi_0), \quad (1.43)$$

которая часто возникает при описании переходных зон ( $z^2$  приближенно равняется разности фаз плоской и цилиндрической волн, см. главу 3 и [5], и обращается в нуль на предельном луче).

Малость остаточных членов, процедура получения которых описана ниже, обеспечивается условием (1.40) и (1.4).

Отметим, что выражение (1.42) растет при удалении от контура и пригодно для описания волнового поля лишь на малых (1.12) расстояниях от  $O$ .

Формула (1.42) применима для описания волнового поля в пограничном слое (1.38). Распространение ее на большие расстояния мы обсудим немного позднее.

**Получение погрешности в (1.42).** Разберем более подробно вычисления предыдущего параграфа. Переходя в (1.41) к переменной интегрирования  $\tilde{\zeta} = \sqrt{kr}(\zeta - (\vartheta - \varphi_0))$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k} &= \frac{h\varrho}{\pi \sin \varphi_0} e^{ik\varrho - ik\varrho \frac{(\vartheta - \varphi_0)^2}{2}} \underbrace{\int}_{\rightarrow} \frac{e^{-i\sqrt{k\varrho}(\vartheta - \varphi_0)\tilde{\zeta} - i\tilde{\zeta}^2/2}}{\tilde{\zeta}^3} \times \\ &\quad \times \left( 1 + O(\vartheta - \varphi_0) + O\left(\frac{(\tilde{\zeta} + \sqrt{k\varrho}(\vartheta - \varphi_0))^3}{\sqrt{k\varrho}}\right) \right) d\tilde{\zeta}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Введем обозначение для малого параметра  $\varepsilon = (k\rho)^{\frac{1}{3}}|\vartheta - \varphi_0|$  (см. (1.40)). В терминах  $\varepsilon$  и  $k\rho$  амплитуда подынтегральной функции в (1.44) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{\zeta}^3} \left( 1 + O(\vartheta - \varphi_0) + O\left(\frac{(\tilde{\zeta} + \sqrt{k\rho}(\vartheta - \varphi_0))^3}{\sqrt{k\rho}}\right) \right) = \\ & = \frac{1}{\tilde{\zeta}^3} \left( 1 + O\left((k\rho)^{-\frac{1}{3}}\varepsilon\right) + O\left(\frac{(\tilde{\zeta} + (k\rho)^{\frac{1}{6}}\varepsilon)^3}{\sqrt{k\rho}}\right) \right) = \\ & = \frac{1}{\tilde{\zeta}^3} + O(\varepsilon^3) \frac{1}{\tilde{\zeta}^3} + O\left((k\rho)^{-\frac{1}{3}}\varepsilon\right) \left( \frac{1}{\tilde{\zeta}^3} + \frac{1}{\tilde{\zeta}} \right) + O\left((k\rho)^{-\frac{1}{6}}\varepsilon^2\right) \frac{1}{\tilde{\zeta}^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k\rho}}\right). \end{aligned}$$

Интеграл в (1.44) представляет собой сумму членов порядка  $O(1)$ ,  $O\left((kr)^{-\frac{1}{2}}\right)$ ,  $O\left((kr)^{-\frac{1}{3}}\varepsilon\right)$ ,  $O\left((k\rho)^{-\frac{1}{6}}\varepsilon^2\right)$  и  $O(\varepsilon^3)$ . В области, где выполнено условие (1.40), обеспечивающее малость  $\varepsilon$ , выражение (1.44) принимает вид (1.41).

**Сшивка выражений** (1.34) и (1.42). Покажем, что при выполнении обоих условий (1.36) и (1.40) формулы (1.34) и (1.42) асимптотически совпадают. В самом деле, используя асимптотику функции параболического цилиндра  $D_{-3}$  (см. (A.5) и (A.6)) и подставляя выражение для  $z$  (1.43) в (1.42), при  $z \rightarrow \pm\infty$  получим

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k} & \approx -\frac{hr}{\sin \varphi_0} \left( 2iz^2\theta(-z)e^{ikr-iz^2} + \frac{e^{ikr-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}z^3} \right) = \\ & = -ikh\frac{r^2(\vartheta - \varphi_0)^2}{\sin \varphi_0}\theta(\varphi_0 - \vartheta)e^{ikr\left(1 - \frac{(\vartheta - \varphi_0)^2}{2}\right)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{he^{-i\frac{\pi}{4}}}{k\sin \varphi_0(\varphi_0 - \vartheta)^3}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Легко видеть, что главные члены (1.34) и (1.45) совпадают.

**Распространение выражения (1.42) на бóльшие расстояния.** В пограничном слое (1.38) вблизи точки  $O$  допустима замена локальных координат  $(\rho, \vartheta)$  на полярные координаты  $(r, \varphi)$ . Формула (1.42) при такой замене переходит в выражение, которое растет при удалении от контура и, следовательно, пригодно лишь на малых расстояниях от  $O$ . Сшивание с лучевой формулой для отраженной волны при удалении от предельного луча (1.40), см. главу 6, показывает, что область применимости полученного выражения характеризуется условиями (1.12), (1.40) и

$$k\kappa(r\tilde{\varphi})^2 \rightarrow 0. \quad (1.46)$$

## 1.2. Дифракция на гельдеровской сингулярности кривизны

В данном разделе рассматривается случай гельдеровской сингулярности кривизны, см. (4). Поле исследуется по той же схеме, что и в случае скачка кривизны в разделе 1.1, поэтому некоторые детали будут опущены.

В случае общего положения геометрический параметр задачи вводится как  $\varkappa = |\varkappa_0|$ , см. (4), а в случае уплощения контура, когда  $\varkappa_0 = 0$ , по формуле  $\varkappa = |h|$ . Чтобы обсудить сразу оба случая, мы будем выражать остаточные члены в формулах через  $\varkappa_0$  и  $h$ , без использования  $\varkappa$ .

### 1.2.1. Локальные координаты в окрестности точки $O$

Как и прежде, точка наблюдения  $M$ , лежащая вблизи  $O$ , будет характеризоваться ортогональными координатами  $s$  и  $n$  (длина дуги — нормаль), см. Рисунок 1.2, и локальным аналогом полярных координат  $\varrho$  и  $\vartheta$ , см. (1.9)

С помощью хорошо известных формул дифференциальной геометрии, см., например, [36], выразим, как в разделе 1.1, координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  через  $s$  и  $n$ :

$$\begin{cases} x = s + \varkappa_0 n s + \frac{h n s_+^{1+\lambda}}{1+\lambda} + O(\varkappa_0^2 r^3) + O(h^2 r^{3+\lambda}), \\ y = n - \frac{\varkappa_0 s^2}{2} - \frac{h s_+^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)} + O(\varkappa_0^2 r^3) + O(h^2 r^{3+\lambda}). \end{cases} \quad (1.47)$$

Функция «с плюси́ком» определена в (5). Из (1.47) мгновенно получаются соотношения, связывающие полярные координаты (1.6) и их локальный аналог (1.9):

$$\begin{aligned} \varrho &= r [1 + O(\varkappa_0 r) + O(h r^{1+\lambda})], \\ \vartheta &= \varphi [1 + O(\varkappa_0 r) + O(h r^{1+\lambda})], \end{aligned} \quad (1.48)$$

так что  $\varrho \approx r$  и  $\vartheta \approx \varphi$  в области, где

$$\varkappa_0 r \rightarrow 0, \quad h r^{1+\lambda} \rightarrow 0. \quad (1.49)$$

Заметим, что при  $\varkappa_0 \neq 0$  второе соотношение в (1.49) следует из первого, т.е. область, характеризованная первым соотношением, уже области, характеризованной вторым.

Везде далее мы предполагаем условия (1.49) выполненными.

### 1.2.2. Падающая волна и оператор Гельмгольца в растянутых координатах

Волновое поле в малой окрестности точки  $O$  снова будем описывать с помощью стандартных растянутых координат  $S$  и  $N$  (1.13). Фаза падающей волны (1.2) в координатах (1.13) представляет собой ряд по отрицательным степеням большого параметра  $k$ , см. (1.47)

$$\begin{aligned} x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0 &= \frac{S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0}{k} + \frac{\varkappa_0}{k^2} \left( \frac{\sin \varphi_0}{2} S^2 + \cos \varphi_0 N S \right) + \\ &+ \frac{h}{k^{2+\lambda}} \left( \frac{\sin \varphi_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} + \frac{\cos \varphi_0}{1+\lambda} N S_+^{1+\lambda} \right) + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

а сама падающая волна в малой окрестности точки  $O$  имеет вид (ср. (1.15))

$$u^{\text{inc}} = u_0^{\text{inc}} + \frac{\varkappa_0}{k} u_1^{\text{inc}} + \frac{h}{k^{1+\lambda}} u_{1+\lambda}^{\text{inc}} + \dots, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.50)$$

Здесь функции  $u_0^{\text{inc}} = u_0^{\text{inc}}(S, N)$ ,  $u_1^{\text{inc}} = u_1^{\text{inc}}(S, N)$  и  $u_{1+\lambda}^{\text{inc}} = u_{1+\lambda}^{\text{inc}}(S, N)$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_0^{\text{inc}} &= e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)}, \\ u_1^{\text{inc}} &= i \left( \frac{\sin \varphi_0}{2} S^2 + \cos \varphi_0 N S \right) e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)}, \\ u_{1+\lambda}^{\text{inc}} &= i \left( \frac{\sin \varphi_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} + \frac{\cos \varphi_0}{1+\lambda} N S_+^{1+\lambda} \right) e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)} \end{aligned} \quad (1.51)$$

и не зависят от  $h$ .

Аналогично выглядит вытекающая из лучевой формулы (6.1) асимптотика отраженной волны, получение которой приведено в главе 6.

Оператор Гельмгольца в растянутых координатах  $S$  и  $N$  принимает вид (ср. (1.18)):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 = k^2 \left( L_0 + \frac{\varkappa_0}{k} L_1 + \frac{h}{k^{1+\lambda}} L_{1+\lambda} + \dots \right), \quad k \rightarrow \infty,$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial^2}{\partial N^2} + \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 1, & L_1 &= -2N \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial}{\partial N}, \\ L_{1+\lambda} &= -2N S_+^\lambda \frac{\partial^2}{\partial S^2} + S_+^\lambda \frac{\partial}{\partial N} - \lambda N S_+^{-1+\lambda} \frac{\partial}{\partial S}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

### 1.2.3. Внутреннее разложение

Будем искать внутреннее разложение для уходящей волны в виде, аналогичном (1.50):

$$u^{\text{out}} = U_0^{\text{out}} + \frac{\varkappa_0}{k} U_1^{\text{out}} + \frac{h}{k^{1+\lambda}} U_{1+\lambda}^{\text{out}} + \dots, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.53)$$

Нас интересует только линейный по амплитуде сингулярности  $h$  член  $U_{1+\lambda}^{\text{out}}$ .

### Задачи пограничного слоя

Подставляя (1.50) и (1.53) в уравнение Гельмгольца (1) и граничное условие (1.1) и приравнявая к нулю коэффициенты при степенях  $k$ , получим задачи пограничного слоя. Задача для  $U_{1+\lambda}^{\text{out}}$  имеет вид

$$\begin{cases} L_0 U_{1+\lambda}^{\text{out}} + L_{1+\lambda} U_0^{\text{out}} = 0, \end{cases} \quad (1.54a)$$

$$\begin{cases} U_{1+\lambda}^{\text{out}}|_{N=0} = -u_{1+\lambda}^{\text{inc}}|_{N=0}, \end{cases} \quad (1.54b)$$

а для  $U_0^{\text{out}}$ , очевидно, совпадает с аналогичной задачей (1.21). Операторы  $L_0$  и  $L_{1+\lambda}$  введены в (1.52), функции  $u_0^{\text{inc}}$  и  $u_{1+\lambda}^{\text{inc}}$  определены в (1.51). Имея в виду сшивание с уходящей волной,

дополним задачи пограничного слоя типичным для теории высокочастотной дифракции требованием, чтобы их решения удовлетворяли принципу предельного поглощения, подробнее см. раздел 1.1.4.

Отметим, что задача для  $U_1^{\text{out}}$  отличается от задачи (1.54) заменой  $L_{1+\lambda}$  и  $u_{1+\lambda}^{\text{inc}}$  на  $L_1$  и  $u_1^{\text{inc}}$ , соответственно. Сшиваение функции  $U_1^{\text{out}}$  с лучевой формулой для отраженной волны обсуждается в главе 6.

### Исследование решения задачи (1.54)

Решение задачи (1.21) для  $U_0$  дается выражением (1.22).

С учетом (1.51), (1.52) и (1.22), задача (1.54) принимает вид:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) U_{1+\lambda}^{\text{out}} = \\ = ((i \sin \varphi_0 + 2 \cos^2 \varphi_0 N) S_+^\lambda - i \lambda \cos \varphi_0 N S_+^{-1+\lambda}) e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}, \end{cases} \quad (1.55a)$$

$$\begin{cases} U_{1+\lambda}^{\text{out}}|_{N=0} = -\frac{i \sin \varphi_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} e^{iS \cos \varphi_0}. \end{cases} \quad (1.55b)$$

Технически удобно представить  $U_{1+\lambda}^{\text{out}}$  как сумму двух функций

$$U_{1+\lambda}^{\text{out}} = W + V,$$

где  $W = W(S, N)$  и  $V = V(S, N)$  — соответственно решения задач

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) W = \\ = ((i \sin \varphi_0 + 2 \cos^2 \varphi_0 N) S_+^\lambda - i \lambda \cos \varphi_0 N S_+^{-1+\lambda}) e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}, \end{cases} \quad (1.56a)$$

$$\begin{cases} W|_{N=0} = \frac{i \sin \varphi_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} e^{iS \cos \varphi_0}, \end{cases} \quad (1.56b)$$

и

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) V = 0, \end{cases} \quad (1.57a)$$

$$\begin{cases} V|_{N=0} = -\frac{2i \sin \varphi_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} e^{iS \cos \varphi_0}, \end{cases} \quad (1.57b)$$

единственность решений которых обеспечивается принципом предельного поглощения.

Нетрудно проверить, что решением задачи (1.56) является функция

$$W = i \left( \frac{\sin \varphi_0}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} - \frac{\cos \varphi_0}{1+\lambda} N S_+^{1+\lambda} \right) e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}. \quad (1.58)$$

Как показано в главе (6), она сшивается с отраженной волной, а потому не представляет для нас интереса.



## Исследование функции $V$

Решение задачи (1.57) будем искать в виде интеграла Фурье

$$V(S, N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\sigma, N) e^{i\sigma S} d\sigma \quad (1.59)$$

с неизвестной плотностью  $\mu(\sigma, N)$ . Действуя как в разделе 1.1.4 и пользуясь формулой для Фурье-образа функции  $S_+^{2+\lambda}$  из [12], придем к следующему выражению для  $V$ :

$$\frac{hV(\varrho, \vartheta)}{k^{1+\lambda}} = e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} \Gamma(1+\lambda) \frac{h \sin \varphi_0}{k\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{ik\varrho(\sqrt{1-\sigma^2} \sin \vartheta + \sigma \cos \vartheta)}}{(\sigma - \cos \varphi_0)^{3+\lambda}} d\sigma. \quad (1.60)$$

Контур интегрирования  $\gamma$  показан на Рисунке 1.6. Здесь ветвь квадратного корня выбрана так, что при  $-1 < \sigma < 1$  его значения положительны, соответствующие разрезы плоскости отмечены на Рисунке 1.6 волнистыми линиями. Согласно Гельфанду и Шилову [12], выбрана главная ветвь функции  $(\sigma - \cos \varphi_0)^{-3-\lambda}$ , разрез показан на Рисунке 1.6 штрихпунктирной линией. Обозначения  $\varrho$  и  $\vartheta$  введены в (1.9). Напомним, что в рассматриваемой области  $\varrho \approx r$  и  $\vartheta \approx \varphi$ , см. (1.48).

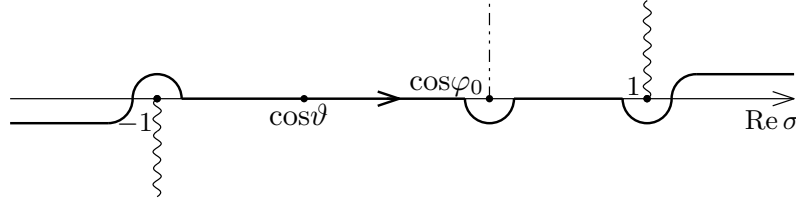


Рисунок 1.6 — Контур интегрирования в (1.60)

В дальнейшем мы будем рассматривать функцию  $hV/k^{1+\lambda}$ , которая, в отличие от  $V$ , имеет смысл аддитивной части волнового поля. В области  $kr \rightarrow \infty$  (1.4) мы будем исследовать ее, опираясь на стандартную асимптотическую технику, см., например, [40; 41]. Вклады в асимптотику функции  $hV/k^{1+\lambda}$  дают критическая точка фазы  $\sigma = \cos \vartheta$  и точка ветвления амплитуды  $\sigma = \cos \varphi_0$ .

Везде далее условие (1.4) предполагается выполненным.

**Критическая точка фазы не близка к точке ветвления амплитуды.** Предположим сначала, что критическая точка фазы достаточно удалена от точки ветвления амплитуды, так что асимптотика (1.60) может быть найдена стандартным методом перевала, см., например, [41]. Линия наискорейшего спуска в критической точке фазы  $\sigma = \cos \vartheta$  образует с положительным направлением оси абсцисс угол  $3\pi/4$ . В случае  $\cos \varphi_0 > \cos \vartheta$  мы деформируем контур интегрирования, см. Рисунок 1.6, как показано на Рисунке 1.7, а в случае  $\cos \varphi_0 < \cos \vartheta$  — как показано на Рисунке 1.8.



Малость остаточного члена в (1.63) обеспечивается соотношением (1.36). Выражение для дифрагированной волны (1.63) допускает распространение на бóльшие расстояния, не удовлетворяющие ограничениям (1.49), однако неприменимо в окрестности касательных к контуру направлений.. Оно согласуется с полученной ранее в [17] формулой.

Из (1.48) вытекает, что

$$\tilde{A}(\vartheta; k) \frac{e^{ik\varrho}}{\sqrt{k\varrho}} = \tilde{A}(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} [1 + O(k\varpi_0 r^2) + O(khr^{2+\lambda})].$$

В области, где не выполняются условия

$$k\varpi_0 r^2 \rightarrow 0, \quad khr^{2+\lambda} \rightarrow 0, \quad (1.64)$$

второе слагаемое в (1.61) и выражение (1.63) не сшиваются друг с другом. Таким образом, размер пограничного слоя вокруг точки  $O$  характеризуется соотношениями (1.64) (ср. (1.38)). Отметим, что при  $\varpi_0 = 0$  пограничный слой шире, чем при  $\varpi_0 \neq 0$ , ср. (1.49).

**Критическая точка фазы близка к точке ветвления амплитуды.** Теперь обратимся к случаю, когда условие (1.36) не выполняется. Анализ интеграла в (1.60) проводится вполне аналогично тому, как это было сделано в случае скачка кривизны. Мы предполагаем, что точка наблюдения расположена вблизи предельного луча, а именно выполнены условия (1.40) и (1.4). В малой окрестности критической точки фазы введем переменную интегрирования  $\sigma = \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta$  и разложим фазу (1.60) до квадратичных членов, а затем распространим интегрирование на всю ось:

$$\frac{hV}{k^{1+\lambda}} = \frac{h\Gamma(1+\lambda)e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda}}{\pi(k \sin \varphi_0)^{1+\lambda}} e^{ikr} \underbrace{\int}_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + O(\vartheta - \varphi_0) + O(kr\zeta^3)}{(\zeta - (\vartheta - \varphi_0))^{3+\lambda}} e^{-ikr\zeta^2/2} d\zeta. \quad (1.65)$$

Асимптотику правой части (1.65) нетрудно выразить через функцию параболического цилиндра  $D_{-3-\lambda}$ , см. (A.4):

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{1+\lambda}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{(\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \frac{hr^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} e^{ikr-i\frac{z^2}{2}} D_{-3-\lambda} \left( \sqrt{2}ze^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \times \\ \times \left[ 1 + O(kr(\vartheta - \varphi_0)^3) + O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Переменная  $z$  введена в (1.43).

Малость остаточных членов в (1.66) обеспечивается условиями (1.4) и (1.40). Мы опускаем процедуру их получения, она вполне аналогична описанной в разделе 1.1.4.

Точно так же, как это сделано в случае скачка кривизны, устанавливается, что асимптотические выражения (1.61) и (1.66) для функции  $hV/k^{1+\lambda}$  сшиваются друг с другом в области, где выполнены оба условия (1.36) и (1.40).

Выражение (1.66) растет при увеличении  $r$  и применимо для описания волнового поля лишь в пограничном слое (1.64) вблизи точки  $O$ . Распространение формулы (1.66) на большие расстояния путем замены локальных координат  $(\varrho, \vartheta)$  на полярные координаты  $(r, \varphi)$  приводит к выражению, пригодному в области, которая характеризуется условиями (1.49), (1.40),

$$k\kappa_0(r\tilde{\varphi})^2 \rightarrow 0. \quad (1.67)$$

и

$$kh(r\tilde{\varphi})^{2+\lambda} \rightarrow 0. \quad (1.68)$$

Ограничения на область пригодности вытекают из требования сшивания с лучевой формулой для отраженной волны при удалении от предельного луча (1.40), см. главу 6. Отметим, что при  $\kappa_0 \neq 0$  условие (1.67) строже условия (1.68).

### 1.3. Дифракция на негладкости производной кривизны

В этом разделе коротко рассмотрен случай негладкости производной кривизны. Предполагается, что производная порядка  $j = 1, 2, \dots$  кривизны контура  $\kappa$  имеет в точке  $O$  особенность вида (6), а кривизна и все ее производные порядка меньше  $j$  непрерывны. Из (6) и (5) видно, что при  $\lambda = 0$  производная кривизны в точке  $O$  имеет скачок. В случае  $0 < \lambda < 1$  мы имеем дело с гильдеровской сингулярностью.

В данном случае геометрический параметр задачи вводится по формуле

$$\varkappa = |\kappa_0|, \quad (1.69)$$

где  $\kappa_0 = \kappa(0)$  — значение кривизны в точке  $O$ . Далее мы работаем в рамках случая общего положения  $\kappa_0 \neq 0$ , а случай уплощения  $\kappa_0 = 0$  кратко обсудим в разделе 1.3.4. Параметр (1.69) естественным образом возникнет в (1.72).

#### 1.3.1. Локальные координаты в окрестности точки $O$

Как и в предыдущих разделах, будем характеризовать положение точки наблюдения  $M$  из малой окрестности точки  $O$  ортогональными координатами длина  $s$  и  $n$  дуги — нормаль и локальными полярными координатами (1.9).

Координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  выражаются через  $s$  и  $n$  следующим образом:

$$\begin{cases} x = s + \kappa_0 n s + \dots + h \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(j + \lambda + 2)} n s_+^{j+\lambda+1} + O(\varkappa^{j+2} r^{j+3}), \\ y = n - \frac{\kappa_0 s^2}{2} - \dots - h \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(j + \lambda + 3)} s_+^{j+\lambda+2} + O(\varkappa^{j+2} r^{j+3}). \end{cases} \quad (1.70)$$

Здесь многоточием заменены не зависящие от амплитуды сингулярности  $h$  гладкие члены. Из (1.70) легко получить соотношения

$$\varrho = r [1 + O(\varkappa r)], \quad \vartheta = \varphi [1 + O(\varkappa r)], \quad (1.71)$$

так что  $\varrho \approx r$  и  $\vartheta \approx \varphi$  в области, где справедливо условие

$$\varkappa r \rightarrow 0. \quad (1.72)$$

Все дальнейшие рассуждения относятся к области, где выполнено (1.72).

### 1.3.2. Падающая волна и оператор Гельмгольца в растянутых координатах

В малой окрестности точки  $O$  падающая волна в растянутых координатах  $S$  и  $N$  (1.13) имеет вид

$$u^{\text{inc}} = u_0^{\text{inc}} + \dots + \frac{h}{k^{j+\lambda+1}} u_{j+\lambda+1}^{\text{inc}} + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad (1.73)$$

где

$$u_0^{\text{inc}} = e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)}, \quad (1.74)$$

$$u_{j+\lambda+1}^{\text{inc}} = i\Gamma(\lambda+1) \left( \frac{\sin \varphi_0}{\Gamma(j+\lambda+3)} S_+^{j+\lambda+2} + \frac{\cos \varphi_0}{\Gamma(j+\lambda+2)} N S_+^{j+\lambda+1} \right) e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)},$$

ср. (1.15) и (1.50). В (1.73) первым многоточием мы заменили не зависящие от  $h$  гладкие члены порядка  $k^{-1}, \dots, k^{-j-1}$ , а вторым — члены большего порядка малости.

Оператор Гельмгольца переписывается в растянутых координатах  $S$  и  $N$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 = k^2 \left( L_0 + \dots + \frac{h}{k^{j+\lambda+1}} L_{j+\lambda+1} + \dots \right), \quad k \rightarrow \infty, \quad (1.75)$$

где

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial N^2} + \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 1, \quad (1.76)$$

$$L_{j+\lambda+1} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(j+\lambda+1)} \left( -2N S_+^{j+\lambda} \frac{\partial^2}{\partial S^2} + S_+^{j+\lambda} \frac{\partial}{\partial N} \right) - \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(j+\lambda)} N S_+^{j+\lambda-1} \frac{\partial}{\partial S}.$$

ср. (1.18) и (1.52). Функции  $S_+^\nu$  определены в (5)<sup>2</sup>.

В скобках в (1.75) первым многоточием мы заменили операторы с не зависящими от  $h$  гладкими коэффициентами порядка  $k^{-1}, \dots, k^{-j-1}$ , а вторым — члены большего порядка малости.

---

<sup>2</sup> Функция  $S_+^{j+\lambda-1}/\Gamma(j+\lambda)$  при  $j=0$  и  $\lambda \rightarrow 0$  переходит в дельта функцию Дирака  $\delta(S)$ , см. [12].

### 1.3.3. Задачи пограничного слоя

Как и прежде, мы ищем внутреннее разложение для уходящей волны в виде ряда, аналогичного (1.73),

$$u^{\text{out}} = U_0^{\text{out}} + \dots + \frac{h}{k^{j+\lambda+1}} U_{j+\lambda+1}^{\text{out}} + \dots, \quad k \rightarrow \infty \quad (1.77)$$

и интересуемся только линейным по  $h$  членом  $U_{j+\lambda+1}^{\text{out}}$ . Задача пограничного слоя для него имеет вид

$$\begin{cases} L_0 U_{j+\lambda+1}^{\text{out}} + L_{j+\lambda+1} U_0^{\text{out}} = 0, \end{cases} \quad (1.78a)$$

$$\begin{cases} U_{j+\lambda+1}^{\text{out}}|_{N=0} = -u_{j+\lambda+1}^{\text{inc}}|_{N=0}, \end{cases} \quad (1.78b)$$

а  $U_0^{\text{out}}$  решает задачу (1.21).

С учетом (1.74), (1.76) и (1.22), задача (1.78) принимает вид:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) U_{j+\lambda+1}^{\text{out}} = \Gamma(\lambda+1) \times \\ \times \left( \frac{i \sin \varphi_0 + 2 \cos^2 \varphi_0 N}{\Gamma(j+\lambda+1)} S_+^{j+\lambda} - \frac{i \cos \varphi_0}{\Gamma(j+\lambda)} N S_+^{j+\lambda-1} \right) e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}, \end{cases} \quad (1.79a)$$

$$\begin{cases} U_{j+\lambda+1}^{\text{out}}|_{N=0} = -i\Gamma(\lambda+1) \frac{\sin \varphi_0}{\Gamma(j+\lambda+3)} S_+^{j+\lambda+2} e^{iS \cos \varphi_0}. \end{cases} \quad (1.79b)$$

Действуя как в предыдущих разделах, получим, что  $U_{j+\lambda+1}^{\text{out}} = W + V$ , где

$$W = -i\Gamma(\lambda+1) \left( \frac{\cos \varphi_0}{\Gamma(j+\lambda+2)} N S_+^{j+\lambda+1} - \frac{\sin \varphi_0}{\Gamma(j+\lambda+3)} S_+^{j+\lambda+2} \right) e^{i(S \cos \varphi_0 + N \sin \varphi_0)}.$$

сшивается с отраженной волной и не представляет для нас интереса, а

$$\frac{hV(\varrho, \vartheta)}{k^{j+\lambda+1}} = \frac{h\Gamma(\lambda+1) \sin \varphi_0 e^{-i\frac{\pi}{2}(j+\lambda)}}{\pi k^{j+\lambda+1}} \int_{\gamma} \frac{e^{ik\varrho(\sqrt{1-\sigma^2} \sin \vartheta + \sigma \cos \vartheta)}}{(\sigma - \cos \varphi_0)^{j+\lambda+3}} d\sigma. \quad (1.80)$$

Контур интегрирования  $\gamma$  показан на Рисунке 1.9, обозначения  $\varrho$  и  $\vartheta$  введены в (1.9). Ветви многозначных функций  $(\sigma - \cos \varphi_0)^{-j-\lambda-3}$  (в случае  $\lambda > 0$ ) и  $\sqrt{1-\sigma^2}$  выбраны так, что их значения положительны при  $\sigma > \cos \varphi_0$  и  $-1 < \sigma < 1$ , соответственно; разрезы комплексной плоскости показаны на Рисунке 1.9.

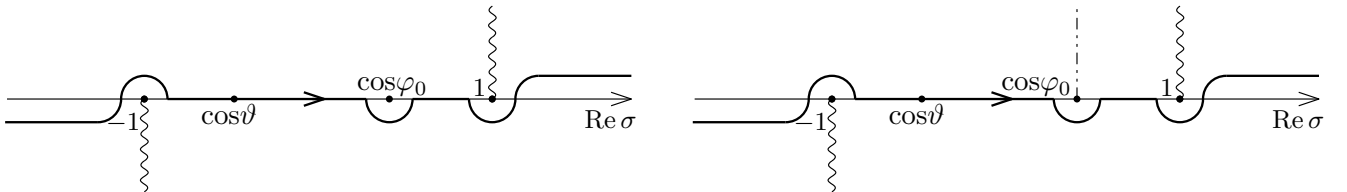


Рисунок 1.9 — Контур интегрирования в (1.80): слева для  $\lambda = 0$ , справа для  $0 < \lambda < 1$

Как и прежде, мы исследуем функцию (1.80) при  $kr \rightarrow \infty$  (1.4), опираясь на стандартную асимптотическую технику. Вклады в асимптотику дают критическая точка фазы  $\sigma = \cos \vartheta$  и особая точка амплитуды  $\sigma = \cos \varphi_0$  (при  $\lambda = 0$  — полюс, при  $\lambda \neq 0$  — точка ветвления).

**Критическая точка фазы не близка к особой точке амплитуды.** Предположим сначала, что точки  $\sigma = \cos \vartheta$  и  $\sigma = \cos \varphi_0$  достаточно удалены друг от друга, а именно, выполнено условие (1.36).

Дифрагированной волне отвечает вклад критической точки фазы, который имеет вид

$$\tilde{A}(\vartheta; k) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k\rho(\vartheta - \varphi_0)^2}\right) \right], \quad (1.81)$$

где

$$\tilde{A}(\vartheta; k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\Gamma(1+\lambda) \sin \varphi_0 \sin \vartheta}{k^{j+\lambda+1} (\cos \vartheta - \cos \varphi_0)^{j+\lambda+3}} e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{(j+\lambda)\pi}{2}}. \quad (1.82)$$

Сошьем выражение (1.81) с цилиндрической волной (1.5) при условии (1.36). Учитывая соотношения  $\rho \approx r$ ,  $\vartheta \approx \varphi$  (см. (1.71) и (1.72)), получим, что  $A(\varphi; k) = \tilde{A}(\varphi; k)$ ,  $\mathcal{E} = O(1/kr\tilde{\varphi}^2)$ , и дифрагированная волна  $u^{\text{dif}}$  имеет вид

$$u^{\text{dif}} = \tilde{A}(\varphi; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kr\tilde{\varphi}^2}\right) \right], \quad (1.83)$$

ср. (1.34) и (1.61). Малость остаточного члена в (1.83) обеспечивается соотношением (1.36). Выражение (1.83) распространяется на расстояния, не удовлетворяющие ограничению (1.72).

Сшивку (1.81) и (1.83) происходит в области, где выполнено условие

$$k\kappa r^2 \rightarrow 0, \quad (1.84)$$

см. (1.69), характеризующее размер пограничного слоя вокруг точки  $O$ .

**Критическая точка фазы близка к особой точке амплитуды.** Если же точка наблюдения расположена вблизи предельного луча, а именно выполнено условие (1.40), то критическая точка фазы сливается с особой точкой амплитуды, и функция  $hV/k^{j+\lambda+1}$  (1.80) выражается через функцию параболического цилиндра:

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{j+\lambda+1}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\Gamma(\lambda+1)}{(\sin \varphi_0)^{j+\lambda+1}} \frac{\rho^{1+\frac{j+\lambda}{2}}}{k^{\frac{j+\lambda}{2}}} e^{i\frac{(j+\lambda)\pi}{4}} e^{ik\rho - i\frac{z^2}{2}} D_{-j-\lambda-3} \left( \sqrt{2} z e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \times \\ &\times \left( 1 + O(k\rho(\vartheta - \varphi_0)^3) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k\rho}}\right) \right), \end{aligned} \quad (1.85)$$

ср. (1.42) и (1.66). Полутеневая переменная  $z$  введена в (1.43). Малость погрешности обеспечивается условиями (1.4) и (1.40).

Пользуясь асимптотическими формулами для функций параболического цилиндра (А.5) и (А.6), нетрудно показать, что (1.85) сшивается с (1.81).

С помощью замены  $(\varrho, \vartheta)$  на  $(r, \varphi)$  выражение (1.85) распространяется из пограничного слоя (1.84) вблизи  $O$  в область, характеризуемую неравенствами (1.72), (1.40) и (1.46).

### 1.3.4. Случай уплощения контура

Если  $O$  является точкой уплощения контура  $C$ , то введенный выше геометрический параметр  $\varkappa$  (1.69) обращается в нуль, и оценки размеров областей пригодности разложений (1.71), (1.81) и (1.85) требуют модификации. Для этого введем геометрический параметр задачи следующим образом. Из (6) ясно, что при малых  $s$

$$\varkappa(s) = \begin{cases} \varkappa_- |s|^q + \dots, & \text{при } s < 0, \\ \varkappa_+ s^q + \dots, & \text{при } s \geq 0 \end{cases}$$

с некоторым  $q$ , удовлетворяющим условию  $0 \leq q \leq j + \lambda$ , причем хотя бы одна из констант  $\varkappa_{\pm}$  не равна нулю. Положим  $\varkappa = \max\{|\varkappa_-|, |\varkappa_+|\}$ . Теперь формулы (1.70), связывающие координаты  $x$  и  $y$  с координатами  $s$  и  $n$ , можно записать в виде  $x = s + O(\varkappa r^{q+2})$ ,  $y = n + O(\varkappa r^{q+2})$ . Отсюда нетрудно получить, что оценки (1.72) и (1.84) заменяются на

$$\varkappa r^{q+1} \rightarrow 0, \quad k \varkappa r^{q+2} \rightarrow 0,$$

соответственно. Заметим, что чем больше  $q$  (чем контур  $C$  локально ближе к прямой), тем шире области, характеризуемые этими условиями.

## 1.4. Импедансные граничные условия

Аналогично могут быть рассмотрены случаи граничного условия Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = 0$$

и импедансные граничные условия (условия третьего рода)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + ikgu \right) \Big|_C = 0.$$

Здесь  $\partial/\partial n$  — производная по нормали к контуру, направленной внутрь области  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  (см. Рисунок 1.1),  $g = \text{const} \in \mathbb{C}$  — постоянный поверхностный импеданс. Импеданс предполагается «пассивным», т.е.  $\text{Re } g \geq 0$ , что обеспечивает отсутствие поверхностных волн. Предельные



значения импеданса  $g = 0$  и  $g = \infty$  соответствуют идеальным граничным условиям Неймана и Дирихле. Опуская все выкладки, приведем выражения для дифракционного коэффициента и для поля вблизи предельного луча в задачах с импедансным контуром. Мы коснемся только случая, когда негладкость имеет производная кривизны порядка  $j$ , см. (6). Чтобы перейти к случаям скачка (2) и гельдеровской сингулярности (4) кривизны, следует положить в формулах  $j = 0$ .

Введем стандартный коэффициент отражения плоской волны (см. [42])

$$R(\varphi_0) = \frac{\sin \varphi_0 - g}{\sin \varphi_0 + g}. \quad (1.86)$$

Если волна падает на контур под *критическим углом*, определяемым равенством

$$\sin \varphi_0 = g, \quad (1.87)$$

(что возможно при  $0 < g \leq 1$ ), то  $R = 0$ .

В области, где выполнено (1.36), дифракционный коэффициент дается выражением

$$A(\varphi; k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\Gamma(1+\lambda) \sin \varphi_0 \sin \varphi (\cos \varphi_0 \cos \varphi + g^2 - 1) e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{(j+\lambda)\pi}{2}}}{k^{j+\lambda+1}(g + \sin \varphi_0)(g + \sin \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{j+\lambda+3}}. \quad (1.88)$$

Отметим, что если волна приходит в точку  $O$  под критическим углом  $\sin \varphi_0 = g$  (см. (1.87)), то дифракционный коэффициент (1.88) принимает вид

$$A(\varphi; k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h\Gamma(\lambda+1) \cos \varphi_0 \sin \varphi e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{(j+\lambda)\pi}{2}}}{k^{j+\lambda+1}(\sin \varphi_0 + \sin \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{j+\lambda+2}}, \quad (1.89)$$

и порядок роста при приближении к предельному лучу становится меньше.

В случае  $\lambda = 0$  формулы (1.88) и (1.89) согласуются с результатом Келлера и Каминецкого [16], а при предельных значениях импеданса  $g = 0$  (условие Дирихле) и  $g = \infty$  (условие Неймана) — с выражениями, полученными Филипповым [17] в нестационарном случае.

Вблизи предельного луча, в области, где выполнены условия (1.4) и (1.40), влияние негладкости кривизны на волновое поле описывается выражением

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{j+\lambda+1}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\Gamma(\lambda+1)}{(\sin \varphi_0)^{j+\lambda+1}} \frac{\varrho^{1+\frac{j+\lambda}{2}}}{k^{\frac{j+\lambda}{2}}} e^{i\frac{(j+\lambda)\pi}{4}} e^{ik\varrho - i\frac{z^2}{2}} \times \\ &\times \left[ -R(\varphi_0) D_{-j-\lambda-3} \left( \sqrt{2} z e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) + \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{(g + \sin \varphi_0)^2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k\varrho}} D_{-j-\lambda-2} \left( \sqrt{2} z e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \right] (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Величина  $z$  введена в (1.43), а коэффициент отражения  $R$  в (1.86). Если угол скольжения  $\varphi_0$  не близок к критическому, а именно  $\sqrt{kr}|g - \sin \varphi_0| \rightarrow \infty$ , то главный член асимптотики дается функцией  $D_{-j-\lambda-3}$ . Если же  $\sqrt{kr}|g - \sin \varphi_0| \rightarrow 0$ , то главный член выражается через  $D_{-j-\lambda-2}$ . При  $\sqrt{kr}|g - \sin \varphi_0| \sim O(1)$  слагаемые в квадратных скобках в правой части (1.90) равноправны.

## 1.5. Падение цилиндрической волны

Обсудим кратко, чем случай падения плоской волны (1.2) отличается от случая падения цилиндрической волны. Ограничимся случаем скачка кривизны, случаи гельдеровской сингулярности и негладкости производной рассматриваются аналогично.

Пусть на контур падает волна от точечного источника, расположенного в точке  $M_0 = (x_0, y_0)$ :

$$u^{\text{inc}} = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kL), \quad L = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Здесь  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода [43]. Угол скольжения, под которым волна приходит в точку  $O$ , будем обозначать  $\varphi_0$ . Как и раньше, падение предполагается некасательным, т.е.  $\varphi_0 > 0$ .

Полное волновое поле над контуром описывается уравнением

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0),$$

а уходящее поле — по-прежнему, однородным уравнением Гельмгольца (1).

В высокочастотном приближении расстояние  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  от  $O$  до точки источника  $M_0$  много больше длины волны,  $kr_0 \rightarrow \infty$ , и для точек наблюдения  $M = (x, y)$ , расположенных близко к  $O$ , функцию Ханкеля можно заменить ее асимптотикой:

$$u^{\text{inc}} = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikL}}{\sqrt{kL}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{kL}\right) \right). \quad (1.91)$$

Выражение (1.91) легко переписывается в растянутых координатах  $(S, N)$  с помощью соотношений (1.70):

$$\begin{aligned} u^{\text{inc}} = & -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} e^{i(S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0)} \left[ 1 - \frac{S \cos \varphi_0 - N \sin \varphi_0}{kr_0} + \right. \\ & + \frac{1}{kr_0} (S \sin \varphi_0 + N \cos \varphi_0)^2 + \frac{\varkappa_0}{k} \left( \frac{\sin \varphi_0}{2} S^2 + SN \cos \varphi_0 \right) + \\ & \left. + \frac{h}{k} \left( \frac{\sin \varphi_0}{2} S_+^2 + S_+ N \cos \varphi_0 \right) + O\left(\frac{1}{(kr_0)^2}\right) \right] \left( 1 + O\left(\frac{1}{kr_0}\right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что линейный по скачку кривизны  $h$  член в разложении цилиндрической волны  $u^{\text{inc}}$  такой же, как и в разложении плоской волны, см. (1.16). Следовательно, задача для линейного  $h$  члена уходящей волны в главном порядке совпадает с (1.23) с точностью до постоянного множителя

$$-\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}} \quad (1.92)$$

в правой части и в граничном условии.

Таким образом, выражения, описывающие дифрагированную волну и влияние скачка кривизны на уходящее поле вблизи предельного луча в случае падения цилиндрической волны, отличаются от соответствующих формул, полученных в случае падения плоской волны, лишь постоянным множителем (1.92).

## 1.6. Полученные результаты и возникшие задачи

В этой главе последовательный метод пограничного слоя развит в малой окрестности особой точки контура  $O$  в задачах дифракции на скачке кривизны, гельдеровской сингулярности кривизны и негладкости производной кривизны некоторого порядка. Размеры пограничных слоев характеризуются условиями (1.38), (1.64) и (1.84), соответственно.

Построены формулы для дифракционных коэффициентов дифрагированных волн (см. (1.35), (1.62) и (1.82)), пригодные как на малых, так и на умеренных расстояниях от контура. Поля в переходных зонах описаны в терминах функций параболического цилиндра (см. (1.42), (1.66) и (1.85)), но лишь на малых расстояниях от точки негладкости. Поля на больших расстояниях исследуются ниже: сначала в рамках эвристического подхода, позволяющего нам угадать характеризующие поле спецфункции, а затем в рамках последовательной погранслоистой техники.

## Глава 2. Поле вблизи предельного луча. Кирхгофская эвристика

В данной главе дифракция на скачке кривизны и на гельдеровской сингулярности кривизны будет рассмотрена в рамках эвристического метода Кирхгофа. Это позволит нам определить вид спецфункций, описывающих поле в переходных зонах на умеренных расстояниях.

Для симметрии выкладок мы считаем, что на контур падает не плоская волна (1.2), а волна от точечного источника

$$u^{\text{inc}} = G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kL), \quad L = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (2.1)$$

Здесь  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода [43]. Мы предполагаем, что падающая волна приходит в точку  $O$  некасательно, см. Рисунок 2.1.

Полное волновое поле  $u = u^{\text{inc}} + u^{\text{out}}$  над контуром  $C$  описывается уравнением Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (2.2)$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака,  $M_0 = (x_0, y_0)$  — точка источника,  $k$  — волновое число (декартова система координат введена как показано на Рисунке 2.1: начало координат расположено в точке негладкости кривизны  $O$ , и ось  $x$  касается контура). Отметим, что  $G(x, y; x_0, y_0)$  является удовлетворяющим условию излучения решением уравнения (2.2).

На контуре предполагается выполненным условие Дирихле (1.1), на бесконечности  $u$  удовлетворяет условию излучения.

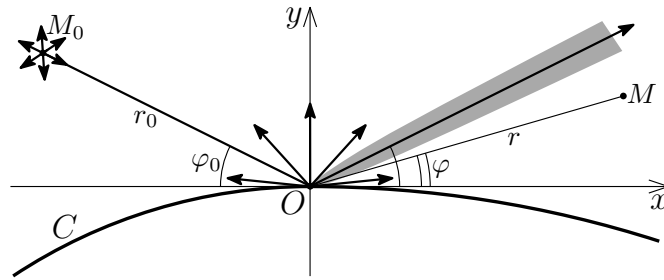


Рисунок 2.1 — Дифрагированная волна и переходная зона

Обозначим за  $r_0$  и  $r$  расстояния от точки  $O$  до точек источника  $M_0 = (x_0, y_0)$  и наблюдения  $M = (x, y)$ , а за  $\varphi_0$  и  $\varphi$  — углы между прямой  $x$  и лучами  $OM_0$  и  $OM$ , соответственно (см. Рисунок 2.1). В наших рассмотрениях  $\varphi_0 > 0$ . Предельный луч задается уравнением  $\varphi = \varphi_0$ . Предполагается, что точка источника  $M_0$  и точка наблюдения  $M$  лежат на больших

по сравнению с длиной волны расстояниях от точки  $O$ , т.е. выполнены условия (1.4) и

$$kr_0 \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

В области над границей  $u^{\text{out}}$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (1). Формула Грина (см., например, [5]) позволяет выразить поле  $u^{\text{out}}$  в точке  $M$  через значения его и его нормальной производной на границе:

$$u^{\text{out}}(x, y) = \int_C ds \left( G(x, y; X, Y) \frac{\partial u^{\text{out}}}{\partial n}(X, Y) - u^{\text{out}}(X, Y) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y; X, Y) \right). \quad (2.4)$$

Здесь  $s$  — длина дуги контура, отсчитываемая от  $O$ , см. Рисунок 2.1,  $X = X(s)$  и  $Y = Y(s)$  — координаты переменной точки  $N(s)$  на контуре  $C$ ,  $\partial/\partial n$  — производная по внутренней нормали к границе области. Метод Кирхгофа основан на подстановке в (2.4) геометрических аппроксимаций  $u^{\text{out}}$  и  $\partial u^{\text{out}}/\partial n$  (см., например, [5]).

Нас интересует уходящее поле  $u^{\text{out}}$  вблизи предельного луча, где  $\varphi \approx \varphi_0$ , на умеренных расстояниях от точки негладкости.

## 2.1. Предварительный анализ интеграла Кирхгофа

Согласно традиционному кирхгофовскому подходу [5], значения уходящего поля и его нормальной производной на границе принимаются равными, соответственно,

$$u^{\text{out}}(s) = -u^{\text{inc}}(s), \quad \frac{\partial u^{\text{out}}}{\partial n}(s) = \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n}(s), \quad (2.5)$$

где  $u^{\text{out}}(s) := u^{\text{out}}(X(s), Y(s))$ .

Обозначим расстояние от произвольной точки контура  $N(s)$  до точки источника  $M_0$  через  $l_0(s)$ , а до точки наблюдения  $M$  через  $l(s)$  (см. Рисунок 2.2):

$$\begin{aligned} l_0(s) &:= |NM_0| = \sqrt{(X(s) - x_0)^2 + (Y(s) - y_0)^2}, \\ l(s) &:= |NM| = \sqrt{(X(s) - x)^2 + (Y(s) - y)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отметим, что  $r_0 = l_0(0)$  и  $r = l(0)$ . Пользуясь асимптотикой функции Ханкеля [43]

$$H_0^{(1)}(A) = \sqrt{\frac{2}{\pi A}} e^{iA - i\frac{\pi}{4}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|A|}\right) \right), \quad |A| \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

получим для функции  $G(x_0, y_0; X, Y)$ , см. (2.1), и ее нормальной производной на границе при  $kl_0(s) \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} G(x_0, y_0; X, Y) &= -\frac{e^{ikl_0(s) + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi kl_0(s)}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{kl_0(s)}\right) \right), \\ \frac{\partial G}{\partial n}(x_0, y_0; X, Y) &= -ik \frac{\partial l_0}{\partial n}(s) \frac{e^{ikl_0(s) + i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi kl_0(s)}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{kl_0(s)}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

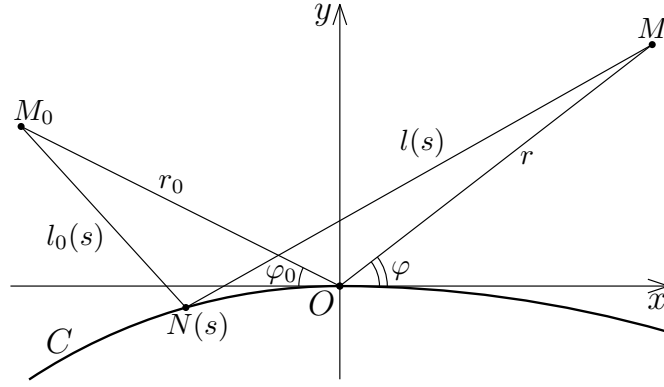


Рисунок 2.2 — Виртуальные лучи

Аналогичный вид имеют функция  $G(x, y; X, Y)$  и ее нормальная производная при  $kl(s) \rightarrow \infty$ .

Подынтегральная функция в (2.4) принимает вид

$$-\frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial l_0}{\partial n}(s) + \frac{\partial l}{\partial n}(s) \right) \frac{e^{ik\tau(s)}}{\sqrt{l_0(s)l(s)}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{kl_0(s)}\right) + O\left(\frac{1}{kl(s)}\right) \right), \quad (2.9)$$

где

$$\tau(s) = l_0(s) + l(s) \quad (2.10)$$

— длина ломаной  $M_0N(s)M$ .

Таким образом интеграл Кирхгофа ((2.4) с подстановкой (2.5) и (2.8)) имеет вид суммы вкладов виртуальных лучей  $M_0N(s)M$ . Поле в точке наблюдения, лежащей вблизи предельного луча, формируется в результате синфазного сложения виртуальных лучей, у которых точки  $N(s)$  лежат вблизи  $O$ .

Перейдем к исследованию интеграла Кирхгофа в случае скачка кривизны контура.

## 2.2. Случай скачка кривизны

Рассмотрим дифракцию на контуре  $C$ , кривизна которого в точке  $O$  имеет скачок (2). Нам удобно положить  $\varkappa_- = \varkappa_0$  и  $\varkappa_+ = \varkappa_0 + h$ , тогда

$$\varkappa = \begin{cases} \varkappa_- & \text{слева от } O, \\ \varkappa_+ & \text{справа от } O. \end{cases} \quad (2.11)$$

Также мы будем использовать геометрический параметр контура  $\varkappa$  (1.8).

Мы считаем, что источник падающей волны расположен не слишком близко к контуру, т.е.  $\varkappa r_0 \sim O(1)$ . Нас интересует волновое поле на умеренных расстояниях от контура

$$\varkappa r \sim O(1). \quad (2.12)$$

### 2.2.1. Разложения при малых $s$

Выражение для длин звеньев  $N(s)M_0$ ,  $N(s)M$  виртуального луча зависит от положения точки  $N(s)$  относительно  $O$ . Обозначим их  $l_0^+$ ,  $l^+$  в случае  $s > 0$  и  $l_0^-$ ,  $l^-$  в случае  $s < 0$ . Раскладывая  $l_0(s)$  (2.6) при малых  $s$  справа и слева от нуля до квадратичных членов, в результате прямого вычисления получим<sup>1</sup>

$$l_0^\pm(s) = r_0 + s \cos \varphi_0 + \frac{s^2}{2} \left( \varkappa_\pm \sin \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{r_0} \right) + O \left( \frac{s^3}{r_0^2} (1 + \varkappa^2 r_0^2) \right).$$

Выражения для  $l^\pm$  получаются отбрасыванием индекса 0 и заменой знака «+» перед линейным по  $s$  членом на «-». Для длины виртуального луча (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \tau_\pm(s) = l_0^\pm(s) + l^\pm(s) = r_0 + r + s(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + \\ + \frac{s^2}{2} \left( \varkappa_\pm(\sin \varphi_0 + \sin \varphi) + \frac{\sin^2 \varphi_0}{r_0} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \right) + O \left( s^3 \left( \varkappa^2 + \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь следует взять индекс «+» (соответственно «-»), если точка  $N(s)$  лежит справа (соответственно слева) от  $O$ . Из (2.6) нетрудно получить, что

$$\left. \frac{\partial l_0(s)}{\partial n} \right|_{s=0} = -\sin \varphi_0, \quad \left. \frac{\partial l(s)}{\partial n} \right|_{s=0} = -\sin \varphi. \quad (2.13)$$

Подынтегральная функция (2.9) при малых  $s$  переписывается в виде

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\sin \varphi_0 + \sin \varphi}{\sqrt{r_0 r}} e^{ik\tau_\pm(s)} \left[ 1 + O \left( \frac{1}{kr_0} + \frac{1}{kr} \right) + O \left( s \left( \varkappa + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right) \right) \right]. \quad (2.14)$$

### 2.2.2. Замена переменной в интеграле Кирхгофа

Для точки наблюдения  $M$ , расположенной вблизи предельного луча,  $\varphi \approx \varphi_0$  (см. Рисунок 2.2), и выражение (2.15) мгновенно переписывается в виде

$$\tau_\pm(s) = r_0 + r + s \sin \varphi_0 \tilde{\varphi} + \frac{s^2}{2\rho} \sin^2 \varphi_0 \left( \frac{2\varkappa_\pm \rho}{\sin \varphi_0} + 1 \right) + \epsilon(s), \quad (2.15)$$

где  $\epsilon(s) = O(s(\tilde{\varphi})^2) + O(s^2 \tilde{\varphi}(\varkappa + r_0^{-1} + r^{-1})) + O(s^3(\varkappa^2 + r_0^{-2} + r^{-2}))$ . Здесь введено важное для дальнейшего изложения обозначение

$$\rho = \frac{r_0 r}{r_0 + r}, \quad (2.16)$$

и по-прежнему  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$ , см. (1.7). Выражение  $\rho$  часто встречается при описании полей в областях слияния двух цилиндрических волн (см., например, [44; 45]). Очевидно, что при  $\varkappa r_0 \sim O(1)$  величины  $\varkappa r$  и  $\varkappa \rho$  одного порядка, и что условие

$$k\rho \rightarrow \infty,$$

---

<sup>1</sup> Здесь использованы выражения для координат точки контура, которые легко получить, положив  $n = 0$  в (1.10).

равносильно паре условий (1.4) и (2.3)<sup>2</sup>.

В интеграле Кирхгофа удобно перейти от переменной  $s$  к безразмерной переменной

$$p = s\sqrt{k/\rho}\sin\varphi_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (2.17)$$

Поскольку падающая волна приходит в точку  $O$  некасательно,  $\sin\varphi_0 > 0$ . Фаза подынтегральной функции  $ik\tau_{\pm}$  принимает вид

$$ik\tau_{\pm} = ik(r_0 + r) - \left(\xi p + J_{\pm} \frac{p^2}{2}\right) + O((p\xi + p^2)\tilde{\varphi}) + O\left(\frac{p^3}{\sqrt{k\rho}}\right). \quad (2.18)$$

Здесь введены обозначения

$$\xi = \sqrt{k\rho}\tilde{\varphi}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (2.19)$$

и

$$J_{\pm} = 1 + \frac{2\mathfrak{a}_{\pm}\rho}{\sin\varphi_0}, \quad (2.20)$$

см. (2.16). Величины  $J_{\pm}$  связаны с геометрическими расхождениями  $\mathcal{J}_{\pm}$  цилиндрических волн, отраженных от дуг окружностей с радиусами  $\mathfrak{a}_{\pm}^{-1}$  (см. [2]):

$$\mathcal{J}_{\pm} = r_0 + r + \frac{2\mathfrak{a}_{\pm}r_0r}{\sin\varphi_0} = (r_0 + r)J_{\pm}.$$

В случае выпуклого контура  $2\mathfrak{a}_{\pm}\rho/\sin\varphi_0 > 0$ , и  $J_{\pm} \sim O(1)$  как при  $\kappa\rho \rightarrow 0$ , так и при  $\kappa\rho \sim O(1)$ . Если же контур имеет вогнутый участок, например,  $\mathfrak{a}_{-} < 0$ , то  $J_{-}$  обращается в нуль при  $\rho = -\sin\varphi_0/2\mathfrak{a}_{-}$ , что соответствует каустике. Тогда мы ограничимся рассмотрением области, где  $\rho + \sin\varphi_0/2\mathfrak{a}_{\pm}$  не мало, и  $J_{\pm} \sim O(1)$ .

### 2.2.3. Разбиение интеграла и упрощение подынтегрального выражения

Следуя стандартной схеме (см., например, [6; 18; 40]), представим интеграл Кирхгофа в виде суммы двух интегралов по участкам  $p < 0$  и  $p > 0$ , где подынтегральная функция гладкая. Возникшие интегралы исследуются с помощью традиционных приемов: мы упрощаем подынтегральное выражение для малых  $p$ , удерживая квадратичные члены в фазе и главные члены в амплитуде, переносим малые члены из фазы в амплитуду и распространяем интегрирование на промежутки  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$ , соответственно.

Таким образом, учитывая (2.14), (2.17) и (2.18), получаем выражение для уходящего поля вблизи предельного луча

$$u^{\text{out}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4\pi} \frac{e^{ik(r_0+r)}}{\sqrt{k(r_0+r)}} (I_{-} + I_{+}), \quad (2.21)$$

---

<sup>2</sup> Это видно из равносильности условия  $1/k\rho = 1/kr_0 + 1/kr \rightarrow 0$  паре условий  $1/kr_0 \rightarrow 0$  и  $1/kr \rightarrow 0$ .



где

$$I_{\pm} = \int_{-\infty}^0 dp e^{\pm \xi p - J_{\pm} \frac{p^2}{2}} (1 + \epsilon(p)),$$

причем  $\epsilon(p) = O(\tilde{\varphi}) + O(1/k\rho) + O(p\sqrt{k\rho}\tilde{\varphi}^2) + O(p^2\tilde{\varphi}) + O(p^3/\sqrt{k\rho})$ . Отметим, что множитель перед  $I_- + I_+$  в (2.21) описывает волну от соответствующего мнимого источника.

#### 2.2.4. Асимптотика (2.21) вблизи предельного луча.

Перейдем в интегралах  $I_{\pm}$  к переменным  $p\sqrt{J_{\pm}/2} \mp \xi/\sqrt{2J_{\pm}}$ , после чего интегралы легко переписываются в виде

$$I_{\pm} = \int_{-\infty}^0 dp e^{\pm \xi p - J_{\pm} \frac{p^2}{2}} (1 + \epsilon(p)) = \sqrt{\frac{2\pi}{J_{\pm}}} e^{\frac{\xi^2}{2J_{\pm}}} \Phi\left(\mp \frac{\xi e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2J_{\pm}}}\right) (1 + \varepsilon),$$

где  $\Phi$  — интеграл Френеля [5],

$$\Phi(A) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^A dq e^{iq^2}, \quad (2.22)$$

а  $\varepsilon = O(\sqrt{k\rho}\tilde{\varphi}^2) + O(1/\sqrt{k\rho})$ .

Введем обозначение

$$\zeta = \sqrt{\frac{k\rho}{2}} \tilde{\varphi}. \quad (2.23)$$

Нетрудно видеть, что выражение, входящее в аргументы интегралов Френеля, переписываются в терминах  $\zeta$ :  $\xi e^{i\pi/4}/\sqrt{2} = \zeta$ , см. (2.19). Величина  $\zeta$  характерна для аргументов спецфункций, описывающих поля в областях слияния двух цилиндрических волн. Когда источник удаляется на бесконечность вдоль фиксированного направления (т.е.  $\kappa r_0 \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_0 = \text{const}$ ),  $\zeta$  переходит в величину  $z = \sqrt{kr/2} \tilde{\varphi}$ , ср. (1.43), типичную для областей слияния цилиндрической и плоской волн.

Формула (2.21) для уходящего поля принимает вид

$$u^{\text{out}} = \frac{e^{ik(r+r_0)+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k(r+r_0)}} \left( \frac{e^{-i\frac{\zeta^2}{J_-}}}{\sqrt{J_-}} \Phi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{J_-}}\right) + \frac{e^{-i\frac{\zeta^2}{J_+}}}{\sqrt{J_+}} \Phi\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{J_+}}\right) \right) (1 + \varepsilon), \quad (2.24)$$

где  $\varepsilon$  определено после (2.22). Подобную формулу получили Рогофф и Киселев [18], не следившие за остаточными членами.

В задачах дифракции цилиндрической волны на клине [44] и плоской волны на ленте [45] переменная  $\zeta$  выступала как аргумент специальных функций, описывавших поля в переходных зонах. В [18], где рассматривалась дифракция цилиндрической волны на изогнутой границе с разрывом кривизны, аргументами таких функций были, как и в (2.24),

отношения  $\zeta/\sqrt{J_{\pm}}$ . В случае клина и ленты кривизна гладких участков границы равняется нулю, и  $J_{\pm} = 1$ . Отметим, что когда  $\mathfrak{a}_{\pm} = 0$ , формула (2.24) описывает поле, отраженное от соответствующей плоской границы.

В главе 4 будет показано, что выражение (2.24) согласуется с формулой (1.42), полученной в малой окрестности точки  $O$ .

### 2.3. Случай гельдеровской сингулярности кривизны

Рассмотрение случая, когда кривизна контура имеет в точке  $O$  гельдеровскую сингулярность (4), проводится вполне аналогично. Нас интересует поле на умеренных расстояниях от контура

$$\mathfrak{a}_0 r \sim O(1), \quad h r^{1+\lambda} \sim O(1) \quad (2.25)$$

в высокочастотном приближении (1.4), (2.3). Условия типа (2.25) предполагаются выполненными и для расстояния  $r_0$  до точечного источника.

Пользуясь выражениями для координат точки контура, которые получаются при подстановке  $n = 0$  в (1.47), вместо (2.15) получим

$$\tau(s) = r_0 + r + s \sin \varphi_0 \tilde{\varphi} + \frac{s^2}{2\rho} J \sin^2 \varphi_0 + h \frac{2s_+^{2+\lambda} \sin \varphi_0}{(2+\lambda)(1+\lambda)} + \epsilon(s), \quad (2.26)$$

где  $\epsilon(s) = O(s\tilde{\varphi}^2) + O(s^2\tilde{\varphi}J/\rho) + O(hs^{2+\lambda}\tilde{\varphi}) + O(s^3J^2/\rho^2)$ . Здесь  $\tilde{\varphi}$  введено в (1.7),  $\rho$  — в (2.16), а

$$J = 1 + \frac{2\mathfrak{a}_0\rho}{\sin \varphi_0}. \quad (2.27)$$

Величина  $J$  связана с геометрическим расхождением  $\mathcal{J}$  цилиндрической волны, отраженной от дуги окружности с радиусом  $\mathfrak{a}_0^{-1}$  (см. [2]):

$$\mathcal{J} = r_0 + r + \frac{2\mathfrak{a}_0 r_0 r}{\sin \varphi_0} = (r_0 + r)J.$$

В дальнейших рассмотрениях предполагается, что  $J$  порядка единицы.

После перехода к переменной (2.17) фаза подынтегральной функции  $ik\tau$  в интеграле Кирхгофа (2.4) принимает вид

$$ik\tau = ik(r_0 + r) - \left( \xi p + J \frac{p^2}{2} \right) - \frac{2h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}} e^{i\frac{\lambda\pi}{4}} p_+^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)k^{\frac{\lambda}{2}} (\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} + \\ + O\left( \left( \xi p + p^2 + \frac{h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} p^{2+\lambda} \right) \tilde{\varphi} \right) + O\left( \frac{p^3}{\sqrt{k\rho}} \right), \quad (2.28)$$

где  $\xi$  введено в (2.19). Из (2.28) видно, что линейное по  $h$  слагаемое мало при условии

$$\frac{h\rho^{1+\lambda}}{(k\rho)^{\frac{\lambda}{2}}} \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Поскольку  $\lambda > 0$  и  $k\rho \rightarrow \infty$ , это неравенство выполнено как при малых ( $h\rho^\lambda \rightarrow 0$ ) так и при умеренных ( $h\rho^\lambda \sim O(1)$ ) значениях  $\rho$ .

Учитывая (2.19) и (2.28) и перенося из фазы в амплитуду малые члены, получаем выражение для уходящего поля вблизи предельного луча

$$u^{\text{out}} = \frac{e^{ik(r_0+r)+i\frac{\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{k(r_0+r)}} \left( I_0 - \frac{2h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{(2+\lambda)(1+\lambda)k^{\frac{\lambda}{2}}(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}} I_\lambda \right), \quad (2.30)$$

где

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\xi p - J\frac{p^2}{2}} (1 + \epsilon(p)), \quad (2.31)$$

$$I_\lambda = \int_0^{\infty} dp p^{2+\lambda} e^{-\xi p - J\frac{p^2}{2}} \left( 1 + \epsilon(p) + O\left(\frac{h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} p^{2+\lambda}\right) \right), \quad (2.32)$$

причем  $\epsilon(p) = O(1/k\rho) + O((1+\xi p + p^2)\tilde{\varphi}) + O(p^3/\sqrt{k\rho})$ . Ниже мы увидим, что слагаемое с  $I_0$  соответствует главному члену лучевой формулы для волны, отраженной от контура с кривизной  $\kappa_0$ , а линейное по  $h$  слагаемое с  $I_\lambda$  описывает в главном порядке влияние сингулярности кривизны на волновое поле.

Интеграл  $I_0$  в (2.30) легко берется:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\xi p - J\frac{p^2}{2}} (1 + \epsilon(p)) = \sqrt{\frac{2\pi}{J}} e^{\frac{\xi^2}{2J}} (1 + \varepsilon_0). \quad (2.33)$$

Здесь  $\varepsilon_0 = O(\sqrt{k\rho}\tilde{\varphi}^2) + O(1/\sqrt{k\rho})$ . С помощью интегрального представления для функции параболического цилиндра (А.3) интеграл  $I_\lambda$  переписывается в виде

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \int_0^{\infty} dp p^{2+\lambda} e^{-\xi p - J\frac{p^2}{2}} \left( 1 + \epsilon(p) + O\left(\frac{h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} p^{2+\lambda}\right) \right) = \\ &= \frac{\Gamma(3+\lambda)}{J^{\frac{3+\lambda}{2}}} e^{\frac{\xi^2}{4J}} D_{-3-\lambda} \left( \frac{\xi}{\sqrt{J}} \right) (1 + \varepsilon_\lambda), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где  $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_0 + O(h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}/k^{\frac{\lambda}{2}})$ .

Подставляя (2.33) и (2.34) в формулу (2.30) для уходящего поля и учитывая выражение (2.19) для  $\xi$ , получим

$$\begin{aligned} u^{\text{out}} &= \frac{e^{ik(r_0+r)-i\frac{\xi^2}{2J}+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{kJ(r_0+r)}} (1 + \varepsilon_0) - \\ &- h \frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}} \frac{\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}J^{1+\frac{\lambda}{2}}} \frac{e^{ik(r_0+r)-i\frac{\xi^2}{2J}+i\frac{\pi}{4}}}{2\pi\sqrt{kJ(r_0+r)}} D_{-3-\lambda} \left( \sqrt{\frac{2}{J}} \zeta e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) (1 + \varepsilon_\lambda). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Величина  $\zeta$  введена в (2.23). Очевидно, что формула (2.35) согласуется с выражением (1.66), справедливым вблизи точки  $O$ .

Использованные приемы можно распространить на задачи дифракции на контурах с негладкой производной кривизны (6). По существу, выражение, даваемое кирхгофской эвристикой на умеренных расстояниях, будет отличаться от формулы (1.85), полученной в разделе 1.3 для малых расстояний, лишь заменой  $\varrho$  на  $\rho/J$  и, соответственно,  $z$  (1.43) на  $\zeta/\sqrt{J}$ .

## 2.4. Обсуждение

Рассмотрев задачи дифракции на контурах с негладкой кривизной с помощью кирхгофской эвристики, мы определили вид спецфункций для описания полей в переходных зонах на умеренных расстояниях. В следующих главах мы покажем, что найденные здесь выражения являются асимптотиками точных решений уравнения Гельмгольца, описывающих слияние двух цилиндрических волн, и определим области их пригодности.

## Глава 3. Слияние двух цилиндрических волн

В данной главе дается простое выражение для поля в переходных зонах френелевского типа. Для этого строится семейство точных решений уравнения Гельмгольца (1), удобных для описания слияния двух расходящихся цилиндрических волн, одна из которых присутствует лишь с одной стороны от предельного луча, а другая — с обеих. Построения, к которым нас подтолкнула работа ленинградского математика Н. В. Цепелева [46], основаны на разделении переменных в эллиптической системе координат, введенной так, чтобы цилиндрические волны расходились из ее фокусов.

### 3.1. Френелевские переходные зоны

Понятие о дифракции Френеля, восходящее к началу XIX века, возникло при рассмотрении волнового поля в задаче о падении плоской волны на плоский экран в высокочастотном приближении, т.е. на больших по сравнению с длиной волны расстояниях  $r$  от кромки  $kr \rightarrow \infty$  (1.4). Речь шла об описании слияния плоской волны с дифрагированной кромкой цилиндрической волной в окрестности предельного луча (см. Рисунок 3.1 а) — там, где они имеют близкие фазы и физически неразличимы. Математическое описание этого волнового процесса двумерным уравнением Гельмгольца (1) приводит к выражению [5; 35]

$$u = e^{ikx} \Phi(Z) \quad (3.1)$$

со знаменитым интегралом Френеля (2.22). Выражение (3.1) является точным решением уравнения (1) и, соответственно, дает описание поля, равномерное по углу<sup>1</sup>. Аргумент интеграла Френеля в (3.1) равен корню из разности фаз дифрагированной цилиндрической волны  $kr$ , расходящейся из начала координат, и падающей волны  $kx$ :

$$Z = \sqrt{kr - kx} = \sqrt{2kr} \sin \frac{\tilde{\varphi}}{2}.$$

В *переходной зоне* вокруг предельного луча, описываемой условием

$$(kr)^{\frac{1}{4}} \tilde{\varphi} \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup> В отличие от предыдущих глав, теперь нам удобно направить ось  $x$  вдоль предельного луча, см. Рисунок 3.1. Поскольку угол между предельным лучом и направлением на точку наблюдения выше обозначался  $\tilde{\varphi}$ , см. (1.7), то естественно впредь обозначать полярный угол  $\tilde{\varphi}$ :  $x = r \cos \tilde{\varphi}$ ,  $y = r \sin \tilde{\varphi}$ .

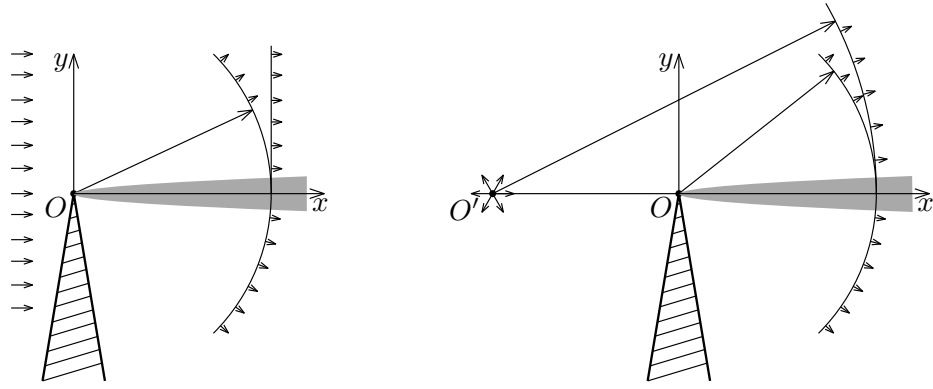


Рисунок 3.1 — Дифракция на клине а) плоской волны; б) цилиндрической волны

эти волны сливаются. Там для разности их фаз справедливо выражение  $k(r - x) \approx ky^2/2x$ , и допустимо часто используемое приближение

$$Z \approx z = \sqrt{\frac{kr}{2}} \tilde{\varphi}, \quad (3.3)$$

ср. (1.43), дающее удобную неравномерную асимптотику поля вблизи предельного луча. При удалении от предельного луча, в области, где  $|z| \rightarrow \infty$ , т.е.  $\sqrt{kr}|\tilde{\varphi}| \rightarrow \infty$  (1.36), интеграл Френеля допускает асимптотическое представление (см., например, [5]). Ниже предельного луча, при больших отрицательных значениях  $z$ , асимптотика выражения (3.1) описывает дифрагированную цилиндрическую волну, расходящуюся из начала координат,

$$u \approx A(\tilde{\varphi}; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (3.4)$$

Диаграмма направленности  $A$  при малых  $\tilde{\varphi}$  имеет вид

$$A(\tilde{\varphi}; k) \approx -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}}.$$

Выше предельного луча, при больших положительных  $z$ , формула (3.1) описывает сложение дифрагированной волны с падающей плоской волной (см. Рисунок 3.1 а):

$$u \approx e^{ikx} - \frac{e^{ikr+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi kr}\tilde{\varphi}}.$$

Диаграмма волны (3.4) имеет особенность при  $\tilde{\varphi} \rightarrow 0$ , из чего следует ее непригодность вблизи предельного луча и необходимость описания волнового поля специальной функцией.

Дифракционный процесс слияния плоской волны с цилиндрической волной, имеющей диаграмму со степенной особенностью вида  $A \sim \tilde{\varphi}^\nu$  вблизи предельного луча, мы называем *френелевским*. Общее описание такого процесса дано Цепелевым [46], который, путем разделения переменных в параболических координатах<sup>2</sup> построил семейство точных решений

<sup>2</sup> Параболические координаты полезны в этих вопросах, поскольку в области (1.4), (3.2) разность фаз  $kr - kx$  можно считать постоянной на параболах  $x = Cy^2$ .

уравнения Гельмгольца (1):

$$u = CD_{-\nu-1} \left( 2\sqrt{kr} \cos \frac{\tilde{\varphi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) D_{\nu} \left( 2\sqrt{kr} \sin \frac{\tilde{\varphi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right). \quad (3.5)$$

Здесь  $D_{\nu}$  — функция параболического цилиндра, а  $C$  — произвольная постоянная. Поскольку имеют место соотношения  $D_0(\sqrt{2}Ze^{-i\frac{\pi}{4}}) = e^{iZ^2/2}$  и

$$D_{-1}(\sqrt{2}Ze^{-i\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-iZ^2/2}\Phi(-Z), \quad (3.6)$$

см. [43], выражение (3.1) является частным случаем (3.5). Решение семейства (3.5) со значком  $\nu$  описывает слияние распространяющейся в области  $y > 0$  волны с фазой  $kx$  и амплитудой, пропорциональной  $\tilde{\varphi}^{-\nu-1}$ , и цилиндрической волны с диаграммой, имеющей на предельном луче особенность  $\tilde{\varphi}^{\nu}$ . Конкретные задачи, в которых такие дифракционные коэффициенты возникают — это задача о боковой (головной) волне ( $\nu = -3/2$ , см. [46]), дифракция на конусе ( $\nu = -3/2$ , см. [47]), а также дифракция на клине ( $\nu = -1$ , см. [5; 44; 48]) и на границах с различными особенностями кривизны ( $\nu \leq -1$ , см. [6; 16; 18; 23–27]).

Однако в ряде задач, в частности в задачах последнего типа, ни одна из сливающихся вблизи предельного луча волн — ни геометрически отраженная, ни дифрагированная — не может с достаточной точностью рассматриваться как плоская — необходимо более детальное описание, учитывающее кривизну ее фронта. При этом естественным образом возникает вопрос об асимптотическом описании процесса слияния двух цилиндрических волн, причем одна из них (дифрагированная) присутствует по обе стороны от предельного луча, а другая (отраженная от гладкого участка границы) — только с одной стороны.

Для рассмотренной в ряде учебников [5; 44; 48] задачи дифракции цилиндрической волны на кромке клина, обобщающей упомянутую выше классическую задачу Френеля, простого равномерного по углу описания дифракционного поля вблизи предельного луча нет. При естественном для дифракции Френеля предположении, что расстояние  $r_0$  от источника до вершины клина  $O$  велико (2.3), равно как и расстояние  $r$  от кромки до точки наблюдения (1.4), слияние падающей цилиндрической волны от точечного источника с единичной амплитудой и дифрагированной цилиндрической волны, расходящейся из  $O$ , описывается выражением

$$u \approx \frac{e^{ikr_0+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{kr_0}} e^{ikr-i\zeta^2} \Phi(\zeta), \quad (3.7)$$

где  $\zeta = \sqrt{k\rho/2}\tilde{\varphi}$  (2.23),  $\rho = r_0r/(r_0+r)$  (2.16), см., например, в [44], в менее удобном виде — в [48]. Формула (3.7) применима в окрестности предельного луча, где выполнено условие (3.2). Похожее выражение встречалось и в других дифракционных задачах, см. [18; 26; 27; 45] и главу 2. Интересно, что при удалении источника на бесконечность вдоль оси  $x$  (т.е. при

$\rho \rightarrow \infty$ ), выражение для  $\zeta$  (2.23) переходит в  $z$  (3.3), а формула (3.7) — в (3.1). Выражения (3.1) (в приближении (3.3)) и (3.7) могут быть получены в рамках эвристического метода параболического уравнения [44; 49].

Следует отметить, что термин *дифракция Френеля* распространился и на задачи с другой структурой дифракционного поля, в частности, на случай гладкого выпуклого препятствия [3], где не возникает дифрагированной цилиндрической волны, однако выражения, аналогичные (3.1), в описании поля присутствуют. Выражения с интегралом Френеля (2.22) присутствуют и в задачах об угловых и краевых катастрофах, где изучаются падающие поля, более сложные, чем плоские и цилиндрические волны (см., например, [50] и литературу в ней). Мы придерживаемся более классического понимания термина *дифракция Френеля*, имея в виду слияние цилиндрических волн, одна из которых имеет гладкую диаграмму направленности, а другая — диаграмму со степенной особенностью на предельном луче.

### 3.2. Эллиптические координаты

Поместим источники цилиндрических волн в точки  $O = (0, 0)$  и  $O' = (-2a, 0)$  (см. Рисунок 3.2), причем волна из точки  $O'$  распространяется только в области  $y > 0$ , а значения фаз волн в точке  $O$  равны. Предельный луч, вблизи которого волны сливаются, в таком случае совпадает с положительной полуосью  $x$ .

Расстояние  $2a$  между источниками считается большим по сравнению с длиной волны:

$$ka \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Условие (3.8) отвечает типичному для классической теории дифракции предположению, что расстояние от препятствия до источника падающей волны много больше длины волны.

Нас интересует поле в *переходной зоне*, окружающей предельный луч, где угол  $\tilde{\varphi}$  мал, а расстояние  $r$  от точки наблюдения  $M$  до  $O$  велико (1.4) (см. Рисунок 3.2). Отметим, что отсюда немедленно следует малость  $\tilde{\varphi}'$ , а также условие  $kr' \rightarrow \infty$ , см. (1.4), (3.8).

Для описания поля будем использовать эллиптическую систему координат  $(\xi, \eta)$ ,

$$x + a = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad 0 \leq \xi, \quad -\pi < \eta \leq \pi, \quad (3.9)$$

с фокусами в точках  $O$  и  $O'$  (см. Рисунок 3.2). Координатные линии  $\eta = \text{const}$  — гиперболы с фокусами в  $O$  и  $O'$ , и вблизи оси  $x$  примерно параллельны ей<sup>3</sup>. Значение  $\eta = 0$  соответствует

<sup>3</sup> Вдоль этих линий разность фаз двух волн постоянна,  $r' - r = \text{const}$ .



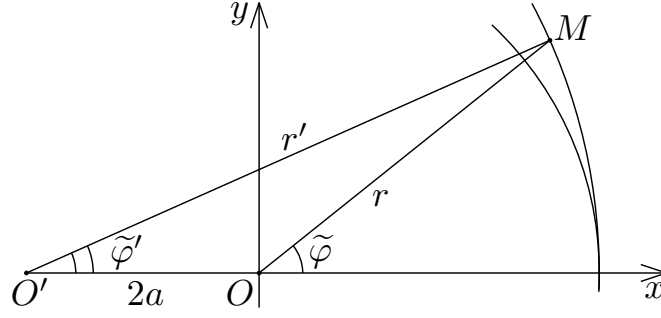


Рисунок 3.2 — Слияние двух цилиндрических волн

оси  $x$ . Линии  $\xi = \text{const}$  образуют семейство эллипсов с теми же фокусами, и вблизи  $Ox$  идут поперек нее.

В приложениях мы будем помещать фокусы эллиптической системы координат в источники двух цилиндрических волн, которые будут сливаться вблизи положительной полуоси  $x$ , т.е. в области, где  $\eta$  мало, а  $\xi$  положительно.

Из (3.9) немедленно следует, что расстояния  $r$  и  $r'$  от точки  $M$  до фокусов  $O$  и  $O'$  (см. Рисунок 3.2) равны, соответственно,

$$r = a(\text{ch } \xi - \cos \eta), \quad r' = a(\text{ch } \xi + \cos \eta). \quad (3.10)$$

Из (3.10) для малых значений  $\eta$  получаем

$$\eta = \sqrt{\frac{2a + r - r'}{a}} \left( 1 + O \left( \frac{2a + r - r'}{a} \right) \right). \quad (3.11)$$

Из рассмотрения треугольника  $OMO'$ , следует, что

$$\begin{aligned} r' &= 2a + r - \frac{ar}{2a + r} \tilde{\varphi}^2 (1 + O(\tilde{\varphi}^2)), \\ r &= r' - 2a + \frac{ar'}{r' - 2a} (\tilde{\varphi}')^2 (1 + O((\tilde{\varphi}')^2)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

и (3.11) переписывается в виде

$$\eta = \sqrt{\frac{r}{r + 2a}} \tilde{\varphi} (1 + O(\tilde{\varphi}^2)) = \sqrt{\frac{r'}{r' - 2a}} \tilde{\varphi}' (1 + O((\tilde{\varphi}')^2)). \quad (3.13)$$

Отметим, что  $r + 2a$  и  $r' - 2a$  можно заменить на  $r'$  и  $r$ , соответственно, с точностью до  $O(2ar\tilde{\varphi}^2/r')$ . Кроме того, есть более симметричное выражение  $\eta \approx \sqrt{rr'} (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}')/2a$ .

### 3.3. Семейство точных решений

Записав уравнение Гельмгольца (1) в эллиптических координатах (3.9), см. [35],

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 a^2 (\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) u = 0, \quad (3.14)$$

будем решать его методом разделения переменных. Положим  $u(\xi, \eta) = P(\xi)Q(\eta)$ , тогда функции  $P$  и  $Q$  удовлетворяют уравнениям

$$P''(\xi) + (k^2 a^2 \operatorname{sh}^2 \xi - \lambda) P(\xi) = 0, \quad (3.15)$$

$$Q''(\eta) + (k^2 a^2 \sin^2 \eta + \lambda) Q(\eta) = 0, \quad (3.16)$$

с, вообще говоря, комплексным параметром разделения  $\lambda$ , которые элементарными преобразованиями могут быть сведены к уравнению Матье [43], теория которого нам не потребуется.

Наша цель — описать высокочастотное поле в окрестности предельного луча не слишком близко к  $O$ , а именно в области, где выполнены условия (3.8) и  $\tilde{\varphi} \rightarrow 0$ , т.е.

$$\eta \rightarrow 0, \quad \sqrt{ka}\xi \rightarrow \infty, \quad (3.17)$$

см. (3.10). Для этого построим асимптотики решений уравнения (3.15) при положительных не слишком маленьких  $\xi$  и уравнения (3.16) при малых  $\eta$  любого знака. Нас будут интересовать только параметры разделения вида

$$\lambda = -ika(2\nu + 1), \quad \nu < 0. \quad (3.18)$$

Именно отрицательные  $\nu$ , как мы увидим ниже, возникают при описании френелевских переходных зон. Соответствующее решение (3.14) будем обозначать

$$u_\nu(\xi, \eta) = P_\nu(\xi)Q_\nu(\eta). \quad (3.19)$$

### 3.3.1. Асимптотика решения уравнения (3.15)

Найдем асимптотику решения (3.15), отвечающего уходящей волне, в приближении (3.8). С помощью стандартного метода ВКБ (например, [35]), с точностью до произвольного постоянного множителя получим

$$P_\nu(\xi) = \frac{\exp\left(ika \int_0^\xi \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + i(2\nu + 1)/ka} dt\right)}{\sqrt[4]{\operatorname{sh}^2 \xi + i(2\nu + 1)/ka}} \left(1 + O\left(\frac{1}{ka}\right)\right). \quad (3.20)$$

Здесь учтено выражение для параметра разделения (3.18). В области (3.17), очевидно, выполнено условие  $ka \operatorname{sh}^2 \xi \rightarrow \infty$ . Используя его, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + i\frac{2\nu + 1}{ka}} dt &= \int_0^\xi \left( \operatorname{sh} t + i\frac{2\nu + 1}{2ka \operatorname{sh} t} + O\left(\frac{1}{(ka)^2 \operatorname{sh}^3 t}\right) \right) dt = \\ &= \operatorname{ch} \xi + i\frac{2\nu + 1}{4ka} \ln \frac{\operatorname{ch} \xi - 1}{\operatorname{ch} \xi + 1} + O\left(\frac{1}{(ka)^2 (\operatorname{ch} \xi - 1)}\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в (3.20), находим

$$P_\nu(\xi) = \frac{\exp\left(ika \operatorname{ch} \xi - \frac{2\nu+1}{4} \ln \frac{\operatorname{ch} \xi - 1}{\operatorname{ch} \xi + 1}\right)}{\sqrt[4]{\operatorname{ch}^2 \xi - 1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{ka(\operatorname{ch} \xi - 1)}\right)\right) = \\ = \frac{(\operatorname{ch} \xi + 1)^{\frac{\nu}{2}}}{(\operatorname{ch} \xi - 1)^{\frac{\nu+1}{2}}} e^{ika \operatorname{ch} \xi} \left(1 + O\left(\frac{1}{ka(\operatorname{ch} \xi - 1)}\right)\right). \quad (3.22)$$

Поправочные члены малы в области, где выполнено условие (1.4), см. (3.8) и (3.10).

### 3.3.2. Асимптотика решения уравнения (3.16)

Преобразуем уравнение (3.16) при малых  $\eta$ , разложив  $\sin \eta$  по степеням  $\eta$ :

$$Q_\nu''(\eta) + (k^2 a^2 \eta^2 - ika(2\nu + 1))Q_\nu(\eta) = O(k^2 a^2 \eta^4 Q_\nu(\eta)). \quad (3.23)$$

Сделав замену переменной

$$H = \sqrt{2ka} \eta e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (3.24)$$

придем к уравнению

$$Q_\nu''(H) + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{H^2}{4}\right) Q_\nu(H) = O\left(\frac{H^4}{ka}\right) Q_\nu(H). \quad (3.25)$$

Таким образом, в области, где  $H$  (и, соответственно,  $\eta$ ) достаточно мало, одно из решений уравнения (3.25) асимптотически совпадает с функцией параболического цилиндра  $D_\nu$ :

$$Q_\nu(H) = D_\nu(-H)(1 + o(1)). \quad (3.26)$$

Можно показать, что соответствующая область характеризуется условием  $ka|\eta|^\mu \rightarrow 0$ ,  $\mu = 2 + 4/(1 - 3\nu)$  (для отрицательных значений  $\nu$ , рассматриваемых нами,  $\mu > 2$ ). Для удобства повествования доказательство вынесено в главу 5.

## 3.4. Геометрооптическая интерпретация асимптотики функции (3.19)

Для отвечающего уходящей волне решения (3.19) уравнения (3.14) с  $\nu < 0$  из формул (3.22) и (3.26) вытекает следующее асимптотическое выражение вблизи предельного луча:

$$u_\nu(\xi, \zeta) = C \frac{(\operatorname{ch} \xi + 1)^{\frac{\nu}{2}}}{(\operatorname{ch} \xi - 1)^{\frac{\nu+1}{2}}} e^{ika \operatorname{ch} \xi} D_\nu(-H) (1 + o(1)). \quad (3.27)$$

Здесь  $H$  определено в (3.24),  $C$  — произвольная постоянная. Представление (3.27) пригодно в области, где выполнены условия (1.4) и

$$kr|\tilde{\varphi}|^\mu \rightarrow 0, \quad \text{где} \quad \mu = 2 + \frac{4}{1 - 3\nu}. \quad (3.28)$$

Отметим, что чем больше модуль  $\nu$ , тем уже область, описываемая (3.28). Тем не менее, при каждом  $\nu < 0$  аргумент функции параболического цилиндра  $H$  может принимать там большие значения.

Обсудим геометрический смысл величин, входящих в (3.27). С помощью соотношений (3.10) и (3.13) множитель перед экспонентой выражается через расстояния  $r$  и  $r'$  до фокусов  $O$  и  $O'$  — источников цилиндрических волн:

$$\frac{(\operatorname{ch} \xi + 1)^{\frac{\nu}{2}}}{(\operatorname{ch} \xi - 1)^{\frac{\nu+1}{2}}} = \sqrt{\frac{a}{r}} \left( \frac{r+2a}{r} \right)^{\frac{\nu}{2}} \left( 1 + O \left( \frac{r\tilde{\varphi}^2}{r+2a} \right) \right) = \sqrt{\frac{a}{r'}} \left( \frac{r'}{r'-2a} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left( 1 + O \left( \frac{r'(\tilde{\varphi}')^2}{r'-2a} \right) \right).$$

Показатель экспоненты в (3.27) с помощью соотношений (3.10) и (3.24) переписывается следующим образом:

$$ika \operatorname{ch} \xi = ika + ikr + \frac{H^2}{4} + O \left( \frac{H^4}{ka} \right) = -ika + ikr' - \frac{H^2}{4} + O \left( \frac{H^4}{ka} \right). \quad (3.29)$$

Теперь рассмотрим аргумент функции параболического цилиндра. Из соотношений (3.24) и (3.11) вытекает, что

$$H = \sqrt{2k(2a+r-r')} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left( 1 + O \left( \frac{2a+r-r'}{a} \right) \right), \quad (3.30)$$

т.е.  $H$  выражается через разность значений фаз цилиндрических волн, расходящихся из  $O$  и  $O'$ . С помощью соотношения (3.13) получим еще два представления:

$$H = \sqrt{\frac{2kar}{r+2a}} \tilde{\varphi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left( 1 + O \left( \frac{r\tilde{\varphi}^2}{r+2a} \right) \right) = \sqrt{\frac{2kar'}{r'-2a}} \tilde{\varphi}' e^{-i\frac{\pi}{4}} \left( 1 + O \left( \frac{r'(\tilde{\varphi}')^2}{r'-2a} \right) \right). \quad (3.31)$$

В результате, можно записать (3.27) в геометрических терминах:

$$\begin{aligned} u_\nu &= C \sqrt{\frac{a}{r}} \left( \frac{r+2a}{r} \right)^{\frac{\nu}{2}} e^{ik \left( r+a-\frac{ar\tilde{\varphi}^2}{2(r+2a)} \right)} D_\nu \left( -\sqrt{\frac{2kar}{r+2a}} \tilde{\varphi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) (1 + o(1)) = \\ &= C \sqrt{\frac{a}{r'}} \left( \frac{r'}{r'-2a} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} e^{ik \left( r'-a+\frac{ar'(\tilde{\varphi}')^2}{2(r'-2a)} \right)} D_\nu \left( -\sqrt{\frac{2kar'}{r'-2a}} \tilde{\varphi}' e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

В той части переходной зоны (1.4), (3.28), где аргумент функции  $D_\nu$  велик, заменим ее в (3.27) асимптотикой, см. [43]. Ниже предельного луча, при  $\tilde{\varphi} < 0$ , имеем одну цилиндрическую волну:

$$u_\nu = A_\nu(\tilde{\varphi}; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} (1 + o(1)), \quad (3.33)$$

а выше, при  $\tilde{\varphi} > 0$  — две:

$$u_\nu = A_\nu(\tilde{\varphi}; k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} + A'_\nu(\tilde{\varphi}'; k) \frac{e^{ikr'}}{\sqrt{kr'}} (1 + o(1)), \quad (3.34)$$

где

$$\begin{aligned} A_\nu(\tilde{\varphi}; k) &= 2^{\frac{\nu}{2}} C(ka)^{\frac{\nu+1}{2}} \tilde{\varphi}^\nu e^{ika - i\frac{\pi\nu}{4}}, \\ A'_\nu(\tilde{\varphi}'; k) &= -C \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \frac{(\tilde{\varphi}')^{-\nu-1}}{(2ka)^{\frac{\nu}{2}}} e^{-ika + i\frac{\pi(5\nu+1)}{4}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Выражение (3.33) и совпадающее с ним первое слагаемое в (3.34) описывают цилиндрическую волну, расходящуюся из точки  $O$ . Второе слагаемое в (3.34) отвечает цилиндрической волне, расходящейся из точки  $O'$ . Заметим, что чем сингулярнее диаграмма цилиндрической волны на предельном луче, тем уже область (3.28) пригодности выражения (3.27).

### 3.5. Обсуждение

Построено семейство точных решений уравнения Гельмгольца, которые имеют простые асимптотики, удобные для описания слияния двух волн с неплоскими фронтами. Отметим, что аналогичные приближенные формулы можно получить и в рамках метода параболического уравнения [3; 44], не дающего, однако, явных ограничений на области применимости.

В следующей главе будет продемонстрировано, что функции из построенного семейства встречаются в задачах дифракции на контурах с негладкой кривизной.

## Глава 4. Пограничный слой вокруг предельного луча

Теперь мы убедимся, что построенные в главе 3 решения описывают поля в двумерных задачах высокочастотной дифракции на контурах с негладкой кривизной. Условия, позволяющие приблизить в окрестности предельного луча отраженную волну цилиндрической волной (3.4), приводят к ограничениям на ширину переходной зоны.

Пусть падающая волна  $u^{\text{inc}}$  — цилиндрическая (2.1), расходящаяся из точки  $M_0$ , расположенной на расстоянии  $r_0$  от точки  $O$ , приходит в  $O$  некасательно — под углом скольжения  $\varphi_0 > 0$  (см. Рисунок 4.1). Начало координат поместим в точку  $O$ , а ось  $x$  направим вдоль предельного (геометрически отраженного в  $O$ ) луча. Положение точки наблюдения  $M$  будем характеризовать расстоянием  $r$  до точки  $O$  и углом  $\tilde{\varphi}$  между осью  $x$  и направлением на  $M$ . Предполагаются выполненными условия высокочастотного приближения (1.4) и (2.3).

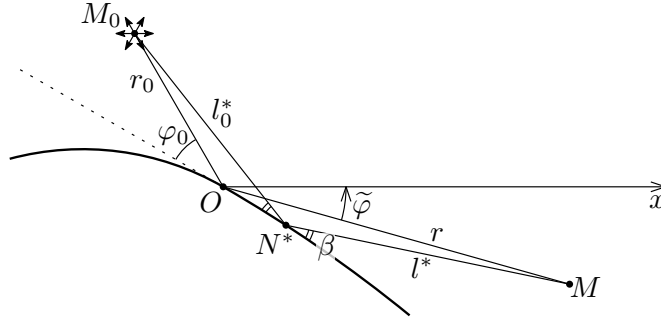


Рисунок 4.1 — Дифракция на контуре с негладкой кривизной

Начнем с качественного обсуждения волнового процесса. Как уже отмечалось выше, уходящее волновое поле  $u^{\text{out}}$  вдали от предельного луча складывается из дифрагированной точкой негладкости волны  $u^{\text{dif}}$  и волн  $u_{\pm}^{\text{ref}}$ , геометрически отраженных от гладких частей контура слева и справа от  $O$ :

$$u^{\text{out}}(M) = u^{\text{dif}}(M) + u_{\pm}^{\text{ref}}(M).$$

Знак « $-$ » отвечает точкам наблюдения  $M$ , лежащим выше, а « $+$ » — ниже предельного луча.

В области, где выполнено условие  $\sqrt{kr}|\tilde{\varphi}| \rightarrow \infty$  (1.36), дифрагированная волна представляет собой цилиндрическую волну (3.4), расходящуюся из точки  $O$ . Ее диаграмма, как показано в главе 1, имеет на предельном луче степенную сингулярность по углу.

Выражения для геометрически отраженных от гладких частей контура волн  $u_{\pm}^{\text{ref}}$  в случае некасательного падения можно найти лучевым методом [2]. Они даются формулой

$$u_{\pm}^{\text{ref}} = \frac{e^{ik\tau^* + i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k\mathcal{J}^*}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k\mathcal{J}^*}\right) \right), \quad \mathcal{J}^* = l_0^* + l^* + \frac{2\mathfrak{a}^* l_0^* l^*}{\sin \beta}. \quad (4.1)$$

Здесь  $l_0^*$  и  $l^*$  — расстояния от точки источника  $M_0$  и от точки наблюдения  $M$  до точки отражения  $N^*$ , соответственно,  $\tau^* = l_0^* + l^*$  — значение эйконала в точке  $M$  (геометрическое время пробега),  $\mathcal{J}^*$  — геометрическое расхождение,  $\beta$  — угол скольжения в точке  $N^*$ ,  $\mathfrak{x}^*$  — значение кривизны в точке  $N^*$  (см. Рисунок 4.1).

На предельном луче фазы геометрически отраженных волн и дифрагированной волны совпадают, что позволяет говорить о слиянии этих волн и возникновении френелевской переходной зоны. Если кривизна контура терпит в  $O$  скачок, то выражение (4.1), очевидно, терпит разрыв на предельном луче, и пригодно лишь на некотором удалении от него. Вблизи предельного луча, в переходной зоне, поле должно описываться соответствующей специальной функцией, сглаживающей и эту особенность, и сингулярность дифрагированной волны. Поскольку, как и в случае дифракции на клине, геометрооптическое поле терпит на предельном луче разрыв, естественно, что здесь возникает интеграл Френеля. Однако, в отличие от классической задачи, геометрооптическое поле ненулевое с обеих сторон от предельного луча, и описание его слияния с дифрагированной волной требует двух интегралов Френеля от разных аргументов [6; 18; 27]. В случае же более гладкой кривизны контура выражение (4.1) непрерывно и описывает геометрически отраженное поле в главном порядке, а френелевское поле представляет собой поправку к нему и описывается функцией параболического цилиндра со значком  $\nu < -1$  [24–26].

#### 4.1. Дифракция на контуре со скачком кривизны

Рассмотрим контур, у которого кривизна  $\mathfrak{x}$  в точке  $O$  имеет скачок (2), см. Рисунок 4.2. Как и в главе 2, нам удобно переписать (2) в виде (2.11). Нам также понадобится геометрический параметр задачи  $\varkappa$  (1.8)

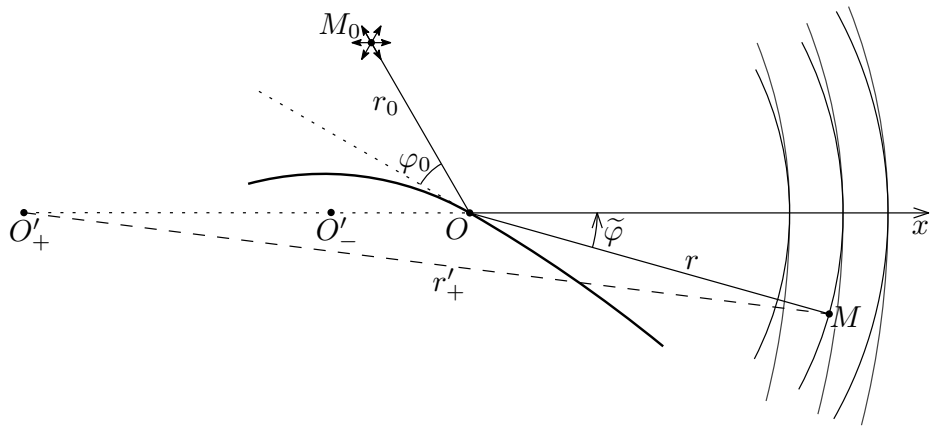


Рисунок 4.2 — Дифракция на контуре со скачком кривизны

В главе 2 в рамках метода Кирхгофа для поля в переходной зоне на умеренных расстояниях  $\mathcal{R} \sim O(1)$  (2.12) от  $O$  получено выражение (2.24):

$$u^{\text{out}} \approx \frac{e^{ik(r_0+r)+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k(r_0+r)}} \left( \frac{e^{-i\frac{\zeta^2}{J_+}}}{\sqrt{J_+}} \Phi\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{J_+}}\right) + \frac{e^{-i\frac{\zeta^2}{J_-}}}{\sqrt{J_-}} \Phi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{J_-}}\right) \right).$$

Здесь  $\Phi$  — интеграл Френеля (2.22), величина  $\zeta$  определена в (2.23), а  $J_{\pm} = 1 + 2\mathfrak{a}_{\pm}\rho/\sin\varphi_0$ , см. (2.20). Покажем, что (2.24) переписывается через функции построенного нами семейства (3.27). Введем величину

$$2a_{\pm} = \frac{r_0}{1 + 2\mathfrak{a}_{\pm}r_0/\sin\varphi_0}, \quad (4.2)$$

геометрическую интерпретацию которой дадим позже. Тогда

$$\frac{\zeta^2}{J_{\pm}} = \frac{krr_0\tilde{\varphi}^2}{2(r_0+r(1+2\mathfrak{a}_{\pm}r_0/\sin\varphi_0))} = \frac{ka_{\pm}r\tilde{\varphi}^2}{r+2a_{\pm}},$$

и с учетом формулы (3.6) выражение (2.24) принимает вид суммы двух функций семейства (3.27) с  $\nu = -1$ :

$$u^{\text{out}} = U_+ + U_-, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} U_{\pm} &= \frac{e^{ik(r_0+r)-i\frac{\zeta^2}{2J_{\pm}}+i\frac{\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{kJ_{\pm}(r_0+r)}} D_{-1} \left( \pm \frac{\sqrt{2}\zeta}{\sqrt{J_{\pm}}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2kr_0}} \sqrt{\frac{a_{\pm}}{r+2a_{\pm}}} e^{ik\left(r+r_0-\frac{a_{\pm}r\tilde{\varphi}^2}{2(r+2a_{\pm})}\right)+i\frac{\pi}{4}} D_{-1} \left( \pm \sqrt{\frac{2ka_{\pm}r}{r+2a_{\pm}}} \tilde{\varphi} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом, найденная в рамках метода Кирхгофа формула укладывается в построенную теорию.

#### 4.1.1. Сшивка с дифрагированной и отраженными волнами

Поясним сначала геометрический смысл величин (4.2). В области, где выполнено условие  $(kr)^{\frac{1}{3}}\tilde{\varphi} \rightarrow 0$  (1.40), выражения для отраженных волн (4.1) аппроксимируются цилиндрическими волнами (3.4), исходящими из точек  $O'_{\pm}$ , лежащих на продолжении предельного луча на расстояниях  $2a_{\pm}$  от точки  $O$  (см. Рисунок 4.2). Действительно, в главе 6 показано, что лучевые выражения (4.1) для геометрически отраженных волн  $u_{\pm}^{\text{ref}}$  при условии (1.40) преобразуются к виду

$$u_{\pm}^{\text{ref}} = \frac{e^{ik\left(r+r_0-\frac{\rho^2}{2J_{\pm}}\tilde{\varphi}^2\right)+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi kJ_{\pm}(r+r_0)}} (1 + O(kr\tilde{\varphi}^3)), \quad (4.5)$$



где величина  $\rho = r_0 r / (r + r_0)$  введена в (2.16). Расстояния  $r'_\pm$  от  $O'_\pm$  до точки наблюдения  $M$  равны, соответственно

$$r'_\pm = \sqrt{r^2 + 4a_\pm^2 + 2a_\pm r \cos \tilde{\varphi}} = 2a_\pm + r - \frac{\rho}{2J_\pm} \tilde{\varphi}^2 + O\left(\frac{\rho}{J_\pm} \tilde{\varphi}^4\right). \quad (4.6)$$

Легко видеть, что, с точностью до малых членов, величины  $kr'_\pm$  отличаются от фаз соответствующих экспонент в (4.5), лишь на постоянное слагаемое  $r_0 - 2a_\pm$ , а выражение в знаменателе (4.5) переписывается в виде  $J_\pm(r_0 + r) = r_0 r'_\pm / 2a_\pm (1 + O(\rho \tilde{\varphi}^2 / J_\pm))$ . Таким образом, в переходной зоне (1.40) формулы (4.5) для геометрически отраженных волн  $u_\pm^{\text{ref}}$  преобразуются к виду (3.4):

$$u_\pm^{\text{ref}} \approx A_\pm^{\text{ref}} \frac{e^{ikr'_\pm}}{\sqrt{kr'_\pm}}, \quad A_\pm^{\text{ref}} = \frac{\sqrt{a_\pm}}{2\sqrt{\pi r_0}} e^{ik(r_0 - 2a_\pm) + i\frac{\pi}{4}}. \quad (4.7)$$

Перейдем к получению асимптотики  $u^{\text{out}}$  вдали от предельного луча, где выполнено условие (1.36). Воспользовавшись формулами (A.5) и (A.6) нетрудно записать асимптотики функций  $U_\pm$  (4.4):

$$U_\pm \approx \theta(\mp \tilde{\varphi}) A_\pm^{\text{ref}} \frac{e^{ikr'_\pm}}{\sqrt{kr'_\pm}} \mp \frac{e^{ik(r+r_0) + i\frac{\pi}{4}}}{2\pi\sqrt{2kr_0}} \left( \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2kr}\tilde{\varphi}} \pm \frac{(r+2a_\pm)e^{3i\frac{\pi}{4}}}{a_\pm(\sqrt{2kr}\tilde{\varphi})^3} + \dots \right).$$

Здесь  $\theta$  — функция Хевисайда (3), величины  $A_\pm^{\text{ref}}$  определены в (4.7). Тогда

$$u^{\text{out}} \approx \theta(-\tilde{\varphi}) A_+^{\text{ref}} \frac{e^{ikr'_+}}{\sqrt{kr'_+}} + \theta(\tilde{\varphi}) A_-^{\text{ref}} \frac{e^{ikr'_-}}{\sqrt{kr'_-}} + A^{\text{dif}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}},$$

где

$$A^{\text{dif}} = -\frac{h}{2\pi k \sin \beta \tilde{\varphi}^3} \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}}. \quad (4.8)$$

Два первых слагаемых отвечают отраженным волнам, а третье — дифрагированной цилиндрической волне, расходящейся из точки  $O$ . Выражение для дифракционного коэффициента (4.8) согласуется с полученной ранее формулой (1.35).

Таким образом, область пригодности формулы (4.3), (4.4) описывается условиями (1.4) и (1.40) — они обеспечивают сшивание асимптотики (4.3), (4.4) с лучевыми формулами (4.1) для волн, геометрически отраженных от гладких частей контура, в области, где выполнено условие (1.36). Заметим, что условие (3.28) при  $\nu = -1$  совпадает с (1.40).

#### 4.1.2. Сшивка с (1.42)

Покажем теперь, что выражение (4.3) согласуется с формулами, полученными в малой окрестности точки  $O$ . Рассмотрим область, где  $kr \rightarrow \infty$ , но  $\varkappa r \rightarrow 0$  (1.12), а значит и  $\varkappa \rho \rightarrow 0$ . Введем для удобства величину  $\xi = \sqrt{2}\zeta e^{-i\pi/4}$ , ср. (2.19), (2.23). Воспользовавшись

интегральным представлением для функции параболического цилиндра (А.3), преобразуем выражения в скобках в (4.4):

$$\frac{e^{-i\frac{\zeta^2}{2J_{\pm}}}}{\sqrt{J_{\pm}}} D_{-1} \left( \pm \frac{\sqrt{2}\zeta}{\sqrt{J_{\pm}}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{e^{\frac{\xi^2}{4J_{\pm}}}}{\sqrt{J_{\pm}}} D_{-1} \left( \pm \frac{\xi}{\sqrt{J_{\pm}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{J_{\pm}}} \int_0^{+\infty} e^{\mp \frac{\xi}{\sqrt{J_{\pm}}} p - \frac{p^2}{2}} dp = \int_0^{+\infty} e^{\mp \xi p - J_{\pm} \frac{p^2}{2}} dp.$$

Учитывая выражения (2.20) для  $J_{\pm}$ , запишем фазы экспонент в виде:

$$\mp \xi p - J_{\pm} \frac{p^2}{2} = \mp \xi p - \frac{p^2}{2} - \frac{\varkappa_{\pm} \rho}{\sin \varphi_0} p^2.$$

При  $\varkappa \rho \rightarrow 0$  последнее слагаемое мало. Переносим его в амплитуду, получим

$$\frac{e^{\frac{\xi^2}{4J_{\pm}}}}{\sqrt{J_{\pm}}} D_{-1} \left( \pm \frac{\xi}{\sqrt{J_{\pm}}} \right) = \int_0^{+\infty} e^{\mp \xi p - \frac{p^2}{2}} \left( 1 - \frac{\varkappa_{\pm} \rho}{\sin \beta} p^2 + O(\varkappa^2 \rho^2 p^4) \right) dp.$$

Сумма в скобках в (4.4) принимает вид (поправочные члены опущены)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi p - \frac{p^2}{2}} \left( 1 - \frac{\varkappa_{-} \rho}{\sin \beta} p^2 \right) dp - \frac{h\rho}{\sin \beta} \int_0^{+\infty} e^{-\xi p - \frac{p^2}{2}} p^2 dp = \\ = \sqrt{2\pi} e^{-i\zeta^2} \left( 1 + \frac{\varkappa_{-} \rho}{\sin \beta} (2i\zeta^2 - 1) \right) - \frac{2h\rho}{\sin \beta} e^{-i\frac{\zeta^2}{2}} D_{-3} \left( \sqrt{2}\zeta e^{-i\frac{\pi}{4}} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь мы вернулись к переменной  $\zeta$ , явно выделили линейный по амплитуде скачка кривизны  $h$  член и воспользовались интегральным представлением для функции параболического цилиндра (А.3), а первые два интеграла вычислили, пользуясь тем, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta q^2} dq = \sqrt{\pi/\beta}$  (см. [43]). Подставляя (4.9) в выражение для полного поля (4.3), получим

$$u^{\text{out}} = \frac{e^{ik(r+r_0)+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k(r+r_0)}} (U_0 + U_1 + V_1). \quad (4.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_0 &= e^{-i\zeta^2}, \quad U_1 = \frac{\varkappa_{-} \rho}{\sin \varphi_0} (2i\zeta^2 - 1) e^{-i\zeta^2}, \\ V_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\rho}{\sin \varphi_0} e^{-i\frac{\zeta^2}{2}} D_{-3} \left( \sqrt{2}\zeta e^{-i\frac{\pi}{4}} \right). \end{aligned}$$

Поправочные члены (которые мы опустили) малы при выполнении условий (1.4), (1.12), (1.40) и (1.46). В главе 6 показано, что в области, удовлетворяющей этим условиям, первые два слагаемых в (4.10) соответствуют геометрически отраженной волне. Главный (относительно малого параметра  $\varkappa r$ ) член, отвечающий  $U_0$ , описывает отраженную волну в главном приближении и представляет собой волну от мнимого (отраженного относительно оси  $x$ ) источника. Члены, отвечающие  $U_1$  и  $V_1$ , являются поправками, учитывающими влияние кривизны границы.

Выражение для линейного по  $h$  члена<sup>1</sup> при удалении источника на бесконечность (т.е. при  $\varkappa r_0 \rightarrow \infty$ ) согласуется с формулой (1.33), полученной в рамках погранслоистой техники для случая падения плоской волны.

## 4.2. Дифракция на контуре с гельдеровской сингулярностью кривизны

Теперь рассмотрим контур, кривизна которого в точке  $O$  имеет гельдеровскую сингулярность (4), см. Рисунок 4.3.

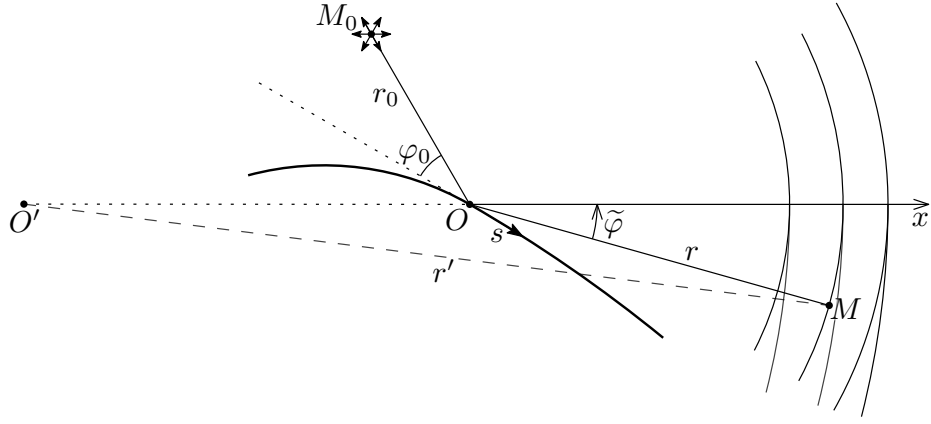


Рисунок 4.3 — Дифракция на контуре с гельдеровской сингулярностью кривизны

В главе 2 с помощью метода Кирхгофа получена асимптотика (2.35) для уходящего поля вблизи предельного луча на умеренных расстояниях (2.25) от  $O$ . В главном порядке поле дается лучевой формулой (4.1) — непрерывной, но не гладкой на предельном луче — и имеет вид

$$u_0^{\text{out}} = \frac{e^{ik(r+r_0)-i\frac{\zeta^2}{J}+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi kJ(r+r_0)}}, \quad (4.11)$$

а эффект от гельдеровской сингулярности носит поправочный характер и описывается выражением

$$u_h^{\text{out}} = -\frac{h}{2\pi} \frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\lambda\frac{\pi}{4}}}{(\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \frac{\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}} J^{1+\frac{\lambda}{2}}} \frac{e^{ik(r_0+r_1)-i\frac{\zeta^2}{2J}+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{kJ(r_0+r_1)}} D_{-3-\lambda} \left( \sqrt{\frac{2}{J}} \zeta e^{-i\frac{\pi}{4}} \right). \quad (4.12)$$

Здесь  $J = 1 + \varkappa_0 \rho / \sin \varphi_0$ , см. (2.27), а величина  $\zeta$  определена в формуле (2.23).

Покажем что функция (4.12) принадлежит семейству (3.27). Действительно, если положить

$$2a = \frac{r_0}{1 + 2\varkappa_0 r_0 / \sin \varphi_0}, \quad (4.13)$$

<sup>1</sup> Отметим, что и оно является частным случаем формулы (3.27).

то (4.12) переписывается в виде

$$u_h^{\text{out}} = -\frac{h}{2\pi} \frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\frac{\pi(1+\lambda)}{4}}}{(\sqrt{k}\sin\varphi_0)^{1+\lambda}} \frac{1}{\sqrt{r_0 r}} \left(\frac{2ar}{r+2a}\right)^{\frac{3+\lambda}{2}} e^{ik\left(r+r_0-\frac{ar\tilde{\varphi}^2}{2(r+2a)}\right)} D_{-3-\lambda} \left(\sqrt{\frac{2kar}{r+2a}} \tilde{\varphi} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right).$$

Поскольку на малых расстояниях (1.49)  $2a = r_0(1 + O(\varkappa_0 r_0))$ , очевидно, что это выражение согласуется с формулой (1.66), полученной в малой окрестности точки негладкости.

#### 4.2.1. Сшивка с отраженной и дифрагированной волнами

Поясним сначала геометрический смысл величины (4.13). В главе 6 проведено асимптотическое упрощение лучевой формулы (4.1) для отраженной волны в области (1.36), (1.40) и (1.68). Установлено, что в главном порядке отраженное поле описывается выражением (4.11), а влияние на него гильбертовской сингулярности является поправкой. Оно проявляется только ниже предельного луча, при  $\tilde{\varphi} < 0$ , и имеет вид

$$u_h^{\text{ref}} = -\frac{kh\rho^{2+\lambda}(-\tilde{\varphi})^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)J^{2+\lambda}(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}} \frac{e^{ik\left(r+r_0-\frac{\rho}{2J}\tilde{\varphi}^2\right)-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kJ(r+r_0)}}. \quad (4.14)$$

В области своей применимости выражение (4.14) допускает аппроксимацию цилиндрической волной, которая расходится из точки  $O'$ , расположенной на продолжении предельного луча на расстоянии  $2a$  от точки  $O$  (см. Рисунок 4.3). Действительно, расстояние от  $O'$  до точки наблюдения записывается совершенно аналогично (4.6) и отличается от фаз экспоненты в (4.14) лишь на постоянное слагаемое  $r_0 - 2a$ , откуда нетрудно получить, что

$$u_h^{\text{ref}} = A^{\text{ref}} \frac{e^{ikr'}}{\sqrt{kr'}}, \quad A^{\text{ref}} = -\sqrt{\frac{a}{\pi r_0}} \frac{kh(-2a\tilde{\varphi}')^{2+\lambda} e^{ik(r_0-2a)-i\frac{\pi}{4}}}{(2+\lambda)(1+\lambda)(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}}.$$

Пользуясь формулами (A.5) и (A.6), нетрудно записать асимптотику  $u_h^{\text{out}}$  вдали от предельного луча, где выполнено условие (1.36):

$$u_h^{\text{out}} \approx \theta(-\tilde{\varphi}) A^{\text{ref}} \frac{e^{ikr'}}{\sqrt{kr'}} + A^{\text{dif}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \quad (4.15)$$

Здесь

$$A^{\text{dif}} = -\frac{h\Gamma(1+\lambda)e^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{2\pi(k\sin\varphi_0)^{1+\lambda}(-\tilde{\varphi})^{3+\lambda}} \frac{e^{ikr_0}}{\sqrt{kr_0}}, \quad (4.16)$$

а  $(-\tilde{\varphi})^\lambda = |\tilde{\varphi}|^\lambda$  для отрицательных значений  $\tilde{\varphi}$ , а если  $\tilde{\varphi}$  положительно, то  $(-\tilde{\varphi})^\lambda = \tilde{\varphi}^\lambda e^{-i\lambda\pi}$ . Первое слагаемое отвечает отраженной волне, а второе — дифрагированной цилиндрической волне, расходящейся из точки  $O$ . Выражение для дифракционного коэффициента (4.16) согласуется с полученной ранее формулой (1.62).

Таким образом, асимптотика (4.11), (4.12) для поля применима в области, где выполнены условия (1.4), (1.40) и (1.68), обеспечивающие сшивание с лучевой формулой для отраженной волны, а также условие (3.28) с  $\nu = -3 - \lambda$ . Отметим, что на умеренных расстояниях

(2.25) условие (1.40) вытекает из (1.68), тогда как на малых расстояниях (1.49) они независимы. При не слишком малых  $\lambda$  (достаточно чтобы  $\lambda \geq 0,361$ ) условие (3.28) с  $\nu = -3 - \lambda$  более жесткое, чем (1.68).

Ограничения, накладываемые на ширину переходной зоны в случае гельдеровской сингулярности кривизны, жестче, чем соответствующие ограничения в случае скачка кривизны, что объясняется более сложной геометрией фронта отраженной от контура волны.

### 4.3. Дифракция на контуре с негладкой производной кривизны

Допустим теперь, что производная кривизны контура  $\mathfrak{x}^{(j)}(s) = d^j \mathfrak{x}/ds^j$  порядка  $j \geq 1$  в точке  $O$  имеет скачок с амплитудой  $h$ . Как и в случае гельдеровской сингулярности кривизны, здесь уходящее поле в главном порядке характеризуется лучевой формулой (4.1), а эффект негладкости кривизны имеет характер малой поправки. Сравнение выражения для дифрагированной волны (1.83), (1.82) с формулами (3.33)–(3.35) показывает, что влияние негладкости производной кривизны порядка  $j$  на уходящее поле в переходной зоне описывается функцией семейства (3.27), причем  $\nu = -3 - j$ . В полярных координатах она имеет вид (4.12), где  $\lambda$  следует заменить на  $j$ , что согласуется с рассуждениями, приведенными в конце главы 2. Переходная зона характеризуется условием (3.28) с  $\nu = -3 - j$  (отметим, что это ограничение жестче, чем условие типа (1.68) с  $\lambda$  замененной на  $j$ , и чем условие (1.40)).

Случай, когда производная  $\mathfrak{x}^{(j)}(s)$ ,  $j \geq 1$  имеет в точке  $O$  гельдеровскую сингулярность (4), рассматривается аналогично. Влияние негладкости кривизны на уходящее поле описывается функцией семейства (3.27) со значком  $\nu = -3 - j - \lambda$ .

### 4.4. Обсуждение

Мы продемонстрировали, что функции построенного в главе 3 семейства точных решений уравнения Гельмгольца описывают поля в задачах дифракции на контурах с негладкой кривизной в переходной зоне на умеренном расстоянии от точки негладкости. Область пригодности построенных выражений зависит от геометрии контура, обуславливающей сингулярности диаграмм дифрагированных волн на предельном луче и геометрию фронтов отраженных волн. С увеличением гладкости кривизны контура переходная зона сужается.

## Глава 5. Аппроксимация решений уравнения Матье функциями параболического цилиндра

Решения уравнения Матье, традиционно записываемого в виде

$$w''(x) + (\lambda - 2q \cos 2x)w(x) = 0$$

имеют широкое применение как в математических, так и в физических задачах. Асимптотики функций Матье исследовались в многочисленных работах (например, [51–56], см. также литературу в [43]), где роль большого параметра играли величины  $\lambda$ ,  $q$  или  $\lambda/q$ , и для вещественных  $\lambda$  и  $q$  были построены равномерные по  $x$  асимптотические формулы.

В данной главе мы обращаемся к возникшему в разделе 3.3.2 и ранее не обсуждавшемуся в литературе случаю, когда коэффициенты  $\lambda$  и  $q$  имеют специальный вид, и уравнение Матье переписывается следующим образом:

$$w''(x) + (-iK(2\nu + 1) + K^2 \sin^2 x)w(x) = 0, \quad (5.1)$$

ср. (3.16), где

$$\nu \leq -1, \quad K \rightarrow +\infty.$$

Нас интересуют простые аппроксимации решений (5.1) при вещественных  $x$ , достаточно малых по сравнению с  $K$ . Мы строим соответствующие приближения в терминах функций параболического цилиндра  $D_\nu$ . Отметим, что функции параболического цилиндра допускают удобную равномерную аппроксимацию функциями Эйри [57], однако лишь на вещественной оси и при  $\nu \geq -1/2$  — нам же важен только случай  $\nu \leq -1$ .

**Теорема 1.** *Уравнение Матье (5.1) имеет решение  $w(x)$ , такое что в области*

$$-CK^{-\frac{1}{4}-\varepsilon} < x \leq 0 \quad (5.2)$$

*для него справедливо представление*

$$w(x) = D_\nu \left( -\sqrt{2K}xe^{-i\frac{\pi}{4}} \right) (1 + O(K^{-4\varepsilon})), \quad (5.3)$$

*а в области*

$$0 \leq x < CK^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3(1-\nu)}-\varepsilon} \quad (5.4)$$

*— представление*

$$w(x) = D_\nu \left( -\sqrt{2K}xe^{-i\frac{\pi}{4}} \right) (1 + O(K^{-3(1-\nu)\varepsilon})). \quad (5.5)$$

*Здесь  $C > 0$  и  $\varepsilon > 0$  — константы, не зависящие от  $K$ .*

Отметим, что хотя уравнение на функции параболического цилиндра (A.1) возникает из уравнения (5.1) при замене  $\sin x$  на  $x$ , предполагающей малость  $x$ , асимптотика (5.3), (5.5) пригодна в области, где аргумент функции  $D_\nu$  может принимать большие значения, и, соответственно,  $w$  осциллирует. Область пригодности аппроксимации при отрицательных  $x$  не зависит от параметра  $\nu$  (см. (5.2)), а при положительных  $x$  она сужается с увеличением  $|\nu|$  (см. (5.4)).

Перейдем к доказательству теоремы.

### Доказательство

1. Сделаем в уравнении (5.1) замену переменной

$$z = -\sqrt{2K}xe^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (5.6)$$

и положим

$$w(x) = \tilde{w}(z(x)).$$

Тогда  $\tilde{w}$  удовлетворяет уравнению

$$\tilde{w}''(z) + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) \tilde{w}(z) = R(z)\tilde{w}(z), \quad (5.7)$$

где

$$R(z) = -\frac{z^2}{4} - \frac{iK}{2} \sin^2 \left( \frac{ze^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2K}} \right).$$

Вещественным значениям  $x$  отвечают  $z$ , лежащие на прямой  $\mathbb{R}e^{-i\pi/4}$ .

Для  $R$ , очевидно, при каждом из условий (5.2) и (5.4) справедлива оценка

$$|R(z)| < C \frac{|z|^4}{K}. \quad (5.8)$$

Здесь и далее  $C$  — положительная константа, не зависящая от  $K$ .

2. Уравнение (5.7) стандартным образом [58] сводится к уравнению Вольтерра

$$\tilde{w}(z) = D_\nu(z) + \int_0^{4z} M(z, t) R(t) \tilde{w}(t) dt \quad (5.9)$$

на прямой  $\mathbb{R}e^{-i\pi/4}$ . Здесь

$$M(z, t) = [D_\nu(t)D_{-\nu-1}(iz) - D_\nu(z)D_{-\nu-1}(it)] e^{i\frac{\pi(\nu+1)}{2}}, \quad (5.10)$$

а  $D_\nu(z)$  и  $D_{-\nu-1}(iz)$  — два линейно независимых решения уравнения (A.1), см. [43], вронскиан которых равен

$$W[D_\nu(z), D_{-\nu-1}(iz)] = e^{-i\frac{\pi(\nu+1)}{2}}.$$

При  $\nu \leq -1$  функция  $D_\nu(z)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} z < 0$  имеет бесконечно много нулей, приближающихся на бесконечности к лучам  $\arg z = \pm 3\pi/4$ , но не лежащих на них, а в полуплоскости  $\operatorname{Re} z \geq 0$  не обращается в нуль [43]. Тогда  $w(z)$  на прямой  $\mathbb{R} e^{-i\pi/4}$  допускает представление

$$\tilde{w}(z) = D_\nu(z)v(z) \quad (5.11)$$

с функцией  $v(z)$ , удовлетворяющей уравнению

$$v(z) = 1 + \int_0^{4z} \mu(z, t) R(t) v(t) dt, \quad (5.12)$$

где

$$\mu(z, t) = \frac{D_\nu(t)}{D_\nu(z)} M(z, t), \quad (5.13)$$

см. (5.9) и (5.10).

Мы будем рассматривать уравнение (5.12) отдельно для  $z \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$  и для  $z \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$  (отвечающих отрицательным и положительным  $x$ , соответственно, см. (5.6)).

**3.** Пусть сначала  $z \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$ .

Оценим  $\mu(z, t)$  в области, где выполнено (5.2). В секторе  $-3\pi/4 < \arg z < 3\pi/4$  функция  $D_\nu(z)$  имеет асимптотику (A.5), откуда, с учетом (A.2), следует, что

$$|D_\nu(z)| < C(1 + |z|)^\nu, \quad |D_\nu^{-1}(z)| < C(1 + |z|)^{-\nu}, \quad |D_{-\nu-1}(iz)| < C(1 + |z|)^{-\nu-1}.$$

Тогда

$$\left| \frac{D_\nu(t)}{D_\nu(z)} M(z, t) \right| \leq \left| \frac{D_\nu^2(t) D_{-\nu-1}(iz)}{D_\nu(z)} \right| + |D_\nu(t) D_{-\nu-1}(t)| < C(1 + |t|)^{2\nu} (1 + |z|)^{-2\nu-1}, \quad |t| \leq |z|,$$

и справедлива оценка

$$|\mu(z, t)| < C(1 + |t|)^{2\nu} (1 + |z|)^{-2\nu-1}. \quad (5.14)$$

при  $z \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$  и  $|t| \leq |z|$ .

Решая уравнение (5.12) на полуоси  $z \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$  итерациями, с помощью неравенств (5.8) и 5.14 получим, что при  $\nu \neq -5/2$

$$|v(z) - 1| \leq \left| \int_0^{4z} \mu(z, t) R(t) dt \right| < C \frac{(1 + |z|)^{-2\nu-1}}{K} \int_0^{|z|} (1 + s)^{2\nu} s^4 ds < C \frac{|z|^4}{K}. \quad (5.15)$$

В случае  $\nu = -5/2$  левая часть (5.15) оценивается через  $C|z|^4 \ln |z|/K$ , что в свою очередь не превосходит  $C|z|^{4+\delta}/K$ , где  $\delta > 0$  можно выбрать сколь угодно малым. Значит, при всех  $\nu \leq -1$  выполнена оценка

$$|v(z) - 1| < C \frac{|z|^{4+\delta}}{K},$$



откуда, с учетом (5.11), вытекает справедливость представления (5.3) в области (5.2).

4. Рассмотрим теперь уравнение (5.12) при  $z \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$ .

Оценим функцию  $\mu(z, t)$  (5.13) в области, где выполнено (5.4). В секторе  $\pi/4 < \arg z < 5\pi/4$  функция  $D_\nu$  имеет асимптотику (A.6), а асимптотика в секторе  $-5\pi/4 < \arg z < -\pi/4$  отличается лишь заменой  $e^{i\pi\nu}$  на  $e^{-i\pi\nu}$  во втором слагаемом. Отсюда, с учетом (A.2), вытекают неравенства

$$|D_\nu(z)| < C(1 + |z|)^{-\nu-1}, \quad |D_{-\nu-1}(iz)| < C(1 + |z|)^{-\nu-1}. \quad (5.16)$$

Оценка же  $D_\nu^{-1}(z)$  осложняется тем, что корни  $D_\nu(z)$  приближаются на бесконечности к лучу  $\arg z = 3\pi/4$  [43]. Для больших по модулю корней  $z_{\nu,n}$  справедливо асимптотическое выражение [43]

$$z_{\nu,n} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \sqrt{2\tau_{\nu,n}} \left( 1 + O\left(\frac{\ln \tau_{\nu,n}}{\tau_{\nu,n}}\right) \right),$$

где

$$\tau_{\nu,n} = (2n + 1 + \nu) + if(\nu), \quad f(\nu) = \ln \left( \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma(-\nu) \right),$$

$n$  — достаточно большое натуральное число, а под квадратным корнем и логарифмом подразумеваются главные ветви этих функций. Оценим расстояние от корня  $z_{\nu,n}$  до луча  $\mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$ .

Пусть точка  $z$  лежит на луче  $\mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$  близко к  $z_{\nu,n}$ . В главном порядке

$$|z|^4(1 + o(1)) = |z_{\nu,n}|^4 = 4(2n + 1 + \nu)^2 + 4f^2(\nu),$$

и

$$\begin{aligned} |z - z_{\nu,n}| &= |z| \operatorname{tg} \left| \arg z_{\nu,n} - \frac{3\pi}{4} \right| (1 + o(1)) = |z| \operatorname{tg} \left| \frac{\arg \tau_{\nu,n}}{2} \right| (1 + o(1)) \\ &= \frac{|z| f(\nu)}{2\sqrt{|z|^4 - 4f^2(\nu)}} (1 + o(1)) = \frac{f(\nu)}{2|z|} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Поэтому  $D_\nu^{-1}(z)$  на луче  $\mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$  удовлетворяет оценке

$$|D_\nu^{-1}(z)| < C(1 + |z|). \quad (5.17)$$

Из неравенств (5.16) и (5.17) немедленно следует, что

$$|\mu(z, t)| < C(1 + |t|)^{-2\nu-2}(1 + |z|)^{-\nu} \quad (5.18)$$

при  $z \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$ ,  $t \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$  и  $|t| \leq |z|$ .

Решая уравнение (5.12) на полуоси  $z \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$  итерациями, с помощью неравенств (5.8) и (5.18) получим оценку

$$|v(z) - 1| \leq \left| \int_0^{4z} \mu(z, t) R(t) dt \right| < C \frac{(1 + |z|)^{-\nu}}{K} \int_0^{|z|} (1 + s)^{-2\nu-2} s^4 ds < C \frac{|z|^{3(1-\nu)}}{K}.$$

Отсюда вытекает справедливость представления (5.5) в области (5.4).

Таким образом, теорема доказана.

**Замечание:** использованные в доказательстве Теоремы простые оценки не являются предельно точными, поэтому область пригодности асимптотики (5.3), (5.5) может оказаться шире, чем ограниченная неравенствами (5.2), (5.4). На эту мысль наводит рассмотрение переходной зоны в задаче дифракции на клине: выражение (3.7) для поля пригодно при условии (3.2), менее жестком, чем (5.4) при  $\nu = -1$ .

## Глава 6. Анализ лучевой формулы для отраженной волны

В монографии [2] рассмотрено отражение некасательно падающей волны точечного источника (2.1) от гладкого выпуклого тела. С помощью лучевого метода получена формула (4.1) для отраженной волны в высокочастотном приближении (1.4), (2.3). Выражение для отраженной волны в случае падения плоской волны (1.2) получается из (4.1) при удалении точечного источника на бесконечность вдоль фиксированного направления. Эта операция формульно соответствует делению на  $-e^{ikr_0+i\frac{\pi}{4}}/2\sqrt{2\pi kr_0}$  (см. раздел 1.5) и предельному переходу  $r_0 \rightarrow \infty$ :

$$u^{\text{ref}} = -\frac{e^{ik(\tau^*(N^*)+l^*)}}{\sqrt{1+2\mathfrak{a}^*l^*/\sin\beta}} \left(1 + O\left(\frac{1}{kl^*}\right)\right). \quad (6.1)$$

Здесь  $l^*$  — расстояние от точки наблюдения  $M$  до точки геометрического отражения  $N^*$ ,  $\tau^*(N^*)$  — значение фазы плоской волны (1.2) в точке отражения  $N^*$ ,  $\beta$  — угол скольжения в точке  $N^*$ ,  $\mathfrak{a}^*$  — значение кривизны в точке  $N^*$ . Очевидно, выражение (6.1), как и (4.1), теряет гладкость на предельном луче.

Проанализируем лучевую формулу для отраженной волны  $u^{\text{ref}}$ , во-первых, на малых расстояниях от точки негладкости  $O$  и, во-вторых, в окрестности предельного луча на умеренных расстояниях. Это позволит определить области пригодности полученных выше формул. На малых расстояниях для простоты выкладок будет рассмотрен случай, когда на контур падает плоская волна (1.2). На умеренных расстояниях удобнее предположить, что падающая волна — цилиндрическая (2.1) от точечного источника. Случай скачка кривизны и случай гильдеровской сингулярности кривизны рассмотрим по отдельности (случай негладкости производной кривизны порядка  $j$  разбирается аналогично, поэтому его мы опускаем).

### 6.1. Случай скачка кривизны

#### 6.1.1. Малые расстояния

Упростим формулу (6.1) для точек наблюдения, лежащих вблизи точки негладкости  $O$ .

Очевидно, что расстояние от точки наблюдения  $M = (x, y)$  до соответствующей точки отражения  $N^* = (X^*, Y^*)$  дается выражением  $l^* = (x - X^*) \cos \gamma + (y - Y^*) \sin \gamma$  (см. Рисунок 6.1). Значение эйконала  $\tau^*$  в точке  $N^*$  связано со значением фазы падающей волны (1.2)

следующим образом:

$$\tau^*(X^*, Y^*) = X^* \cos \varphi_0 - Y^* \sin \varphi_0.$$

Следовательно, эйконал в точке  $M$  равен

$$\tau^*(x, y) = \tau^*(X^*, Y^*) + l^* = (x - X^*) \cos \gamma + (y - Y^*) \sin \gamma + X^* \cos \varphi_0 - Y^* \sin \varphi_0. \quad (6.2)$$

Закон геометрического отражения гласит

$$\varphi_0 + \psi^* = \gamma - \psi^*, \quad (6.3)$$

где  $\psi^*$  — угол наклона касательной к контуру в точке  $N^*$  (см. Рисунок 6.1). Из (6.3) с очевидностью следует, что  $\operatorname{tg}(\varphi_0 + 2\psi^*) = \operatorname{tg} \gamma$ , или

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{tg}(2\psi^*)}{1 - \operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg}(2\psi^*)} = \frac{y - Y^*}{x - X^*}. \quad (6.4)$$

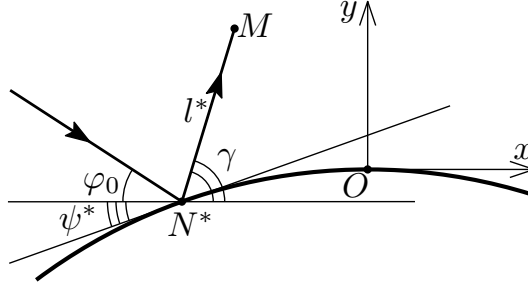


Рисунок 6.1 — Отражение от гладких частей контура. Малые расстояния

Пусть  $N^*$  лежит близко к  $O$ . Из формулы для кривизны (2) вытекает, что

$$\psi^* = -\varkappa^* s^* \quad (6.5)$$

где  $s^*$  — длина дуги, соответствующая точке  $N^*$ , а  $\varkappa^*$  — значение кривизны в точке  $N^*$ . Выражения для координат  $N^*$  получим, положив  $n = 0$  в (1.10):

$$X^* = s^* + O(\varkappa^2(s^*)^3), \quad Y^* = -\frac{\varkappa^*(s^*)^2}{2} + O(\varkappa^2(s^*)^3). \quad (6.6)$$

Используя малость  $s^*$  и соотношения (6.6) и (6.5), из (6.4) находим

$$s^* = -\frac{r \sin \tilde{\varphi}}{\sin \varphi_0} (1 + O(\varkappa r)). \quad (6.7)$$

Здесь, как и прежде,  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$ , см. (1.7). С помощью (6.3) и (6.5) эйконал (6.2) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau^*(x, y) &= (x - X^*) \cos(\varphi_0 + 2\psi^*) + (y - Y^*) \sin(\varphi_0 + 2\psi^*) + X^* \cos \varphi_0 - Y^* \sin \varphi_0 = \\ &= x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 - 2\varkappa^* s^* r \sin \tilde{\varphi} - \varkappa^*(s^*)^2 \sin \varphi_0 + O(\varkappa^2 r^3). \end{aligned}$$

Наконец, применяя (6.7) и учитывая формулу для кривизны (2), получим

$$\tau^*(x, y) = x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 + (\mathfrak{a}_0 + h\theta(-\tilde{\varphi})) \frac{(r \sin \tilde{\varphi})^2}{\sin \varphi_0} + O(\mathfrak{x}^2 r^3).$$

Раскладывая в (6.1) экспоненту до квадратичных членов и амплитуду до линейных, приходим к формуле

$$u^{\text{ref}} = w^{\text{ref}} + v^{\text{ref}} (1 + O(\mathfrak{x}r) + O(k\mathfrak{x}r^2\tilde{\varphi}^2)), \quad (6.8)$$

где

$$w^{\text{ref}} = -e^{ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)} \quad (6.9)$$

и

$$v^{\text{ref}} = (\mathfrak{a}_0 + h\theta(-\tilde{\varphi})) \left( \frac{y}{\sin^2 \varphi_0} - ik \frac{(r \sin \tilde{\varphi})^2}{\sin \varphi_0} \right) e^{ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)}. \quad (6.10)$$

Из (6.9) и (6.10) видно, что  $w^{\text{ref}}$  является главным членом асимптотики в области, где расстояния малы (1.12) и выполнено условие (1.46). Таким образом, в главном (относительно параметра  $\mathfrak{x}r \rightarrow 0$ ) приближении отраженная волна представляет собой отраженную от оси  $x$  плоскую волну. Отметим, что последние условия (1.12) и (1.46) выполнены в пограничном слое вблизи точки  $O$ , характеризуемом условием (1.38).

Переписав формулы (6.8)–(6.10) в растянутых координатах (1.13) с помощью соотношений (1.14), нетрудно увидеть, что функции  $U_0^{\text{out}}$  (1.22) и  $W$  (1.27), а также первое слагаемое в (1.34) сшиваются с отраженной волной.

### 6.1.2. Умеренные расстояния

Теперь обратимся к умеренным расстояниям  $\mathfrak{x}r \sim O(1)$ . Упростим формулу (4.1) для отраженной волны от точечного источника (2.1), лежащего в точке  $M_0 = (x_0, y_0)$ , в окрестности предельного луча. Мы будем использовать обозначения, введенные в главе 2.

Сначала получим выражение для длины дуги  $s^*$ , соответствующей точке отражения  $N^*$  (см. Рисунок 6.2). Ясно, что для точек наблюдения из узкой окрестности предельного луча, где  $\tilde{\varphi} \rightarrow 0$ , см. (1.7), точка отражения лежит вблизи  $O$ , т.е.  $s^*$  мало.

Согласно закону геометрического отражения

$$\varphi_0^* + \psi^* = \varphi^* - \psi^*, \quad (6.11)$$

где  $\varphi_0^*$  и  $\varphi^*$  — углы между осью  $x$  и лучами  $N_*M_0$  и  $N_*M$ ,  $\psi^*$  — угол наклона касательной к контуру в точке  $N^*$  (см. Рисунок 6.2). Отсюда следует аналогичное (6.4) равенство

$$-T(x_0, y_0) = \frac{T(x, y) - \operatorname{tg} 2\psi^*}{1 + T(x, y) \operatorname{tg} 2\psi^*}, \quad T(x, y) = \frac{x - X^*}{y - Y^*}, \quad (6.12)$$

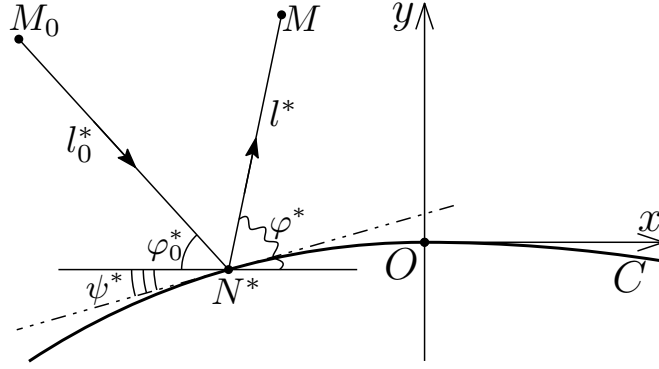


Рисунок 6.2 — Отражение от гладких частей контура. Умеренные расстояния

где  $X^*$  и  $Y^*$  — как и прежде, декартовы координаты точки  $N^*$ .

После подстановки (6.5) и (6.6) в (6.12) прямое вычисление, использующее малость  $s^*$ , дает

$$\sin \tilde{\varphi} + s^* \left( 2\alpha^* + \frac{\sin \varphi_0}{r_0} + \frac{\sin \varphi}{r} \right) + O(\kappa(r_0 + r)(s^*)^2) = 0. \quad (6.13)$$

Учитывая, что  $\tilde{\varphi} \rightarrow 0$ , в результате некоторых выкладок получаем из (6.13):

$$s^* = -\frac{\rho \tilde{\varphi}}{\sin \varphi_0} \left( \frac{\theta(\tilde{\varphi})}{J_-} + \frac{\theta(-\tilde{\varphi})}{J_+} \right) (1 + O(\tilde{\varphi})). \quad (6.14)$$

Здесь использовано выражение для кривизны контура (2.11) и для  $J_{\pm}$  (2.20), величина  $\rho = r_0 r / (r + r_0)$  введена в (2.16).

Теперь упростим фазу экспоненты в лучевой формуле (4.1). При  $N^*$  близких к  $O$  эйконал  $\tau^* = l_0^* + l^*$  в точке  $M$  записывается аналогично (2.18):

$$\begin{aligned} \tau^* = r_0 + r + s^* \sin \varphi_0 \tilde{\varphi} + \frac{(s^*)^2}{2\rho} \sin^2 \varphi_0 (\theta(-s^*)J_- + \theta(s^*)J_+) + \\ + O(s^*(\tilde{\varphi})^2) + O\left(\frac{(s^*)^2 \tilde{\varphi}}{\rho}\right) + O\left(\frac{(s^*)^3}{\rho^2}\right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда (6.14) и снова учитывая малость  $\tilde{\varphi}$ , получим выражение для фазы экспоненты в (4.1):

$$ik\tau^* = ik(r + r_0) - ik\frac{\rho}{2}\tilde{\varphi}^2 \left( \frac{\theta(\tilde{\varphi})}{J_-} + \frac{\theta(-\tilde{\varphi})}{J_+} \right) + O(kr\tilde{\varphi}^3). \quad (6.15)$$

Поправочный член мал при выполнении условия (1.40).

Аналогичным образом упростим выражение в знаменателе формулы (4.1):  $\mathcal{J}^* = (r + r_0)(\theta(\tilde{\varphi})J_- + \theta(-\tilde{\varphi})J_+)(1 + O(\tilde{\varphi}))$ . Переносим последнее слагаемое в (6.15) в амплитуду, получим упрощенный вид лучевой формулы при  $\kappa r \sim O(1)$  и  $\tilde{\varphi} \rightarrow 0$ :

$$u^{\text{ref}} = \frac{e^{ik(r+r_0)+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k(r+r_0)}} \left( \frac{\theta(\tilde{\varphi})}{\sqrt{J_-}} e^{-ik\frac{\rho}{2J_-}\tilde{\varphi}^2} + \frac{\theta(-\tilde{\varphi})}{\sqrt{J_+}} e^{-ik\frac{\rho}{2J_+}\tilde{\varphi}^2} \right) (1 + O(kr(\tilde{\varphi})^3)). \quad (6.16)$$

Формула (6.16) получена в предположении, что выполнено условие (1.40).

Отметим, что на малых расстояниях (1.12)

$$\frac{\rho}{J_{\pm}} = \frac{\rho}{1 + 2\mathfrak{a}_{\pm}\rho/\sin\varphi_0} = \rho - \frac{2\mathfrak{a}_{\pm}\rho^2}{\sin\varphi_0} + O(\mathfrak{x}^2\rho^3),$$

и выражение (6.16) переписывается в виде:

$$u^{\text{ref}} \approx \frac{e^{ik(r+r_0-\frac{\rho}{2}\tilde{\varphi}^2)+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{k(r_0+r_1)}} \left( 1 + (\mathfrak{a}_- + h\theta(-\tilde{\varphi})) \frac{\rho(ik\rho\tilde{\varphi}^2 - 1)}{\sin\varphi_0} \right). \quad (6.17)$$

Напомним, что  $h = \mathfrak{a}_+ - \mathfrak{a}_-$  — амплитуда скачка кривизны. Формула (6.17) справедлива в области, где помимо (1.40) выполнены еще условия (1.12) и (1.46). Из (6.17) следует, что слагаемые в (4.10), отвечающие  $U_0$  и  $U_1$ , в области своей пригодности соответствуют геометрически отраженной волне.

## 6.2. Случай гельдеровской сингулярности кривизны

Теперь рассмотрим случай гельдеровской сингулярности кривизны (4).

### 6.2.1. Малые расстояния

Обратимся сначала к полю на малых расстояниях, когда точка наблюдения  $M$  близка к  $O$ , см. (1.49), но (1.4) все еще выполнено. Анализ лучевой формулы проводится по той же схеме, что и в случае скачка кривизны. Формула (6.6) заменяется на

$$\begin{aligned} X^* &= s^* + O(\mathfrak{a}_0^2(s^*)^3) + O(h^2(s^*)^{3+2\lambda}), \\ Y^* &= -\frac{\mathfrak{a}_0(s^*)^2}{2} - \frac{h(s^*)_+^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)} + O(\mathfrak{a}_0^2(s^*)^3) + O(h^2(s^*)^{3+2\lambda}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Значение  $s^*$  в точке отражения  $N^*$  дается выражением

$$s^* = -\frac{r \sin \tilde{\varphi}}{\sin \varphi_0} (1 + O(\mathfrak{a}_0 r) + O(hr^{1+\lambda})), \quad (6.19)$$

и эйконал отраженной волны принимает вид

$$\tau^*(x, y) = x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 + \mathfrak{a}_0 \frac{r^2 \sin^2 \tilde{\varphi}}{\sin \varphi_0} + h \frac{(r \sin \tilde{\varphi})_+^{2+\lambda}}{(\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} + O(\mathfrak{a}_0^2 r^3) + O(h^2 r^{3+2\lambda}).$$

Отсюда получаем формулы

$$u^{\text{ref}} = w^{\text{ref}} + v_h^{\text{ref}} (1 + O(\rho(\mathfrak{a}_0 + hr^\lambda)) + O(kr^2\tilde{\varphi}^2(\mathfrak{a}_0 + hr^\lambda))), \quad (6.20)$$

где  $w^{\text{ref}}$  дается (6.9), а

$$\begin{aligned} v_h^{\text{ref}} &= e^{ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)} \left[ \mathfrak{a}_0 \left( \frac{y}{\sin^2 \varphi_0} - ik \frac{(r \sin \tilde{\varphi})^2}{\sin \varphi_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + h \frac{(r \sin \tilde{\varphi})_+^\lambda}{(\sin \varphi_0)^\lambda} \left( \frac{y}{\sin^2 \varphi_0} - 2ik \frac{(r \sin \tilde{\varphi})^2}{(2+\lambda)(1+\lambda) \sin \varphi_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Из (6.9) и (6.21) видно, что  $w^{\text{ref}}$  является главным членом асимптотики в области, где выполнены (1.49), (1.67) и (1.68).

Выражения (1.22), (1.58) и первое слагаемое в (1.61) сшиваются с формулой (6.20).

### 6.2.2. Умеренные расстояния

Обратимся теперь к умеренным расстояниям (2.25) и упростим отражательную формулу (4.1) для случая падения цилиндрической волны. Подобно тому, как это сделано выше для скачка кривизны, после некоторых выкладок получим выражение для  $s^*$ :

$$s^* = \frac{-\rho\tilde{\varphi}}{J \sin \varphi_0} \left( 1 - \frac{2h\rho^{1+\lambda}(-\tilde{\varphi})_+^\lambda}{(1+\lambda)J^{1+\lambda}(\sin \varphi_0)^\lambda} + O(h^2\rho^{2+2\lambda}|\tilde{\varphi}|^{2\lambda}) + O(\tilde{\varphi}) \right), \quad (6.22)$$

величина  $J$  определена в (2.27). Пользуясь (6.22), вместо (6.15) имеем:

$$ik\tau^* = ik(r+r_0) - ik\frac{\rho}{2J}\tilde{\varphi}^2 + \frac{2i\Gamma(3+\lambda)kh(-\rho\tilde{\varphi})_+^{2+\lambda}}{\Gamma(1+\lambda)J(J\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} + O(k\rho(\tilde{\varphi})^3). \quad (6.23)$$

Аналогичным образом упрощается выражение для  $\mathcal{J}^*$ :

$$\mathcal{J}^* = J(r_0+r) \left( 1 + \frac{2h\rho^{1+\lambda}(-\tilde{\varphi})_+^\lambda}{(J\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} + O(\tilde{\varphi}) + O(h^2\rho^{2+2\lambda}|\tilde{\varphi}|^{2\lambda}) \right). \quad (6.24)$$

Оставляя в фазе (6.23) экспоненты в (4.1) только квадратичные члены, получим

$$u^{\text{ref}} \approx \frac{e^{ik(r_0+r)-i\frac{k\rho}{2J}\tilde{\varphi}^2+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{kJ(r_0+r)}} \left( 1 + h\frac{\rho^{1+\lambda}(-\tilde{\varphi})_+^\lambda}{(J\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \left( \frac{2i\Gamma(3+\lambda)k\rho\tilde{\varphi}^2}{\Gamma(1+\lambda)J} - 1 \right) \right). \quad (6.25)$$

Из (6.23) и (6.24) видно, что асимптотика (6.25) для лучевой формулы справедлива в области, где выполнены условия (1.40), (1.68) и  $hr^{1+\lambda}|\tilde{\varphi}|^\lambda \rightarrow 0$  (вытекающее из малости  $\tilde{\varphi}$ ). Отметим, что на умеренных расстояниях  $kh\rho^{2+\lambda}|\tilde{\varphi}|^{2+\lambda} \sim kr|\tilde{\varphi}|^{2+\lambda}$  (см. (2.25)), и тогда условие (1.40) вытекает из (1.68). Однако на малых расстояниях (1.49) ограничения (1.68) и (1.40) независимы.

Формула (4.15) согласуется с (6.25) в области, где выполнены условия (1.36) и (1.68). Отметим, что на малых расстояниях (1.49) при выполнении условий (1.67) формула (6.25) переписывается в виде

$$u^{\text{ref}} \approx \frac{e^{ik(r_0+r_1)-i\frac{k\rho}{2}\tilde{\varphi}^2+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}k(r_0+r_1)} \left( 1 + \frac{\varpi_0\rho(ik\rho\tilde{\varphi}^2-1)}{\sin \varphi_0} + \frac{h\rho^{1+\lambda}(-\tilde{\varphi})_+^\lambda}{(\sin \varphi_0)^{1+\lambda}} \left( \frac{2ik\rho\tilde{\varphi}^2}{(2+\lambda)(1+\lambda)} - 1 \right) \right),$$

и, очевидно, согласуется с (6.20)–(6.21).



## Заключение

Сформулируем основные результаты диссертационной работы:

1. Последовательный метод пограничного слоя развит для задач высокочастотной дифракции в случае некасательного падения на контур, кривизна или производная кривизны порядка  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , которого имеет скачок или гильдеровскую сингулярность.
2. Построены высокочастотные асимптотики дифрагированной волны и поля в переходной зоне для каждого типа особенности кривизны. Определены области пригодности всех полученных выражений.
3. Построены удобные простые формулы для асимптотического описания слияния двух высокочастотных цилиндрических волн. Тем самым предложено общее выражение для поля во френелевских переходных зонах.

Развитый подход может оказаться полезен и в других задачах высокочастотной дифракции.

## Приложение А. Функции параболического цилиндра

В данном приложении приведены сведения о функциях параболического цилиндра (см., например, [43]), часто используемые в основном тексте диссертации.

Функции параболического цилиндра  $D_\nu$  удовлетворяют уравнению

$$D_\nu''(z) + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) D_\nu(z) = 0 \quad (\text{A.1})$$

с начальными данными

$$D_\nu(0) = \frac{2^{\frac{\nu}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad D_\nu'(0) = -\frac{2^{\frac{\nu+1}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)} \quad (\text{A.2})$$

(здесь  $\Gamma$  — гамма-функция).

При  $\nu < 0$  для  $D_\nu$  справедливы интегральные представления, см., например, [43],

$$D_\nu(Z) = \frac{e^{-Z^2/4}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} p^{-\nu-1} e^{-tp - \frac{p^2}{2}} dp, \quad (\text{A.3})$$

и

$$D_\nu(Z) = \frac{e^{i(\nu+1)\pi}}{\sqrt{2\pi}i} e^{\frac{Z^2}{4}} \int_{-\epsilon+i\infty}^{-\epsilon-i\infty} e^{Zp + \frac{p^2}{2}} p^\nu dp, \quad (\text{A.4})$$

где выбрана главная ветвь функции  $(\cdot)^\nu$  и  $\epsilon > 0$ . При больших значений  $|Z|$  и фиксированном  $\nu$  функция  $D_\nu$  имеет асимптотику

$$D_\nu(Z) = Z^\nu e^{-\frac{Z^2}{4}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|Z|^2}\right) \right), \quad (\text{A.5})$$

при  $-3\pi/4 < \arg Z < 3\pi/4$ , и

$$D_\nu(Z) = \left( Z^\nu e^{-\frac{Z^2}{4}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{i\nu\pi} Z^{-\nu-1} e^{\frac{Z^2}{4}} \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{|Z|^2}\right) \right), \quad (\text{A.6})$$

при  $\pi/4 < \arg Z < 5\pi/4$ , см. [43].

## Список литературы

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — Москва : Наука, 1973.
2. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — Москва : Наука, 1972.
3. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — Москва : Советское радио, 1970.
4. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction // *J. Opt. Soc. Am.* — 1962. — Vol. 52, no. 5. — P. 116–130.
5. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. — Москва : Связь, 1978.
6. James G. L. Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves. — London : IEEE Electromagnetic series 1, 1986.
7. Buchal R. N., Keller J. B. Boundary layer problems in diffraction theory // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1960. — Vol. 13, no. 1. — P. 85–114.
8. Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. — Ленинград : Издательство ЛГУ, 1974.
9. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — Москва : Наука, 1989.
10. Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic problems in singularly perturbed domains. — Basel : Birkhäuser Verlag, 2000.
11. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — Москва : Наука, 1976.
12. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — Т. 1.
13. Weston V. H. The effect of a discontinuity in curvature in high-frequency scattering // *IRE Trans. AP.* — 1962. — Vol. 10. — P. 775–780.
14. Weston V. H. Effect of a discontinuity of curvature in high-frequency scattering. Part II // *IEEE Trans. AP.* — 1965. — Vol. 13. — P. 611–613.
15. Senior T. B. A. The diffraction matrix for a discontinuity in curvature // *IEEE Trans. AP.* — 1972. — Vol. 20, no. 3. — P. 326–333.
16. Kaminetzky L., Keller J. B. Diffraction coefficients for higher order edges and vertices // *SIAM J. Appl. Math.* — 1972. — Vol. 22, no. 1. — P. 109–134.

17. Филиппов А. Ф. Отражение от границы, состоящей из дуг различной кривизны // *Прикл. мат. мех. (ПММ)*. — 1971. — Т. 34. — С. 1076–1084.
18. Rogoff Z. M., Kiselev A. P. Diffraction at jump of curvature on an impedance boundary // *Wave Motion*. — 2001. — Vol. 33, no. 2. — P. 183–208.
19. Попов А. В. Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны // Труды 5 Всес. симпози. дифр. распр. волн. — Ленинград : Наука. — 1971. — С. 171–175.
20. Michaeli A. Diffraction by a discontinuity in curvature including the effect of creeping wave // *IEEE Trans. AP*. — 1990. — Vol. 38, no. 6. — P. 929–931.
21. Andronov I. V., Kirpichnikova N., Bouche D., Philippov V. Creeping wave diffraction by a junction with plane surface // *Ann. Télécommun.* — 1997. — Vol. 52. — P. 483–488.
22. Kirpichnikova A. S., Philippov V. B. Diffraction by a line of curvature jump (a special case) // *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. — 2001. — Vol. 49, no. 12. — P. 1618–1623.
23. Zlobina E. A., Kiselev A. P. Boundary-layer approach to high-frequency diffraction by a jump of curvature // *Wave Motion*. — 2020. — Vol. 96. — Article ID 102571.
24. Злобина Е.А. Коротковолновая дифракция на контуре с негладкой кривизной. Пограничный подход // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2020. — Т. 493. — С. 169–185.
25. Злобина Е. А., Киселев А. П. Дифракция коротких волн на контуре с гельдеровской сингулярностью кривизны // *Алгебра и анализ*. — 2021. — Т. 33, № 2. — С. 35–55.
26. Злобина Е. А. Дифракция коротких волн на контуре с гельдеровской сингулярностью кривизны. Переходная зона // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2021. — Т. 506. — С. 43–56.
27. Злобина Е. А., Киселев А. П. Переходная зона в высокочастотной задаче дифракции на импедансной границе со скачком кривизны. Метод Кирхгофа и метод пограничного слоя // *Радиотехника и электроника*. — 2022. — Т. 67, № 2. — С. 130–139.
28. Злобина Е. А., Киселев А. П. Френелевские переходные зоны // *Радиотехника и электроника*. — 2023. — Т. 68, № 6. — С. 542–552.
29. Злобина Е. А. Аппроксимация функций Маттье функциями параболического цилиндра // *Математические заметки*. — 2023. — Т. 114, № 3. — С. 347–352.
30. Zlobina E. A., Kiselev A. P. High frequency diffraction by a contour with a jump of curvature // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2018”. — St. Petersburg : IEEE. — 2018. — P. 325–328.
31. Zlobina E. A. High frequency diffraction by a contour with a Hölder discontinuity of curvature // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2019”. — St. Petersburg : IEEE. — 2019. — P. 251–252.
32. Zlobina E. A. Diffraction by a jump of curvature: Wavefield near the limit ray at a moderate

- distance // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2020”. — St. Petersburg : IEEE. — 2020. — P. 128–130.
33. Злобина Е. А., Киселев А. П. Дифракция волны шепчущей галереи при скачкообразном распрямлении границы // *Акустический журнал*. — 2023. — Т. 69, № 2. — С. 119–128.
  34. Zlobina E. A., Kiselev A. P. The Malyuzhinets—Popov diffraction problem revisited // *Wave Motion*. — 2023. — Vol. 121. — Article ID 103172.
  35. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. — Москва : Издательство иностранной литературы, 1960. — Т. 2.
  36. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — Москва : Наука, 1974. — Т. 2.
  37. Avila G. S. S., Keller J. B. The high-frequency asymptotic field of a point source in an inhomogeneous medium // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1963. — Vol. 16, no. 4. — P. 363–381.
  38. Бабич В. М., Киселев А. П. Упругие волны. Высокочастотная теория. — Санкт-Петербург : БХВ, 2014.
  39. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — Москва : Издательство МГУ, 1999.
  40. Эрдейи А. Асимптотические разложения. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
  41. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. — Москва : Наука, 1987.
  42. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. — Москва : Наука, 1989.
  43. NIST Handbook of Mathematical Functions / ed. by Olver F. W. G., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark Ch. B. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010.
  44. Уфимцев П. Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. — Москва : Бином, 2012.
  45. Попов А. В. Метод поперечной диффузии в задаче о дифракции звука на ленте // *Акустический журнал*. — 1973. — Т. 19, № 4. — С. 594–600.
  46. Цепелев Н. В. О некоторых специальных решениях уравнения Гельмгольца // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1975. — Т. 51. — С. 197–202.
  47. Popov A., Ladyzhensky (Brodskaya) A., Khozioski S. Uniform asymptotics of the wave diffracted by a cone of arbitrary cross section // *Russ. J. Math. Phys.* — 2009. — Vol. 16, no. 2. — P. 296–299.
  48. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. — Москва : Наука, 1973. — Т. 2. Теория поля.
  49. Малюжинец Г. Д. Развитие представлений о явлениях дифракции (к 130-летию со дня смерти Томаса Юнга) // *Успехи физических наук*. — 1959. — Т. 69, № 2. — С. 321–334.

50. Крюковский А. С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. — Москва : РосНОУ, 2013.
51. Langer R. E. The solutions of the Mathieu equation with a complex variable and at least one parameter large // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1934. — Vol. 36, no. 3. — P. 637–695.
52. McKelvey R. W. The solutions of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1955. — Vol. 79. — P. 103–123.
53. Sharples A. Uniform asymptotic forms of modified Mathieu functions // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* — 1967. — Vol. 20, no. 3. — P. 365–380.
54. Sharples A. Uniform asymptotic expansions of modified Mathieu functions // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* — 1971. — Vol. 247. — P. 1–17.
55. Barret W. Mathieu functions of general order: Connection formulae, base functions and asymptotic formulae. 1–5 // *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A.* — 1981. — Vol. 301. — P. 75–162.
56. Mark D.T. Uniform asymptotic approximation of Mathieu functions // *Methods Appl. Anal.* — 1994. — Vol. 301. — P. 75–162.
57. Dobrokhotov S. Yu., Tsvetkova A. V. Global asymptotics for functions of parabolic cylinder and solutions of the Schrödinger equation with a potential in the form of a nonsmooth double well // *Russ. J. Math. Phys.* — 2023. — Vol. 30, no. 1. — P. 46–61.
58. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. — Москва : Наука, 1978.