1959 г. Ноябрь — декабрь т. XIV, вып. 6 (90)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЛЕНИНГРАДСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

29 сентября 1959 г. состоялось учредительное собрание Ленинградского математического общества. Предполагается, что это общество, созданное при Ленинградском университете, объединит всех творчески работающих математиков Ленинграда. Целью общества, как записано в уставе, является «всемерное содействие развитию математических наук в СССР, а также использованию достижений этих наук в смежных научных дисциплинах и в практике социалистического строительства». Намечено систематически ставить и обсуждать научные доклады ленинградских и иногородних ученых, посвященные сообщению новых научных результатов, обзорам состояния отдельных ветвей математики и смежных наук, а также вопросам истории, философии и методологии математических наук. Общество будет активно участвовать в математической жизни страны: устраивать юбилейные и мемориальные заседания; вести работу по популяризации и пропаганде достижений математических наук; содействовать повышению уровня преподавания математики на различных его ступенях; проводить ежегодные школьные математические олимпиады и организовывать школьные математические кружки; участвовать в организации математических съездов, конференций и совещаний; рассматривать тематические планы издательств математической литературы: и т. д. В будущем также предполагается издание при обществе научного журнала.

На учредительном собрании было избрано Правление в составе: Ю. В. Линник (президент); О. А. Ладыженская и С. М. Лозинский (вице-президенты); А. Д. Александров, Б. А. Венков, А. В. Малышев (секретарь), Н. Н. Поляхов, В. И. Смирнов (казначей).

Собрания общества будут, как правило, происходить на математико-механическом факультете Ленинградского университета во второй и четвертый вторник каждого месяца (кроме каникулярного времени) в 19 часов. С созданием Ленинградского математического общества общегородской математический семинар при Доме ученых прекратил свою работу; общество приняло на себя его функции.

А. В. Малышев.

1960 г. май — июнь *т. XV, вып. 3 (93)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 29 сентября 1959 г.

Организационное заседание. Отчет о нем см. УМН XIV, вып. 6 (90) (1959), 212 [1]).

Заседание 27 октября 1959 г.

1. Ю. В. Линник «Дисперсионный метод для решения некоторых бинарных аддитивных задач и асимптотическая формула в проблеме Гарди—Литтлвуда».

Дисперсионный метод использует аналог понятия дисперсии и неравенства Чебышёва для аддитивных бинарных задач вида

$$n=\varphi+D'\nu,$$

где $\{\varphi\}$ — некоторая «густая» последовательность натуральных чисел; D' пробегает некоторую не слишком редкую систему чисел, а ν — может быть и редкой, но хорошо распределенной в прогрессиях малой разности системой. Если

$$U(m)=\sum_{\varphi=m}1,$$

то дисперсия V' проблемы определяется, как

$$V'=\sum_{D'\in(D)}\Big(\sum_{\nu\in(\nu)}U(n-D'\nu)-A(n,\ D')\Big)^2,$$

где $A(n,\ D')$ — подходящее «среднее значение». Основную роль играет неравенство типа И. М. Виноградова

$$V'\leqslant V=\sum_{D\leqslant D\leqslant D_1+D_2}\Big(\sum_{\nu\in(\nu)}U(n-D\nu)-A(n,\ D)\Big)^2.$$

В применении к проблеме Гарди—Литтлвуда получается асимптотическая формула [2])

$$Q(n=p+\xi^2+\eta^2)=\pi\frac{n}{\ln n}\prod_{p}\left(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right)\prod_{p/n}\frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}+O(n(\ln n)^{-1,028}).$$

---

[1]) В указанной информационной заметке по моему недосмотру вкралась досадная погрешность. Второй ее абзац следует читать так: «На учредительном собрании было избрано Правление в составе: Ю. В. Линник (президент), О. А. Ладыженская и С. М. Лозинский (вице-президенты), А. Д. Александров, Б. А. Венков, А. В. Малышев (секретарь), С. Г. Михлин, Н. Н. Поляхов, В. И. Смирнов (казначей)». Прим. А. В. Малышева.

[2]) В моей Заметке «Проблема Гарди—Литтлвуда о сложении простых чисел и двух квадратов» (ДАН 124, № 1 (1959), 29—30) ошибочно указан лучший остаточный член.

В доказательстве формулы важную роль играет новая оценка в теории L-рядов:

$$\sum_{\frac{D_1}{2}\leqslant D\leqslant D_1}\ \sum_{\chi \bmod D}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti,\chi\right)\right|^6=O\left(D_1^2(|t|+2)\exp\left(\ln D_1(|t|+2)\right)^{\varepsilon}\right),$$

где $L\left(\frac{1}{2}+ti,\chi\right)$ — L-ряд по модулю D, $\varepsilon>0$ сколь угодно мало.

2. Ю. Ф. Борисов «О связи внешней и внутренней геометрии поверхности».

1°. Связь пространственной формы поверхности с ее внутренней геометрией существенно зависит от дополнительных условий регулярности, накладываемых на рассматриваемую поверхность. То, что из одних свойств внутренней метрики нельзя вывести сколько-нибудь содержательных утверждений о форме поверхности без предположения ее гладкости, ясно на примере изгибания сферы путем зеркального отражения отдельных ее частей в секущих плоскостях («проламывания» сферы).

Из известных теорем Нэша и Кейпера о гладких погружениях римановой метрики в евклидово пространство вытекает, что столь же произвольные изгибания поверхностей с регулярной метрикой возможны даже в классе гладких поверхностей (класс $C^{1,\alpha}$).

Естественно возникает вопрос: каковы минимальные требования, при которых указанное явление становится невозможным?

Ниже рассматриваются гладкие поверхности, допускающие параметризацию класса $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$ (первые производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α). Такие поверхности называем поверхностями класса $C^{1,\alpha}$. Степень регулярности таких поверхностей характеризуется показателем α.

2°. Для поверхностей класса $C^{1,\alpha}$, где $\alpha>\frac{2}{3}$, справедлива следующая теорема: поверхность знакопостоянной гауссовой кривизны имеет ограниченную внешнюю кривизну в смысле А. В. Погорелова; если гауссова кривизна положительна, поверхность локально выпукла (доказательство опубликовано в Вестнике Ленинградского университета № 13 (1959), 20—26).

Из этой теоремы вытекает, в частности, что в указанном классе кейперовское изгибание замкнутой выпуклой поверхности невозможно.

3°. Пусть поверхность F задана уравнением $z=f(x,y)$, где $f(x,y)$ определена и голоморфна в гомеоморфной кругу замкнутой области G и равна нулю на границе Γ области. Если $|f_x|$, $|f_y|$ достаточно малы, F допускает непрерывное изгибание в классе $C^{1,\alpha}$, $\alpha<\frac{1}{13}$, при котором граница Γ и касательные плоскости в точках границы остаются неподвижными. Отсюда, в частности, вытекает наличие в названном классе весьма произвольных непрерывных изгибаний замкнутых выпуклых поверхностей с регулярной метрикой. В том же классе возможно непрерывное изгибание плоскости, при котором все получаемые поверхности, кроме исходной, не являются линейчатыми.

4°. Представляется весьма правдоподобным, что обычная для регулярных поверхностей связь внутренней и внешней геометрии, обеспечивающая, в частности, неизгибаемость сферы и линейчатость поверхности, изометричной плоскости, сохраняется для поверхностей класса $C^{1,\alpha}$ при любом $\alpha>\frac{1}{2}$ и нарушается при любом $\alpha<\frac{1}{2}$. Основанием для такой гипотезы служат результаты исследования параллельного переноса вектора на гладкой поверхности (Ю. Ф. Борисов, Параллельный перенос вектора на гладкой поверхности, ч. I, II, III, IV, Вестн. ЛГУ, № 7, 19 (1958), № 1, 13 (1959)), показывающие, что класс $C^{1,\frac{1}{2}}$ является в некотором отношении естественной границей классов поверхностей, для которых сохраняются обычные связи внутренней и внешней геометрии.

Заседание 10 ноября 1959 г.

1. И. А. Ибрагимов «Современное состояние исследований по предельным теоремам теории вероятностей (обзорный доклад)».

2. Информация Б. А. Рымаренко о совещании в г. Ленинграде по конструктивной теории функций.

3. Информация В. А. Солонникова о совещании в г. Баку по функциональному анализу.

Заседание 24 ноября 1959 г.

1. О. А. Ладыженская «Нелинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи (обзорный доклад)».

2. Ревез Пал (Будапешт) «О математической жизни в Венгрии».

Заседание 8 декабря 1959 г.

1. В. П. Хавин «Об основных понятиях теории аналитических функционалов Фантаппие (обзорный доклад)».

2. Е. М. Полещук «Континуальные средние и гармонические функционалы».

1°. Пусть D — некоторое множество функций $\{x(t)\}$, определенных и измеримых на промежутке $0<t<1$. Пусть $F=F[x(t)]$ — функционал, заданный на множестве D. Через $\underset{D}{M}F$ обозначаем среднее в смысле Гато — Леви [1], [2] функционала F по множеству D («континуальное среднее»).

Формулируются условия, при которых для функционала вида

$$F[x(t)]=\int_0^1 \ldots \int_0^1 g(x(t_1),\ x(t_2),\ \ldots,x(t_p);\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_p)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_p \tag{1}$$

имеет место формула

$$\underset{D}{M}F=\int_0^1 \ldots \int_0^1 dt_1\ldots dt_p \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_p;\ t_1,\ \ldots,\ t_p)\,d_{\xi_1}\varphi(\xi_1,\ t_1)\ \ldots\ d_{\xi_p}\varphi(\xi_p,\ t_p), \tag{2}$$

где $\varphi(\xi,\ t)$ — функция, определенная в полосе $-\infty<\xi<\infty$, $0<t<1$, почти для всех t и для каждого фиксированного t обладающая по ξ свойствами функции распределения. Мы называем φ функцией распределения функциональной области D. Если φ не зависит от t, то говорим, что D — область первого рода.

Частные случаи формулы (2) рассмотрены в [1], [2] (D — сфера $\int_0^1 x^2(t)\,dt=R^2$) и в [3], [4] (D — функциональный параллелепипед $a(t)<x(t)<b(t)$). В [4], кроме того, разъясняется, что функционал F можно рассматривать как случайную величину и при этом с вероятностью единица имеет место равенство

$$F[x(t)]=\underset{D}{M}F, \qquad x(t)\in D \tag{3}$$

Этот результат распространяется на некоторые другие функциональные области D.

Из (3), в частности, следует важное для приложений мультипликативное свойство операции $\underset{D}{M}$:

$$\underset{D}{M}(F_1F_2)=\underset{D}{M}F_1\cdot\underset{D}{M}F_2. \tag{4}$$

Мы говорим, что функционал F принадлежит классу $\mathfrak{F}_0$, если для любых двух функций $x(t)$ и $y(t)$, имеющих одну и ту же функцию распределения $\eta(u)=\operatorname*{mes}_t E\{x(t)<u\}$, выполняется условие $F[x(t)]=F[y(t)]$.

Теорема. *Если D—область первого рода, $\varphi(u)$—ее функция распределения, $W(t)$—функция обратная $\varphi(u)$, F—функционал из класса $\mathfrak{F}_0$, непрерывный в «точке» $W(t)$, то $\underset{D}{M}F=F[W(t)]$.*

Поскольку здесь функция $W(t)$ одна и та же для всех функционалов класса $\mathfrak{F}_0$, ее естественно назвать «точкой концентрации массы в области D».

Для более общего класса функционалов, чем $\mathfrak{F}_0$, например функционалов вида (1), имеет место формула $\underset{D}{M}F=F[W(\gamma(t))]$, где $\gamma(t)$—некоторая обобщенная функция.

2°. Существуют группы двух видов, не меняющие среднего значения функционала по области D: a) непрерывные группы—группы преобразований в себя множества «точек концентрации массы» в области D. Эти группы не меняют свойства и вида функционала; b) дискретные группы, меняющие свойства функционала (частный случай см. в [5]).

3°. Пусть S—замкнутая, выпуклая поверхность в гильбертовом пространстве, которое, например, реализовано как координатное пространство l_2. Пусть x—точка, лежащая внутри S, $x+y$—точка на единичной сфере с центром в x, $\|y\|=1$, а z—точка поверхности S, лежащая на одной прямой с x и $x+y$.

Через $d_x[J]$ обозначим функционал от J, определенный равенством $d_x[J]=\|z-x\|$. Пусть $s[x]$—среднее от $d_x[J]$ по сфере $\|J\|=1$. Пусть $F[x]=f(x_1, x_2 \ldots)$—функционал, определенный внутри и на поверхности S, $\mathfrak{M}_{x,s[x]}F$ его среднее по сфере с центром в x, радиуса $s[x]$.

Теорема. *Если $F[x]=\lim_n f_n(x_1, \ldots, x_n)$ и функции $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные производные порядка $2m$ по всем своим аргументам, то*

$$\mathfrak{M}_{x,s[x]}F=F[x]+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{s^2[x]}{2}\right)^k\frac{\Delta^k F[x]}{k!}+\frac{1}{2^m\cdot m!}\int_0^{s[x]} r\,(s^2[x]-r^2)^m\mathfrak{M}\Delta^{m+1}F[x+ry]\,dr, \quad (5)$$

где Δ^k—k-я степень функционального лапласиана Δ (определение и свойства функциональной операции Δ см. в [1] или [2]), $\mathfrak{M}$ (здесь и ниже)—среднее по сфере $\|y\|=1$.

Можно показать, что $H=\mathfrak{M}_{x,s[x]}F$—гармонический функционал ($\Delta H=0$) и что $s[x]\to 0$, если $x\to z$ (z—точка на S).

Поэтому формула (5) дает решение внутренней задачи Дирихле для поверхности S гильбертова пространства l_2. Аналогичная формула имеет место и в координатном пространстве L_2.

Если остаточный член формулы (5) стремится к нулю при $m\to\infty$, то решение H задачи Дирихле для поверхности S можно записать в операторной форме

$$H=\left(\exp\frac{s^2[x]}{2}\Delta\right)F \qquad (\Delta H=0,\ \lim_{x\to z}H[x]=F[z])$$

(заметим, что для сферы $\|x\|=R$ $s[x]=\sqrt{R^2-\|x\|^2}$).

4°. Остаточный член формулы (5) можно рассматривать как оператор, переводящий функционал F в некоторый другой функционал $K_mF=\Phi_m$.

При обращении этого оператора, а также в некоторых других вопросах, возникает задача решения «линейного уравнения в функциональных лапласианах»

$$P_0\Delta^m F+P_1\Delta^{m-1}F+\ \ldots\ +P_mF=Q,$$

где $P_0, P_1, \ldots, P_m, Q$—заданные функционалы, а F—неизвестный функционал.

Теория таких уравнений в своей простейшей части имеет аналогию с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Это позволяет сформулировать ряд теорем, аналогичных классическим, в которых роль произвольных постоянных играют произвольные гармонические функционалы, а операция квадратуры заменяется операцией

$$\mathfrak{N}F = \int\limits_0^{s[x]} r\mathfrak{M}F[x+ry]dr, \text{ где } s[x] = \sqrt{R^2 - \|x\|^2}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Levy, Lecons d'analyse fonctionnelle, Paris, 1922.
[2] P. Levy, Les problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951.
[3] Е. М. Полищук, О среднем значении функционала, УМН X (1955), 179—186.
[4] Е. М. Полищук, Среднее значение и интеграл от функционала, Укр. матем. журн. 8:1 (1956), 59—75.
[5] Е. М. Полищук, О группах, не меняющих среднего значения функционала, Вестн. ЛГУ 1:1 (1957), 175—179.

Заседание 22 декабря 1959 г.

1. К. К. Головкин «О теоремах вложения».

Единым методом доказываются теоремы вложения С. Л. Соболева для предельных показателей и ряд родственных им результатов.

Важное эвристическое значение в этом круге вопросов имеют соображения размерности. Все объекты, изучаемые теоремами вложения, т. е. нормы функций и их производных в L_q, нормы в $C^{(\alpha)}$ и в пространствах Липшица, произведения и степени этих норм и ряд других образований являются функционалами, имеющими определенную размерность. Это значит, что

$$f[u(\lambda x)] = \lambda^{-\varkappa} f[u(x)],$$

и число $\varkappa$, которое может быть любого знака, называется размерностью f. Пусть f_1 и f_2—два функционала с размерностями $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Имеет место следующая

Лемма. *Для того чтобы имела место оценка*

$$f_1[u(x)] \leqslant Cf_2[u(x)] \tag{1}$$

с одной и той же константой для всех функций, финитных относительно данной области конечного диаметра, необходимо, чтобы $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2$.

Эта лемма позволяет, не прибегая к построению примеров, устанавливать предельный характер показателей в неравенствах типа теорем вложения, если подстановка этих показателей приводит к совпадению размерностей f_1 и f_2 в оценке (1).

Замечательно, что для предельных показателей такое совпадение действительно всегда имеет место. Общая причина всех этих совпадений не выяснена.

Практически отсюда следует необходимость «отбора средств» при доказательстве теории вложения. Именно, в процессе доказательства нужно стремиться к сохранению размерности оцениваемого выражения на каждом этапе. Всякая «потеря размерности» согласно высказанной лемме необратима. Вместе с тем, если оценка f_1 через функционал f_2 данного типа (например, норма в L_q через норму в $w_p^{(l)}$ с каким-то p) осуществлена без потери размерности, то значение параметра f_2 (показателя p) автоматически оказывается предельным.

При доказательстве теорем вложения по новому методу мы использовали только следующие аналитические средства: неравенство Гёльдера, вынесение максимума модуля функции за знак интеграла и неравенства

$$\max_y \int\limits_{E_n} \frac{|u(x)|^p}{r_{xy}^{ep}} dx \leqslant C \|u\|_{w_p^{(e)}} \; (pl < n).$$

Важную роль в доказательствах играют свободные параметры, которые вводятся в промежуточные рассуждения, а впоследствии определяются из некоторой системы просты уравнений. Например, часто бывают полезны представления $u^q = u^{\alpha} \cdot u^{q-\alpha}$ и $u^q = (u^{\alpha})^{\frac{q}{\alpha}}$, содержащие один свободный параметр.

Приведем некоторые новые результаты, полученные описанным методом.

Теорема 1. *При* $h > 1$, $gh > (h-1)(n-s)$ *и* $p \geqslant \frac{qhn}{qh+n+s(h-1)}$ *имеет место неравенство*

$$\left\{ \int\limits_{E_{n-s}} dx \left(\int\limits_{E_s} u^q(x, y)\, dy \right)^h \right\}^{\frac{1}{qh}} \leqslant C \| u \|_{w_p^{(1)}(E_n)}.$$

Теорема 2. *Если выполняются условия*

$$lp_l < n, \quad 1 \geqslant \alpha \geqslant \frac{lp_l h + r(n - lp_l)}{l[hp_l + n - lp_l]}, \quad 1 \geqslant h > 0,$$

$$p_r > 1, \ p_l > 1, \ r < l_l, \qquad \frac{1}{p_r} \geqslant \frac{r-h}{n} + \alpha\left(\frac{1}{p_l} - \frac{l-h}{n}\right),$$

то

$$\| u \|_{w_{p_r}^{(r)}(\Omega)} \leqslant C \| u \|_{w_{p_l}^{(l)}(\Omega)} \| u \|_{Lip_n(\Omega)}^{1-\alpha},$$

если в последнем из условий стоит знак строгого неравенства, то соответствующий оператор вложения вполне непрерывен.

Теорема 3. *Если выполняются условия*

$$n - s < lp, \ 1 \geqslant \alpha \geqslant \frac{(n-s)p}{(n-s)p + h(lp - n + s)},$$

$$\frac{1}{q} \geqslant \frac{n - lh}{sh} + \frac{n(h-p)}{phs}\alpha,$$

то справедливо

$$\| u \|_{L_q(E_s \cap \Omega)} \leqslant C \| u \|_{w_p^{(l)}\Omega}^{\alpha} \| u \|_{L_h(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

Отметим, что из теоремы 1 можно получить, выполняя предельный переход при $h \to \infty$, одну из теорем С. Л. Соболева.

Теоремы 2 и 3 содержат в себе утверждения о нетривиальном вложении пересечения двух пространств в некоторое третье, когда ни одно из них не может быть вложено в это последнее целиком. Впервые результат такого типа получили Гальярдо и Ниренберг в 1958 г.

2. Г. Ш. Рубинштейн «О равномерном приближении непрерывной функции с помощью обобщенных рациональных функций».

1°. Численным методам равномерного приближения непрерывной функции обычными и обобщенными многочленами (линейными комбинациями фиксированных непрерывных функций) посвящено значительное число работ (в частности, недавно вышедшая большая монография Е. Я. Ремеза [1]). Родственный же вопрос об алгорифмах равномерного приближения рациональными функциями до сих пор остается открытым. Вместе с тем во многих случаях по самому физическому смыслу рассматриваемой функции ее необходимо приближать именно рациональными функциями. С характерным примером такого рода автор встретился недавно при консультации геофизика С. В. Шалаева (Ленингр. горный институт), занимающегося вопросами количественного истолкования результатов магнитной разведки.

Нам представляется, что излагаемые результаты в известной мере восполняют отмеченный пробел

2°. Пусть

$$\varphi_1(t), \ \varphi_2(t), \ \ldots, \ \varphi_{m+n}(t) \tag{1}$$

— фиксированные вещественнозначные непрерывные функции, определенные на некотором метрическом компакте T, причем среди дробей

$$R(x, t) = \frac{P(x, t)}{Q(x, t)} = \frac{x_1\varphi_1(t) + x_2\varphi_2(t) + \ldots + x_m\varphi_m(t)}{x_{m+1}\varphi_{m+1}(t) + \ldots + x_{m+n}\varphi_{m+n}(t)} \qquad (2)$$

имеются такие, у которых знаменатель $Q(x, t) > 0$ при всех $t \in T$. Совокупность соответствующих векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ обозначим через X. Отметим, что в важном частном случае, когда $T = [a, b]$ — отрезок вещественной оси, а $P(x, t)$ и $Q(x, t)$ — алгебраические или тригонометрические многочлены, любая ограниченная в T функция вида (2) (в данном случае, алгебраическая или тригонометрическая рациональная функция) может быть сведена к такой, где $x \in X$. Систему (1), обладающую указанным свойством, будем называть *согласованной*.

Основная задача. Для заданной на T непрерывной функции $f(t)$ и данного положительного числа ν найти вектор $x \in X$ такой, что

$$|f(t) - R(x, t)| < \nu, \quad t \in T.$$

Для анализа задачи в $(m+n)$-мерном пространстве рассматривается ограниченное выпуклое замкнутое множество $M(f, \nu)$, представляющее выпуклую оболочку точек

$$\left.\begin{aligned} \alpha^+(t) &= (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t), (-f(t) - \nu)\varphi_{m+1}(t), \ldots, (-f(t) - \nu)\varphi_{m+n}(t)), \\ \alpha^-(t) &= (-\varphi_1(t), \ldots, -\varphi_m(t), (f(t) - \nu)\varphi_{m+1}(t), \ldots, (f(t) - \nu)\varphi_{m+n}(t)), \end{aligned}\right\} t \in T. \qquad (3)$$

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$, очевидно, тогда и только тогда представляет решение задачи, когда опорная к $M(f, \nu)$ гиперплоскость

$$(x, \alpha) = \eta, \text{ где } \eta = \max_{\alpha \in M(f, \nu)} (x, \alpha),$$

строго отделяет от этого множества точку $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$, т. е. $\eta < 0$.

Следовательно, задача сводится к разысканию указанной гиперплоскости и имеет решение тогда и только тогда, когда $\theta \overline{\in} M(f, \nu)$.

Если T — конечное точечное множество, то для решения задачи можно предложить ряд эффективных численных методов, которые в принципе не сложнее алгорифмов, применяющихся для решения задачи равномерного полиномиального приближения (на конечном точечном множестве). Действительно, в этом случае для определения положения точки θ и разыскания искомой гиперплоскости можно воспользоваться задачей о крайней точке пересечения некоторой оси (проходящей через фиксированную точку $\alpha \in M(f, \nu)$ и точку θ) с многогранником $M(f, \nu)$, которая была рассмотрена нами в работе [2]. Для решения последней можно применить, в частности, алгорифм, изложенный в [2], а также любой из численных методов линейного программирования (см., например, Л. В. Канторович [3], стр. 272—341).

В случае произвольного компакта T можно рекомендовать решать задачу на достаточно густой конечной ε-сети. При этом, если все рассматриваемые функции удовлетворяют условию Липшица с известными константами, нетрудно дать простые оценки, позволяющие судить о том, будет ли полученное для ε-сети решение являться также решением исходной задачи.

3°. Для простоты изложения будем предполагать здесь систему функций (1) согласованной.

Задача наилучшего приближения. Для заданной на T непрерывной функции $f(t)$ найти вектор $x_0 \in X$ такой, что

$$\max_{t \in T} |f(t) - R(x_0, t)| = \inf_{x \in X} \max_{t \in T} |f(t) - R(x, t)| = \nu^*.$$

Из предыдущего ясно, что при $\nu > \nu^*$ точка $\theta \overline{\in} M(f, \nu)$, а при $\nu \leqslant \nu^*$ точка $\theta \in M(f, \nu)$. При сделанном предположении относительно системы (1) нетрудно показать, что θ лежит на границе $M(f, \nu)$ лишь при $\nu = \nu^*$ и по крайней мере одна из гиперплоскостей, проходящих через θ и опорных к $M(f, \nu^*)$, имеет уравнение $(x_0, \alpha) = 0$, где вектор $x_0 \in X$ и, следовательно, является решением задачи.

Отсюда можно получить ряд результатов, аналогичных известным для случая приближения обобщенным многочленами и частично для случая приближения рациональными функциями. Например, вектор $x \in X$ и тогда и только тогда является решением задачи наилучшего приближения, когда

$$\max_{t \in T} |f(t) - R(x, t)| = \nu$$

достигается при некоторых $t_1, t_2, \ldots, t_r (r \leqslant m+n)$ таких, что 0 принадлежит выпуклой оболочке соответствующих точек (3)

$$\alpha^{\varepsilon_1}(t_1), \alpha^{\varepsilon_2}(t_2), \ldots, \alpha^{\varepsilon_r}(t_r),$$

где ε_s обозначает знак плюс или минус в зависимости от знака величины $R(x, t_s) - f(t_s)$.

Относительно численных методов решения задачи наилучшего приближения укажем, что для случая конечного точечного множества T можно дать конечный алгорифм, в котором, однако, на каждом шаге приходится решать уравнения высших порядков. В связи с этим нам представляется более целесообразным получать приближенное решение путем решения рассмотренной выше основной задачи при нескольких различных ν.

В заключение заметим, что результаты этого пункта в известной мере переносятся и на несогласованные системы (1). При этом, правда, приходится расширить множество векторов X.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Ремез, Общие вычислительные методы чебышёвского приближения, Изд. АН УССР, 1957.

[2] Г. Ш. Рубинштейн, Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств, ДАН 100, № 4 (1955).

[3] Л. В. Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд. АН. СССР, 1959.

3. Информация А. А. Иванова о совещании в г. Тбилиси по топологии.

4. Информация Б. Б. Венкова о семинаре в г. Ужгороде по алгебраической геометрии и гомологической алгебре.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 23 февраля 1960 г.

1. Д. К. Фаддеев «О целочисленных представлениях».

Целочисленные представления (с точностью до унимодулярной эквивалентности), даже в простейшей ситуации, когда представляемыми объектами являются конечные группы или кольца конечного ранга над кольцом Z целых чисел, обладают свойствами, резко отличающимися от свойств представлений полупростых алгебр над полем.

Во-первых, неразложимые в прямую сумму представления не обязаны быть неприводимыми. Во-вторых, вообще говоря, отсутствует однозначность разложения любого представления в прямую сумму неразложимых. Поэтому описание всех целочисленных представлений данного кольца должно включать описание абелевой «полугруппы Крулля—Шмидта», образованной целочисленными представлениями, относительно операции прямого сложения. Естественными образующими этой полугруппы являются неразложимые представления. В случае однозначности разложения эти образующие свободны. Соотношения между образующими характеризуют отклонение от однозначности.

Известно очень немного примеров колец, для которых задача описания целочисленных представлений решена до конца. Это, прежде всего, кольца всех целых чисел конечных алгебраических расширений поля рациональных чисел [1]. Здесь неразложимыми являются представления в идеалах, причем эквивалентным идеалам соответствуют одинаковые представления. Полугруппа Крулля—Шмидта погружаема в группу, являющуюся прямой суммой бесконечной циклической группы и группы классов идеалов. Похожий результат имеет место для максимальных колец в простых алгебрах над полем рациональных чисел, причем здесь особое место занимают определенные алгебры кватернионов над вполне вещественными расширениями поля рациональных чисел [2], [3]. Для групповых колец конечных групп результат известен лишь для циклических групп простого порядка [4], [5]. Здесь число неразложимых представлений равно $2h+1$, где h — число классов идеалов кругового поля, а полугруппа представлений погружаема в прямую сумму трех бесконечных циклических групп и группы классов идеалов.

В последнее время получены некоторые новые конкретные результаты. З. И. Боревичем и Д. К. Фаддеевым дано полное описание всех целочисленных представлений квадратичных колец. Здесь все неразложимые представления имеют степень два, но полугруппа Крулля—Шмидта устроена довольно сложно. Она не допускает сокращений, так что не погружаема в группу.

Для конечных групп получены интересные результаты в работах студентов ЛГУ А. В. Ройтера и Л. А. Назаровой. А. В. Ройтер дал описание всех неразложимых представлений для циклической группы четвертого порядка, их оказалось девять (результат, данный по этому вопросу в статье [4], оказался неверен). В работе Л. А. Назаровой дано решение вопроса для четверной группы. Здесь неразложимые представления укладываются в несколько бесконечных серий.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Steinitz, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, M. A. 71 (1912), 328; 72 (1912), 297.

[2] C. Chevalley, L'arithmétique dans les algèbres de matrices, Paris, 1936.

[3] M. Eichler, Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren, Journ. reine und angew. Math. 176 (1937), 192—202.

[4] F. Diederiksen, Über die Ausreduction ganz zahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz, Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. 14 (1938), 357—412.

[5] Reiner, Integral representations of cyclic groups of prime order, Proc. Amer. Math. Soc. 8, № 1 (1957), 146.

2. А. В. Малышев «О квадратичных формах над произвольным полем».

Пусть P — поле характеристики $\neq 2$. Рассматриваем квадратичные формы

$$f=f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

в поле P; $a_{ij}\in P$, $a_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, \ldots, n)$. Матрица $A=A(f)=(a_{ij})$, ее ранг $r=r(f)$, ее определитель $d=d(f)=\det A$ и $n=n(f)$ называются соответственно *матрицей*, *рангом*, *определителем* и *числом переменных формы* f.

Пусть $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ и $g=\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}y_iy_j$ — квадратичные формы в поле P. Матрица $T=(t_{ij})$ размера[1]) $n\times m$ с элементами из поля P называется представлением формы g формой f, если имеет место тождество относительно $y_1, \ldots, y_m$:

$$g(y_1, \ldots, y_m)=f\Big(\sum_{j=1}^{m} t_{1j}y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} t_{nj}y_j\Big).$$

Ранг $q=q(T)$ матрицы T называется рангом представления T формы g формой f. Говорим, что форма g представима формой f в поле P, $g\subset f(P)$, если в P найдется хотя бы одно представление формы g формой f. Если $g\subset f(P)$ и $f\subset g(P)$, то говорим что формы f и g эквивалентны в поле P, $f\sim g(P)$. Отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема. *Пусть в поле P характеристики $\neq 2$ заданы квадратичные формы $f=f(x_1, \ldots, x_n)$ ранга r и $g=g(x_1, \ldots, x_m)$ ранга s. Пусть q — заданное целое неотрицательное число. Рассмотрим форму*

$$e=e(u_1, \ldots, u_k; v_1, \ldots, v_k)=\sum_{i\leqslant(q-s)-(n-r)} 2u_iv_i$$

(если $n-r\geqslant q-s$, то считаем $k=0$, так что e — «пустая» форма). Тогда для того, чтобы в поле P существовало представление ранга q формы g формой f, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1) $s\leqslant q\leqslant m$,

2) $f\sim g\dotplus e\dotplus h\ (P)$,

где h — некоторая форма поля P; при этом переменные форм g, e и h считаем попарно не пересекающимися.

В частности, при $q=m$, $s=0$, $r=n$ мы получаем известный критерий Витта для m-нулевых форм (см., например, Джонс [1], стр. 50); при $r=n$, $s=m$ получаем теорему Полла о представлении форм формами в произвольном поле (Джонс [1], стр. 11).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. W. Jones, The arithmetic theory of quadratic forms, Math. Ass. Amer., 1950.

---

1) Говорим, что матрица T имеет размер $n\times m$, если число ее строк равно n, а число столбцов — m.

Внеочередное заседание 3 марта 1960 г.

Заседание Общества происходило совместно с учителями средних школ г. Ленинграда.

1. Д. К. Фаддеев «О подготовке по элементарной математике учащихся средней школы, поступивших в Университет».

2. А. В. Ширяев «Впечатления о приемных экзаменах в Университет по математике».

3. Прения по докладам.

Заседание 8 марта 1960 г.

Б. Г. Питтель, В. А. Якубович «Применение теории параметрического резонанса к объяснению кручения Такомского моста».

Катастрофа Такомского моста (США, штат Вашингтон) в 1940 г. является одной из крупнейших в истории мостостроения. После четырех месяцев службы мост разрушился под действием ветра в результате интенсивных изгибно-крутильных колебаний.

Имеется большое число работ, посвященных анализу причин катастрофы (см. [1], где указана литература, а также [2], [3], [4]). Некоторые авторы, например, Рокар (1954 г.), Стейнман (1947 г.) считают, что здесь имело место явление нелинейного флаттера. Наиболее последовательно и полно эта точка зрения проведена Рокаром в содержательной книге [1]. Однако метод, применяемый Рокаром, не строг, а рассуждения в ряде пунктов вызывают возражения (сведение к линейной системе, использование сведений об истинной картине разрушения и др.).

В. В. Болотиным [2] указано, что проведенные в последние годы эксперименты по продувке моделей балок жесткости дают основания предполагать, что явление возникновения при этом интенсивных колебаний близко по своему характеру к явлению параметрического резонанса. В [2] выведены также приближенные формулы для областей динамической неустойчивости основного резонанса.

Доклад посвящен анализу устойчивости Такомского моста с точки зрения теории линейного флаттера и теории параметрического резонанса.

При расчете по теории флаттера за исходные взяты линейные дифференциальные уравнения изгибно-крутильных колебаний висящих мостов Власова [5]. Строгий математический анализ этих уравнений показывает, что Такомский мост устойчив под действием постоянной ветровой нагрузки в диапазоне скоростей ветра $V<132$ *км/час* [1]). Неравенство $V<132$ *км/час* получено из оценки снизу минимального собственного значения некоторого самосопряженного дифференциального оператора. Катастрофа произошла при скорости ветра 67 *км/час*. Таким образом, теория линейного флаттера не дает удовлетворительного количественного объяснения крушения моста. Качественная картина колебаний моста также противоречит этой теории, так как известно, что, выдерживая значительные скорости ветра, Такомский мост испытывал интенсивные колебания при некоторых скоростях ветра, начиная с 5—6,5 *км/час*. Подобная картина характерна для параметрического резонанса.

При расчете по теории параметрического резонанса за основу взяты дифференциальные уравнения Власова [5], в которых ветровая нагрузка считается изменяющейся периодически.

---

[1]) Приведенное в [5] значение $V_{\text{кр}}=60{,}7$ *км/час* явилось, по-видимому, результатом арифметической ошибки, так как уравнения [5] для определения $V_{\text{кр}}$, полученные в результате пестрого расчета, не имеют вещественного корня.

Периодичность ветровой нагрузки объясняется известным в гидромеханике явлением периодического срыва чередующихся вихрей (с частотой θ) с острых кромок обтекаемого поперечного сечения моста (вихревые дорожки Кармана).

Методом Бубнова—Галёркина задача сведена к исследованию устойчивости линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. Результаты расчета по [6], [7] даются в виде схем.

Полученный результат качественно и количественно хорошо согласуется с действительной картиной колебаний моста непосредственно перед катастрофой (скорость ветра 60,5 *км/час*, 8 узлов по длине главного пролета, см. [1], стр. 131).

Получено следующее грубое условие устойчивости висячего моста при параметрическом резонансе для скоростей ветра, не превышающих V_0 *км/час*:

$$\omega_j^{(u)}\omega_h^{(h)}M^{(u)}M^{(h)} > \alpha^2 C_{jh}, \quad \omega_h^{(h)}M^{(h)} > \alpha d.$$

Здесь $\omega_j^{(u)}$, $\omega_h^{(h)}$ — всевозможные собственные частоты, удовлетворяющие условиям

$$\omega_j^{(u)} + \omega_h^{(h)} < 0{,}22V_0, \quad 2\omega_h^{(h)} < 0{,}22V_0.$$

Коэффициенты имеют значения:

$$\omega_j^{(k)} = \frac{(j+1)\pi}{l}\sqrt{\frac{2Hg}{\gamma F}}, \quad \omega_h^{h} = \frac{(h+1)\pi}{l}\sqrt{\frac{\left(\frac{Hb^2}{2}+GJ\right)g}{\gamma J}},$$

$$C_{jh} = 2\,|(-1)^j + (-1)^h|\,\frac{(h+1)(j+1)^3}{(j-h)^2(j+h+2)^2}, \ j \neq h; \ C_{jj} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{(j+1)^2\pi^2}{3}\right].$$

$$M^{(u)} = \frac{\gamma F}{g}, \quad M^{(k)} = \frac{\gamma J}{g}, \quad d = \frac{kb^2}{2h}, \quad \alpha = 1{,}25\cdot 10^3 \ кг\cdot сек/м.$$

Численное значение коэффициента α взято из расчета для моста «Золотые ворота». Прочие обозначения — те же, что и в [5].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Рокар, Неустойчивость в механике, М., ИЛ, 1959.
[2] В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1956.
[3] И. И. Гольденблат, Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений, Стройиздат, 1947.
[4] Ф. Д. Дмитриев, Крушения инженерных сооружений, М., ГИЛСА, 1953.
[5] В. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни, М., Физматгиз, 1958.
[6] В. А. Якубович, О динамической устойчивости упругих систем, ДАН (1959).
[7] В. А. Якубович, Системы линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами, Автореферат диссертации, изд. ЛГУ, 1959.

После доклада был продемонстрирован документальный фильм о гибели Такомского моста.

Заседание 22 марта 1960 г.

Обсуждение работ И. Г. Петровского и Н. Г. Четаева, выдвинутых на соискание Ленинской премии. Обзор работ И. Г. Петровского сделал Д. К. Фаддеев и В. А. Якубович. Обзор работ Н. Г. Четаева сделал Г. Ю. Джанелидзе.

Общество поддержало выдвижение работ И. Г. Петровского и Н. Г. Четаева на соискание Ленинских премий.

Заседание 12 апреля 1960 г.

1. М. Ш. Бирман «О спектре дифференциальных операторов» (обзорный доклад).

2. Р. А. Зайдман «Новейшее развитие математической теории информации и некоторые теоретико-информационные теоремы».

Пусть имеется *алфавит* A из D букв: $\{a_1, \ldots, a_D\}$ и в этом алфавите набор *сообщений* (конечных последовательностей букв).

Сообщение, которое нельзя разбить на два сообщения, назовем *словом*. Потребуем, чтобы любое сообщение однозначно разбивалось на слова и чтобы любой «кусок сообщения», состоящий из слов, был сообщением. (Эти требования будут выполняться, если мы, например, назовем одну из букв «промежутком» и потребуем, чтобы любое сообщение оканчивалось на промежуток, а словом назовем сообщение, не содержащее промежутка внутри.)

Набор сообщений, удовлетворяющий этим требованиям, назовем *языком*.

Обозначим через W_n число сообщений длины n; через w_n — число слов длины n; через V_n — число всех «кусков сообщений» длины n, т. е. всех последовательностей букв длины n, встречающихся в каком-либо сообщении; через v_n — число всех «кусков слов» длины n.

Положим $v_0 = w_0 = V_0 = W_0 = 1$.

Очевидно, $V_{k+l} \leqslant V_k \cdot V_l$ и, значит, существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{V_n} = d = \inf_n \sqrt[n]{V_n}.$$

Очевидно, далее, что

$$W_n \leqslant \sum_{\substack{\alpha \leqslant k \\ \beta \leqslant n-k}} W_\alpha W_\beta w_{n-(\alpha+\beta)}$$

и

$$V_n \leqslant \sum_{\alpha+\beta \leqslant n} v_\alpha v_\beta W_{n-(\alpha+\beta)}.$$

Отсюда при некоторых естественных предположениях следует, что существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{W_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{V_n} = d.$$

Назовем d «эффективным числом букв» языка.

Если на множестве кусков сообщений, рассматриваемых как цилиндры, ввести стационарную вероятностную меру, то язык становится стационарным вероятностным процессом, который мы назовем «источником», с энтропией на символ H.

Назовем кодированием обратимое отображение (вообще говоря, нестационарное одного языка в другой, при котором сообщения отображаются на сообщения.

Если некоторый источник $\mathfrak{M}$ с энтропией на символ H кодируется с помощью языка $\mathfrak{N}$ с эффективным числом букв d, то среднее число букв в $\mathfrak{N}$, приходящееся на одну букву в $\mathfrak{M}$: $L \geqslant \frac{H}{\log d}$, причем всегда можно так закодировать $\mathfrak{M}$ с помощью $\mathfrak{N}$, что будет $L = \frac{H}{\log d}$.

Теорема. *Пусть даны дискретный стационарный канал Ξ без предвосхищения, с конечной памятью (в смысле Хинчина) и с пропускной способностью C. Тогда для любого $H < C$ любой источник можно так закодировать с помощью некоторого языка, что получится источник с энтропией на символ H, при передаче которого через* *канал Ξ вероятность ошибки при приеме любого сообщения длины n будет стремиться к нулю при $n \to \infty$.*

Если же у полученного после кодирования источника энтропия на символ $H > C$, то вероятность ошибки будет стремиться к 1 при $n \to \infty$.

Заседание 26 апреля 1960 г.

Выдвижение кандидатур в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР. Тайным голосованием Общество выдвинуло в действительные члены АН СССР по специальности «математика»: А. Д. Александрова; в члены-корреспонденты АН СССР по специальности «математика»: Б. А. Венкова, О. А. Ладыженскую, С. М. Лозинского, Д. К. Фаддеева; в члены-корреспонденты АН СССР по специальности «механика»: С. В. Валландера, Г. Ю. Джанелидзе, Л. М. Качанова, Н. Н. Поляхова.

Заседание 10 мая 1960 г.

Л. М. Абрамов «О новых методах в метрической теории динамических систем».

Приводятся некоторые результаты, являющиеся развитием исследований, опубликованных автором в [1], § 1. По поводу используемых здесь понятий теории меры и метрической теории динамических систем см. [2].

1°. Пусть M — пространство Лебега с мерой μ и T — его автоморфизм. Напомним известное определение энтропии автоморфизма. Для любого измеримого, не более чем счетного разбиения ξ пространства M с элементами $C_1, C_2, \ldots$ положим

$$H(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k \log \mu C_k.$$

Множество разбиений ξ с $H(\xi) < \infty$ обозначим через Z. Положим

$$\xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^k \xi,$$

$$h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n),$$

$$h(T) = \sup_{\xi \in Z} h(T, \xi).$$

Число $h(T)$ называется энтропией автоморфизма T (см. [3], [4], [5]).

2°. Пусть X — измеримое множество в M. Для $\xi \in Z$ положим

$$H(\xi \cap X) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu(c_k \cap X) \log \mu(c_k \cap X).$$

Теорема 1. *Для любого $\xi \in Z$ и любого измеримого $X \subseteq M$ существует предел*

$$h(T, \xi, X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n \cap X).$$

Определение. Для любого измеримого $X \subseteq M$ положим

$$h(T, X) = \sup_{\xi \in Z} h(T, \xi, X),$$

$h(T, X)$ назовем энтропией автоморфизма T на множестве X.

3°. Пусть ζ — измеримое разбиение пространства M, все элементы которого инвариантны относительно T. Обозначим через M/ζ фактор-пространство пространства M по разбиению ζ; через μ_ζ — меру Лебега, индуцируемую мерой μ в M/ζ; через $\{\mu_C\}$ — каноническую систему мер на элементах C разбиения ζ; через T_C — автоморфизм пространства Лебега C, индуцируемый в нем автоморфизмом T; через ξ_C — разбиение пространства C, индуцируемое в нем разбиением ξ пространства M.

Теорема 2. *Для любого измеримого $X \subseteq M$ и любого $\xi \in Z$*

$$h(T, \xi, X) = \int\limits_{M/\zeta} \mu_C(C \cap X)\, h(T_C, \xi_C)\, d\mu_\zeta \tag{1}$$

и

$$h(T, X) = \int\limits_{M/\zeta} \mu_C(C \cap X)\, h(T_C)\, d\mu_\zeta. \tag{2}$$

Полагая в формулах (1) и (2) $X = M$ получаем формулы В. А. Рохлина для энтропии неэргодического автоморфизма (см. [5], [2]).

Теорема 3. *Если автоморфизм T эргодичен, то для любого измеримого $X \subseteq M$ и любого $\xi \in Z$*

$$h(T, \xi, X) = h(T, \xi)\mu X$$

и

$$h(T, X) = h(T)\mu X.$$

Эта теорема была сообщена автору в качестве гипотезы В. А. Рохлиным.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Абрамов, Энтропия производного автоморфизма, ДАН 128, № 4 (1959).
[2] В. А. Рохлин, Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, УМН XV, вып. 4 (94) (1960).
[3] А. Н. Колмогоров, Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизма, ДАН 124, № 4 (1959).
[4] Я. Г. Синай, Об энтропии динамической системы, ДАН 124, № 4 (1959).
[5] В. А. Рохлин, Об энтропии метрического автоморфизма, ДАН 124, № 5 (1959).

Заседание 24 мая 1960 г.

1. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Бакельман Илья Яковлевич,
Басов Владимир Петрович,
Боревич Зенон Иванович,
Борисов Юрий Федорович,
Виноградов Аскольд Иванович,
Гавурин Марк Константинович,
Колбина Лениана Ивановна,
Окунев Борис Николаевич,
Скачков Борис Николаевич,
Смирнов Модест Михайлович,
Цейтин Григорий Самуилович,
Юшков Петр Петрович.

2. И. В. Романовский «Информация о совещании по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании».

3. В. А. Булавский, Э. О. Рапопорт, В. Е. Солдатов «Разработка и обоснование новых тарифов на такси».

Изучение вопроса об установлении экономически наиболее обоснованного тарифа на пользование легковыми такси привело к выводу о целесообразности введения тарифа с покилометровой оплатой, понижающейся с увеличением расстояния[1]). Оплата поездки при таком тарифе строится следующим образом:

начальная плата . . . . 1 *руб*,
покилометровая плата . . . . . 1 *руб/км*,
оплата стоянки . . . . 15 *руб/час*.

Предлагаемый тариф отличается следующими особенностями.

1°. Этот тариф означает в целом значительное снижение оплаты (по сравнению с действующим). Однако это снижение дифференцированное: для коротких поездок оно значительно меньше, чем для дальних.

2°. Иная структура тарифа — введение начальной оплаты помимо покилометровой — определяется самой природой затрат по перевозке пассажиров. Помимо затрат, пропорциональных расстоянию, имеются затраты, связанные с каждой отдельной поездкой, вне зависимости от ее длины (затраты на холостой пробег и частично на простои на стоянках).

3°. Указанный тариф делает более доступным использование такси для дальних поездок, в частности для связи с вновь застраиваемыми окраинными районами, что следует считать социально оправданным.

Как известно, в 1954 г. было произведено снижение тарифа. Сведения о работе такси до снижения исчерпывались некоторыми совокупными данными: средняя длина ездки, валовый доход, прибыль и т. д.

В 1959 г. было проведено обследование работы такси в будние и воскресные дни. Интересно отметить, что распределение поездок по длинам подчинено логарифмически нормальному закону.

Чтобы в какой-то мере предсказать изменение показателей работы такси, которое произойдет при изменении тарифа, нужно изучить, как реагирует население на изменение стоимости такси. Здесь нам может помочь изучение данных о работе такси в период снижения тарифа 1954 г.

Введем понятие о коэффициенте эластичности. Назовем коэффициентом эластичности отношение процентного изменения спроса к процентному изменению тарифа.

Естественно, что для поездок разных длин коэффициент эластичности различный. Для расчета коэффициента эластичности разбиваем поездки разной длины на n групп и рассчитаем среднее в группе и долю группы в общем числе поездок за будний день 21.06 и субботний и воскресный (16.05 и 17.05) дни.

Данных о распределении поездок по аналогичным группам за 1954 г. не имелось. Поэтому для расчета такого распределения применялось следующее соображение.

Изменение распределения в будний и субботний день объясняется тем, что население в выходной день чувствует себя «богаче» на $k\%$. Это эквивалентно снижению тарифа на $k\%$. Предполагаем, что при снижении 1954 г. произошел аналогичный сдвиг с коэффициентом пропорциональности χ.

Пусть α_i— средняя длина ездки в группе i, а η_i и ξ_i— соответственно доля группы в общем числе поездок в будний и воскресный дни. Среднюю длину поездки в 1954 г обозначим через γ. Тогда сдвиг χ вычисляется из соотношения

$$\sum_i \alpha_i\,[\eta_i+\chi(\eta_i-\xi_i)]=\gamma.$$

---

[1]) Постановлением Совета Министров РСФСР предложенные тарифы вводятся с 1 января 1961 г.

После вычисления коэффициенты эластичности оказываются определенными. Предполагаем, что при проектируемом снижении тарифа коэффициенты эластичности остаются прежними.

Результаты дальнейших вычислений сведены в таблицу.

№ п/п	Показатель работы	Действующий тариф	Предлагаемый тариф
1	Валовой пробег за 1 м. ч.[1]	19,9 *км*	23,8 *км*
2	Полезный пробег за 1 м. ч.	14,6 *км*	18,3 *км*
3	Валовой доход за 1 м. ч.	22,8 руб.	22,0 руб.
4	Затраты на 1 м. ч.	12,4 руб.	13,8 руб.
5	Прибыль за 1 м. ч.	10,4 руб.	8,0 руб.
6	Средняя длина поездки	5,5 *км*	6,5 *км*
7	Расчетное число м. ч. на линии за год в тыс. м. ч.	5800	6800
8	Валовой доход в млн. руб.	133	150
9	Расход в млн. руб.	73	94
10	Прибыль в млн. руб.	60	56

[1]) М. ч. — машино-час.

Следует отметить, что даже без учета изменения качественных показателей (повышение пробега на машино-час), а также изменения общего объема работы, прибыль государства уменьшается незначительно, а условный выигрыш населения составляет 43 млн. руб.

4. Обсуждение издательского плана Физматгиза на 1961 г.

С кратким сообщением от имени издательства выступил В. И. Битюцков. Общество одобрило план изданий Физматгиза на 1961 г., а также деятельность издательства в 1959—1960 гг.

Общество подчеркнуло важную роль Физматгиза в издании научной монографической литературы и журналов. Протокол обсуждения, а также развернутая резолюция направлены в Физматгиз.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 11 октября 1960 г.

1. И. Я. Бакельман «Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений».

Рассматривается вопрос о существовании решения первой краевой задачи для уравнения

$$A(x, y, p, q)r+2B(x, y, p, q)s+C(x, y, p, q)t=D(x, y, z, p, q) \qquad (1)$$

при граничном условии $z|_{\Gamma}=0$ в области Ω, ограниченной трижды непрерывно дифференцируемой замкнутой кривой Γ, кривизна которой во всех точках не меньше $k_0=\text{const}>0$.

Пусть: 1) A, B, C, D при всех конечных значениях z, p, q и $(x, y)\in\Omega+\Gamma$ принадлежат $C^{1,\lambda}$ $(0<\lambda<1)$, 2) при $z^2+p^2+q^2\leqslant m$, $A>0$, $AC-B^2\geqslant R(m)>0$, где $R(m)$ — постоянная, зависящая только от $m>0$, 3) $D_z\geqslant 0$ при всех допустимых значениях x, y, z, p, q.

Тогда, как известно (см. [1], [2]), поставленная выше первая краевая задача будет разрешима, если для предполагаемого решения может быть получена априорная оценка в $C^1(\Omega+\Gamma)$.

Эти оценки были получены С. Н. Бернштейном [1] в случае, когда

$$D_z\geqslant d_0=\text{const}>0, \qquad (2)$$

$$\frac{|D|}{Ap^2+2Bpq+Cq^2}\leqslant K=\text{const}<\infty \qquad (p^2+q^2\geqslant 1). \qquad (3)$$

Если условие (2) заменить на условие $D_z\geqslant 0$ и снять условие согласования (3) роста коэффициентов уравнения (1) при $p^2+q^2\to+\infty$, то методы С. Н. Бернштейна для получения априорных оценок оказываются неприменимыми.

Для получения априорных оценок используются геометрические методы, связанные с оценками положительной части обобщенной гауссовой интегральной кривизны поверхности, определяемого решением уравнения (1). Как обобщенная интегральная кривизна, так и связанные с ней оценки строятся по коэффициентам уравнения.

Подробные формулировки полученных теорем и краткая схема их доказательства содержатся в работе автора [3].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Собр. сочинений, т. III, 1960.
[2] К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957.
[3] И. Я. Бакельман, Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений, ДАН 134, № 5 (1960).

2. Информация Ю. В. Линника о втором венгерском математическом съезде.

3. Информация Ю. В. Линника о всесоюзном совещании по теории вероятностей в г. Вильнюсе.

4. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Абрамов Леонид Михайлович,
Бабич Василий Михайлович,
Баранцев Рэм Георгиевич,
Бирман Михаил Соломонович,
Вержбинский Михаил Львович,
Воробьев Николай Николаевич,
Воробьев Юрий Васильевич,
Егорова Ирина Александровна,
Ильин Валентин Петрович,
Огородников Кирилл Федорович,
Сенькин Евгений Поликарпович.

Заседание 25 октября 1960 г.

1. Л. Д. Фаддеев «О временной теории рассеяния в квантовой механике» (обзорный доклад).

2. В. Л. Файншмидт «Обобщенные циклически монотонные полиномы».

Излагается способ построения одного класса регулярно-монотонных полиномов Эйлера—Бернштейна. Приводятся некоторые экстремальные свойства, которыми эти полиномы обладают. Содержание доклада опубликовано в ДАН 130, № 5 (1960); ДАН БССР, № 9 (1960); Изв. вузов, сер. матем., № 5.

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Амосов Сергей Иванович,
Анфертьева Елена Александровна,
Буров Виктор Николаевич,
Емельянов Георгий Владимирович,
Клиот-Дашинский Михаил Исаакович,
Никитин Алексей Алексеевич,
Николаев Виктор Федорович,
Рохлин Владимир Абрамович,
Рубинштейн Геннадий Соломонович,
Скитович Виктор Павлович.

4. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинской премии 1961 г. в области науки и техники. Тайным голосованием Общество выдвинуло на соискание Ленинской премии: 1) работы Б. А. Венкова по геометрии чисел; 2) работы Л. В. Канторовича по линейному программированию.

Заседание 22 ноября 1960 г.

Заседание, организованное Обществом совместно с математико-механическим факультетом ЛГУ, было посвящено 60-летию со дня рождения и 40-летию научной и педагогической деятельности Бориса Алексеевича Венкова. С докладами о работах Б. А. Венкова по теории чисел выступили Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев. В заключение состоялось чествование юбиляра.

На этом же заседании принята рекомендация о переиздании известной монографии Б. А. Венкова «Элементарная теория чисел» (М.— Л., ОНТИ, 1937).

Заседание 13 декабря 1960 г.

1. М. А. Красносельский (Воронеж) «Положительные решения операторных уравнений» (обзорный доклад).
2. Информация В. Н. Судакова о конференции по функциональному анализу в г. Варшаве.
3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Залгаллер Виктор Абрамович,
Ибрагимов Ильдар Абдуллович,
Натансон Гаральд Исидорович,
Соломяк Михаил Захарович,
Судаков Владимир Николаевич.

Заседание 27 декабря 1960 г.

Распорядительное собрание. Отчет Правления был зачитан президентом Общества Ю. В. Линником.

ОТЧЕТ

Правления Ленинградского математического общества о деятельности Общества за период с 29.IX 1959 г. по 27.XII 1960 г.

Ленинградское математическое общество было создано на организационном заседании 29.IX 1959 г. Первоначально оно насчитывало 49 членов, в основном — докторов наук.

За истекший период состоялось 19 заседаний Общества. Подробные отчеты о них публикуются в «Успехах математических наук» (см. УМН 14, вып. 6; 15, вып. 3, вып. 6). Был заслушан 21 научный доклад, в том числе 8 обзорных. Систематически делались краткие информационные сообщения о математической жизни (о состоявшихся съездах, конференциях и т. д.). Состоялось специальное заседание совместно с математико-механическим факультетом ЛГУ и учителями средних школ Ленинграда, на котором обсуждались вопросы школьного математического образования. Одно из заседаний Общества совместно с математико-механическим факультетом ЛГУ было посвящено чествованию проф. Б. А. Венкова в связи с шестидесятилетием со дня рождения и сорокалетием научной и педагогической деятельности.

Общество выдвигало кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты Академии наук СССР. Недавно были выдвинуты работы на соискание Ленинской премии 1961 г. Общество обсуждало ранее выдвинутые на соискание Ленинской премии 1960 г.

работы Петровского и Четаева. Весной этого года обсуждалась издательская деятельность Физматгиза и его план изданий на 1961 г.

Общество на своих заседаниях систематически избирало новых действительных членов. В настоящий момент в Обществе состоит 87 человек.

Были сделаны попытки создать при Ленинградском математическом обществе научный журнал. Эти попытки пока успеха не имели.

Наконец, о финансовой деятельности. Все доходы Общества за истекший период слагались из членских взносов. Общество почти не имело помощи от Ленинградского университета, хотя и создано при нем. Собрано членских взносов — 3250 руб. Потрачено (в основном, на обеспечение рассылки объявлений о заседаниях) — 1732 р. 94 к. Сейчас у Общества в наличии имеется 1517 р. 06 к., не считая задолженности по членским взносам.

Отчет ревизионной комиссии был зачитан В. П. Ильиным.

В прениях по отчетным докладам выступили В. И. Смирнов, О. А. Ладыженская, В. А. Залгаллер, Ю. В. Линник. Выступления были посвящены почти исключительно вопросу о создании в г. Ленинграде математического журнала. Выступавшие подчеркнули ненормальность того положения, когда такой крупный математический центр, как Ленинград, не имеет своего математического журнала. Общество поручило комиссии в составе А. Д. Александрова, О. А. Ладыженской и С. М. Лозинского продолжать хлопоты по созданию научного математического журнала в г. Ленинграде.

Работа Правления была признана удовлетворительной. В результате проведенного затем тайного голосования в состав Правления Общества избраны:

Юрий Владимирович Линник (президент),
Ольга Александровна Ладыженская (вице-президент),
Сергей Михайлович Лозинский (вице-президент),
Александр Данилович Александров,
Борис Алексеевич Венков,
Соломон Григорьевич Михлин,
Николай Николаевич Поляхов,
Борис Александрович Рымаренко (казначей),
Владимир Иванович Смирнов,
Михаил Федорович Широхов (секретарь).

Ревизионная комиссия избрана в следующем составе:

Валентин Петрович Ильин,
Михаил Захарович Соломяк,
Владимир Николаевич Судаков.