1964 г. январь—февраль *т. XIX, вып. 1 (115)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 12 февраля 1963 г.

Распорядительное собрание. Отчет Правления был зачитан президентом Общества Ю. В. Линником.

Отчет

Правления Ленинградского математического общества о деятельности Общества за период с 27/XII 1960 г. по 12/II 1963 г.

Ленинградское математическое общество было создано на организационном заседании 29/IX 1959 г. Первое распорядительное собрание Общества с отчетом и перевыборами Правления состоялось 17/XII 1960 г. Настоящее заседание является вторым распорядительным собранием Общества.

За отчетный период избрано 10 новых членов Общества и в настоящее время Общество состоит из 92 действительных членов, один из которых — В. И. Смирнов — является почетным членом Общества.

За рассматриваемый период в два года состоялось 27 очередных заседаний, на которых были заслушаны 34 научных доклада, в том числе 8 обзорных докладов.

Систематически делались информационные сообщения о математической жизни (о состоявшихся съездах, конференциях и т. д.).

Выдвигались кандидаты на соискание Ленинских премий; обсуждались работы, выдвинутые на соискание Ленинских премий.

На одном из заседаний была проведена дискуссия по вопросам преподавания теоретической механики в университетах.

Ежегодно весной обсуждался план работы Физматгиза.

Была учреждена премия Ленинградского математического общества молодому математику. Первое присуждение этой премии состоялось в мае 1962 г. Премия Ленинградского математического общества за 1962 г. присуждена В. Г. Мазье.

Одно из заседаний Общества было посвящено юбилею А. Д. Александрова.

Отчеты о заседаниях Общества регулярно публикуются в журнале «Успехи математических наук» (выпуски 93, 96, 99, 103, 106).

Отчет ревизионной комиссии был зачитан М. З. Соломяком.

В прениях по отчетным докладам выступили: О. А. Ладыженская, С. М. Лозинский, Е. С. Ляпин, С. Г. Михлин, М. З. Соломяк, Н. А. Лебедев.

Работа Правления была признана удовлетворительной.

В результате проведенного затем тайного голосования в состав Правления Общества избраны:

Юрий Владимирович Линник (президент),
Ольга Александровна Ладыженская (вице-президент),
Сергей Михайлович Лозинский (вице-президент),
Александр Данилович Александров,
Евгений Сергеевич Ляпин,
Соломон Григорьевич Михлин,
Владимир Абрамович Рохлин,
Борис Александрович Рымаренко (казначей),
Михаил Федорович Широхов (секретарь).

Ревизионная комиссия избрана в следующем составе:

Валентин Петрович Ильин,
Михаил Захарович Соломяк,
Владимир Николаевич Судаков.

Заседание 26 февраля 1963 г.

1. Ю. В. Линник «Новые применения комплексных переменных в математической статистике».

1°. Рассматриваются экспонентные семейства распределений, даются повторные выборки и формулируется нулевая гипотеза в виде ряда однородных полиномиальных соотношений между параметрами. Изучаются подобные (в смысле Ю. Неймана) тесты. В данном случае подобие тестов вытекает из требования их несмещенности.

2°. Производится аналитическое продолжение некоторого линейного функционала функции подобия выборки по параметрам. Существование или несуществование тестов нерандомизированных и зависящих от заданных статистик, как выясняется, зависит от того, как тестовые поверхности расположены по отношению к особым «критическим поверхностям» или «критикам» данного семейства мер.

3°. Простейшим частным случаем получившейся теории является исследование известной проблемы Беренса—Фишера о двух нормальных выборках. Для тестов проблемы Беренса—Фишера, зависящих от 4 достаточных статистик и однородных при достаточно общих условиях, обнаруживается несуществование подобных тестов (и тем самым и несмещенных тестов).

4°. Получившаяся теория применима к исследованию приближенных тестов. Она выдвигает некоторые своеобразные вопросы теории приближений в комплексной области и граничных задач для аналитических функций и связывает их с математической статистикой.

Заседания 12 марта, 26 марта и 9 апреля 1963 г.

1. Н. А. Шанин «О машинном поиске логических доказательств. (Как научить машину доказывать теоремы.)»

Заседание 23 апреля 1963 г.

1. А. М. Вершик «Общая теория гауссовых мер в линейных пространствах».

Нормированная счетно-аддитивная мера μ, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ линейного множества Ω, называется гауссовой, если всякий $\mathfrak{A}$-измеримый линейный функционал имеет в Ω гауссово распределение.

Среди всех других характеристических свойств гауссовых мер следует отметить одно наиболее важное — линейная структура Ω в некотором смысле наиболее тесно согласована с метрической структурой, индуцируемой гауссовой мерой. Дальнейшие результаты с разных точек зрения раскрывают это обстоятельство.

Пусть H_1 — пространство линейных измеримых функций на Ω. Если $x \in H_1$, то $x \in L^2_\mu(\Omega)$. Функционал

$$B_n(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_\Omega x_1(\omega)\, x_2(\omega) \ldots x_n(\omega)\, d\mu$$

называется моментом порядка n меры μ. Гауссова мера вполне характеризуется первыми двумя моментами $B_1(x)$ — средним и $B_2(x, y)$ — корреляционным функционалом Характеристический функционал

$$f(x) = \int\limits_\Omega e^{ix(\omega)} d\mu$$

выражается через них следующим образом:

$$f(x) = e^{iB_1(x) + \frac{1}{2} B_2(x, x)}.$$

Топология сходимости по мере в H_1 совпадает с гильбертовой топологией $L^2_\mu(\Omega)$, и скалярное произведение в последней задается с помощью корреляционного функционала $[x, y]_{H_1} = B_2(x, y)$.

Пространство $L^2_\mu(\Omega)$ допускает разложение, обобщающее результат работы [1]

$$L^2_\mu(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus H_n,$$

где

$$H_n = \underbrace{H_1 \otimes \ldots \otimes H_1}_{n}, \quad H_0 = R_1.$$

В этом разложении H_n есть пространство так называемых обобщенных полиномов Эрмита степени n. Приведенное разложение позволяет упростить вывод результатов, относящихся к теории интегрирования в бесконечномерных пространствах относительно гауссовых мер.

Пусть T — некоторое линейное преобразование Ω. Для того чтобы оно сохраняло гауссову меру, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее коммутационное соотношение: $B(T^*x, y) = B(x, T^{*-1}y)$. Такие преобразования будем называть гауссовыми. Они составляют важный модельный класс преобразований с инвариантной мерой. Пусть T — гауссово преобразование, тогда оно индуцирует в $L^2_\mu(\Omega)$ вещественный унитарный оператор U_T: $(U_T f)(\omega) = f(T\omega)$. В силу линейности U_T $(H_1 \to H_1)$ при этом U_T как оператор, действующий в H_1, является также вещественным и унитарным; обозначим его u_T. Оказывается, для гауссовых мер верен обратный факт: всякий унитарный вещественный оператор $u(H_1 \to H_1)$ может быть продолжен до некоторого оператора U_T, порожденного гауссовым преобразованием T. В иной формулировке этот факт содержится в [2]. Более того, приведенное выше свойство является характеристическим: всякая (неразложимая) мера μ в линейном пространстве Ω, обладающая этим свойством с точностью до нормировки, гауссова. Этот результат тесно связан с известной теоремой Шенберга (см., например, [3]).

Приведенные факты показывают, что группа всех унитарных операторов U может быть изоморфно вложена в $\mathcal{T}$ преобразований с инвариантной мерой. Отсюда следует, что отыскание унитарных представлений групп можно свести к отысканию представлений в группу $\mathcal{T}$; в несколько неопределенной форме это соображение высказано недавно в работе [4].

С точностью до линейного изоморфизма гауссово преобразование задается своей спектральной характеристикой — так мы называем спектральный тип оператора u_T. Всякое гауссово преобразование, действующее в сепарабельном (в смысле теории меры) пространстве Ω, линейно изоморфно преобразованию, порожденному гауссовой многомерной стационарной случайной последовательностью, причем спектральной характеристикой в этом случае является тип Хеллингера спектральной меры (матрицы).

Основные вопросы теории гауссовых преобразований сводятся к характеризации их метрических свойств в терминах спектральных характеристик.

Спектром гауссова преобразования называется спектр унитарного оператора U_T. Поскольку $U_T = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{u_T \otimes u_T \otimes \ldots \otimes u_T}_{n}$, то вычисление спектра по спектральной характеристике представляет собой довольно сложную задачу спектральной теории операторов. Приведем некоторые относящиеся сюда результаты.

1°. Если обозначить через $\Phi(V)$ максимальный тип V, то

$$\Phi(U_T) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi(u_T)]^n \text{ (степень в смысле свертки)}$$

и, следовательно, $\Phi(U_T) \succ [\Phi(u_T)]^2$ (для одномерного случая это доказано в [5]).

2°. Всякое гауссово преобразование T может быть разложено в прямое произведение гауссовых преобразований, спектр которых относится к одному из следующих видов: простой (см. [6]), неограниченно кратный, почти однородный (см. [7]) и однородный. Для первых трех из них спектральный изоморфизм эквивалентен линейному — это означает, что для гауссова преобразования с такими спектрами полная система линейно метрических инвариантов исчерпывается спектром.

3°. Эргодичность гауссова преобразования эквивалентна отсутствию дискретной составляющей в спектральной характеристике и, следовательно, в спектре. Всякое гауссово преобразование T_F со спектральной характеристикой F метрически изоморфно следующему прямому произведению $T_{F'} \times S_{(C_1, C_2, \ldots)} \times E$; здесь $T_{F'}$ — гауссово преобразование со спектральной характеристикой F', F' — непрерывная часть F, $(c_1, c_2, \ldots)$ — дискретная часть F, $S_{(C_1, \ldots)}$ — сдвиг на бесконечномерном торе на элемент $(c_1, \ldots)$ и E — единичное преобразование.

Метрический изоморфизм двух гауссовых преобразований, вообще говоря, отличен от линейного и спектрального изоморфизмов. Однако все три вида изоморфизмов совпадают для случая чисто сингулярного неоднородного спектра. В то же время гауссово преобразование с абсолютно непрерывной спектральной характеристикой (т. е. со счетнократным лебеговским спектром) метрически изоморфны, хотя этот изоморфизм нелинеен и устроен довольно сложно [8].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Винер, Нелинейные задачи теории случайных процессов, М., ИЛ, 1961.
[2] S. Kakutani, Proc. Sixth. Congr. Prob. Theory 2 (1961).
[3] Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, Физматгиз, 1961.
[4] Г. Макки, Бесконечномерные представления групп, Математика 6 : 6 (1962).
[5] С. В. Фомин, О динамических системах в пространстве функций, УМЖ 2, 2 (1950).
[6] И. В. Гирсанов, О спектрах динамических систем, пораждаемых стационарными гауссовыми процессами, ДАН 119, № 5 (1958).
[7] А. М. Вершик, К теории нормальных динамических систем, ДАН 144, № 1 (1962).
[8] А. М. Вершик, О спектральном метрическом изоморфизме некоторых нормальных динамических систем, ДАН 144, № 2 (1962).

2. А. И. Векслер «Векторные цепи и их применение в теории полуупорядоченных пространств».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран Анатолий Моисеевич Вершик.

4. Выдвижение кандидатов на соискание премии Ленинградского математического общества молодому математику в 1963 г.

Заседание 14 мая 1963 г.

1. Б. Б. Венков «Формальная алгебраическая геометрия».

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран Борис Борисович Венков.

3. Присуждение премии Ленинградского математического общества молодому математику. Премия общества за 1963 г. присуждена Б. Б. Венкову за работу «О гомологиях групп единиц в алгебрах с делением».

Заседание 28 мая 1963 г.

1. Вручение премии Ленинградского математического общества. Премия за 1963 г. вручена Б. Б. Венкову.

2. Б. Б. Венков «Гомологии групп единиц».

3. Обсуждение плана работ Физматгиза. С сообщением от Издательства выступил В. И. Битюцков.

Общество одобрило план работ Физматгиза.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 24 сентября 1963 г.

1. В. А. Солонников «Об общих краевых задачах для линейных параболических систем».

1°. В работе [1] были рассмотрены в ограниченном цилиндре $Q=\Omega\times[0, T]$, где Ω—n-мерная область с гладкой границей S, краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, параболических в смысле Сирота:

$$\left.\begin{aligned} L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u=f, \\ B\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u\Big|_{\Gamma}=\Phi, \\ u\,|_{t=0}=\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем $\Gamma=S\times[0, T]$. Предположим, что матрицы L и B удовлетворяют условиям, указанным в работе [1]. Для задачи (1) в этой работе анонсированы априорные оценки и теоремы существования, которые, как выяснилось, мы можем доказать лишь при некотором дополнительном ограничении.

Предполагается, что существует матрица $\widetilde{B}(x, t, i\xi, p)$ размеров $bm\times m$, где $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, со следующими свойствами:

а) Существует набор целых чисел μ_q $(q=1, \ldots, bm)$ таких, что

$$\widetilde{B}_{qj}(x, t, i\xi\lambda, \lambda^{2b}p)=\lambda^{\mu_q+2b-s_j}\widetilde{B}_{qj}(x, t, i\xi, p)$$

(числа b, m, s_j определены в [1])

б) Матрица $\widetilde{B}$ удовлетворяет условию дополнительности [1] вместе с транспонированной матрицей L'.

Это предположение нам нужно для того, чтобы доказать, что решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} L_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_n}, p\right)\widetilde{u}^{(s)}=0, \\ B_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_n}, p\right)\widetilde{u}^{(s)}\Big|_{x_n=0}=\widetilde{\Phi}^{(s)}, \\ |\widetilde{u}|_{x_n\to+\infty}\longrightarrow 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на полупрямой $x_n\geqslant 0$, где $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$, $\Phi_q^{(s)}=\delta_{qs}$ $(q, s=1, \ldots, bm)$, а L_0 и B_0—матрицы, состоящие только из старших членов, аналитично по переменным ζ_j и p при вещественных ζ_j и $\operatorname{Re} p>-\delta|\zeta|^{2b}$. Доказательство этого факта основано на следующей лемме. *Столбцы матрицы*

$$T(\zeta, x_n, p)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^+}\hat{L}_0(i\zeta, i\tau, p)\,\widetilde{B}'(i\zeta, i\tau, p)\frac{e^{i\tau x_n}}{M^+}\,d\tau,$$

где штрихом обозначена операция транспонирования матрицы (остальные обозначения см. в [1]), *образуют базис в пространстве решений системы* (2), *убывающих при* $x_n\to+\infty$.

Эта лемма позволяет записать условие дополнительности для матриц L_0 и B_0 в удобной форме

$$\det B_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_n}, p\right)T(\zeta, x_n, p)\Big|_{x_n=0}\neq 0\quad (\operatorname{Im}\zeta_j=0,\ \operatorname{Re}p>-\delta\,|\,\zeta\,|^{2b}).$$

Дополнительное предположение, очевидно, выполняется, когда система состоит из одного уравнения. Кроме того, как видно из рассуждений С. Д. Эйдельмана [2], оно выполняется для параболических по И. Г. Петровскому систем и $\widetilde{B}$ является матрицей, соответствующей первой краевой задаче. Вместе с тем существуют системы, параболические по Сирота, для которых первая краевая задача плохо поставлена, но существуют другие хорошо поставленные задачи.

2°. Мы можем распространить результаты [1] (при выполнении упомянутого дополнительного условия) на более общие краевые задачи

$$\left.\begin{aligned} &L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u=f,\\ &B\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u\Big|_{\Gamma}=\Phi,\\ &C\left(x, \frac{\partial}{\partial t}\right)u\Big|_{t=0}=\varphi. \end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Мы не имеем возможности привести здесь подробные определения и ограничимся несколькими замечаниями. Главная часть матриц L и B определяется с помощью наборов целых чисел s_j, t_j, σ_q как для эллиптических по А. Даглису—Л. Ниренбергу систем (см., например, [1]). Никаких ограничений на расположение старших производных функций u_j по t не накладывается, и коэффициенты при них могут зависеть от x и t. При $t=0$ задаются определенные линейные комбинации производных функций u_j по t определенного порядка с коэффициентами, зависящими от x. Задача (1) является частным случаем задачи (3).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Солонников, Об общих краевых задачах для систем дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типов, Материал к советско-американскому симпозиуму по теории дифференциальных уравнений в частных производных, Новосибирск, 1963.

[2] С. Д. Эйдельман, К теории общих граничных задач для параболических систем, ДАН 149, № 4 (1963), 792—795.

2. Об организации международного съезда математиков в 1966 г. в Москве.

Заседание 8 октября 1963 г.

1. Н. А. Лебедев «Распространение комплексных функций и некоторые его приложения к конструктивной теории функций».

2. Р. В. Петропавловская «О некоторых классах групп, определяющихся структурой своих подсистем».

Заседание 22 октября 1963 г.

1. Гаральд Крамер (Швеция) «Математики и математические школы Швеции».

2. И. И. Огиевецкий (Днепропетровск) «Тауберовы теоремы для методов суммирования, связанных с аналитическим продолжением».

1°. Рассматриваются методы суммирования, полученные из соответствующих прототипных методов, посредством аналитического продолжения, входящих в определение средних этих методов регулярных элементов той или иной природы. К классу этих методов принадлежат, например, обобщенные («усиленные») методы Абеля для последовательностей и функций, обобщенный экспоненциальный метод B^*, метод (B^*, α) и др. Предлагается некоторый метод доказательства теорем тауберова типа для методов суммирования из этого класса, приводящий к своего рода соответствию, позволяющему в ряде случаев тауберовой теореме для прототипного метода суммирования отнести тауберову же теорему для соответствующего ему «аналитически продолженного» метода. Доказательство использует, в частности, известную теорему Адамара и Прингсхейма о расположении особых точек на границе круга сходимости степенного ряда и континуальный аналог этой теоремы относительно расположения особых точек на абсциссе сходимости интеграла Лапласа, установленный Ландау (см. соответственно [1] и [2]).

2°. Пусть $P(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $p_n>0$, сходится в круге радиуса r, $0<r\leqslant\infty$, и степенной ряд $a(x, \{s_n\})=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$ ($\{s_n\}$ — некоторая последовательность) сходится по крайней мере для тех же x, $|x|<r$. Если

$$\lim_{x\to r-0} \frac{a(x, \{s_n\})}{P(x)}=s, \tag{1}$$

то последовательность $\{s_n\}$ P-суммируема к s.

Если степенной ряд, определяющий $a(x, \{s_n\})$, сходится в круге радиуса $r^*<r$ и $a(x, \{s_n\})$ аналитически продолжаема для $r^*<x<r$ функцией $a^*(x, \{s_n\})$ и

$$\lim_{x\to r-0} \frac{a^*(x, \{s_n\})}{P(x)}=s, \tag{2}$$

то последовательность $\{s_n\}$ P^*-суммируема к s. Выбор

$$P(x)=(1-x)^{-1},\ e^x,\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^t\,dt,\ \alpha>0, -\ln(1-x)$$

приводит соответственно к обобщенным методам суммирования Абеля, методу B^*, методу B^*, α (см. [3] и [4]), обобщенному логарифмическому методу.

Теорема 1. *P^*-метод суммирования сильнее P-метода суммирования.*

3°. Следующая теорема позволяет тауберовой теореме для P-метода суммирования отнести тауберову же теорему для P^*-метода суммирования.

Теорема 2. *Каждой тауберовой теореме для P-метода суммирования вида: «Если последовательность $\{s_n\}$ суммируется P-методом к s и удовлетворяет некоторому тауберову условию Q, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$» — соответствует таубероеа же теорема для P^*-метода суммирования вида: «Если последовательность $\{s_n\}$ суммируется P^*-методом к s и удовлетворяет условиям Q* [1]) *и условию $s_n>-\varphi(n)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$,*

---

[1]) Которое, разумеется, может варьироваться в зависимости от рассматриваемого P-метода.

где $\varphi(n)$ — *целочисленная неотрицательная функция такая, что* $\lim\sup \sqrt[n]{\varphi(n)} \leqslant 1$, *то* $\lim s_n = s$».

4°. Из теоремы 2 вытекают тауберовы теоремы для методов суммирования обобщенного абелева A^*, обобщенного борелевого B^* и далее к тауберовым теоремам для методов Г. Ф. Вороного, Херлестамма, А. В. Лотоцкого (см. [5], доказательство в [5] проведено независимо от теоремы 2, но тем же методом). Из теоремы 2 вытекает, в частности, следующая тауберова теорема для метода (B^*, α).

Теорема 3. *Если последовательность* $\{s_n\}$ *суммируема к* s *методом* (B^*, α) *и* $\lim\inf\{s_m - s_n\} \geqslant 0$ *при* $n \to \infty$, $n < m$, $\frac{m-n}{\sqrt{n}} \to 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

5°. Последовательность $\{s_n\}$ суммируется методом (B, q_n) Г. Ф. Вороного к s, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} q_{n-k} s_k}{Q_n} = s, \quad q_n > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad Q_n = \sum_{i=0}^{n} q_i,$$

(B, q_n)-метод регулярен, если и только если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{Q_n} = 0$.

Соображения, аналогичные вышеизложенным, приводят к следующей теореме выпуклости для метода суммирования Чезаро.

Теорема 4. *Пусть* σ_n^{α} — *чезаровское среднее порядка* $\alpha > -1$, *образованное для последовательности* $\{s_n\}$. *Если последовательность* $\{s_n\}$ *суммируема регулярным методом Г. Ф. Вороного* (B, q_n) *к* s *и* $\lim\inf\{\sigma_m^{\alpha} - \sigma_n^{\alpha}\} \geqslant 0$ *при* $n \to \infty$, $n < m$, $\frac{m-n}{n} \to 0$, *то последовательность* $\{s_n\}$ (C, β)-*суммируема к* s *при любом* $\beta \geqslant \alpha - 1$.

6°. Функция $s(x)$ суммируема обобщенным («функциональным») методом Абеля A^* к s, если: (i) абсцисса сходимости α для $\psi(z) = z\int\limits_0^{\infty} e^{-zt} s(t)\,dt$ положительна; (ii) функцию $\psi(z)$ можно аналитически продолжить на все положительные z; (iii) $\lim\limits_{z\to+0} \psi(z) = s$.

Если $\alpha \leqslant 0$, то обобщенный функциональный метод Абеля A^* переходит в (обычный) метод Абеля A.

Теорема 5. *Обобщенный функциональный метод Абеля сильнее обычного функционального метода Абеля.*

Функция $s(x)$ суммируема методом Г. Ф. Вороного (B, q_n) к s, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x q(x-t)\, s(t)\, dt}{Q(x)} = s, \; q(x) > 0, \; Q(x) = \int_0^x q(t)\, dt,$$

$(B, q(x))$-метод регулярен, если и только если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Q(x-c)}{Q(x)} = 1$, каково бы ни было c.

Теорема 6. *Если функция* $s(x)$ *суммируема обобщенным функциональным методом Абеля к* s *и* $\lim\inf\{s(y) - s(x)\} \geqslant 0$ *при* $x \to \infty$, $y > x$, $\frac{y-x}{x} \to 0$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$.

Теорема 7. *Если функция* $s(x)$ *суммируется методом Г. Ф. Вороного* $(B, q(x))$ *к* s *и* $\int\limits_0^{\infty} e^{-zt} s(t)\, dt$ *сходится хотя бы для одного* z *и* $\lim\{s(y) - s(x)\} \geqslant 0$ *при* $x \to \infty$, $y > x$, $\frac{y-x}{x} \to 0$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$.

Теорема 8. *Если функция $s(x)$ суммируется регулярным методом Г. Ф. Вороного $(B, q(x))$ к s и*

$$\lim |s(y)-s(x)|=0$$

при $x\to\infty$, $y>x$, $\frac{y-x}{x}\to 1$, *то*

$$\lim_{x\to\infty} s(x)=s.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Титчмарш, Теория функций, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
[2] G. Doetsch, Theory und Anwendungen der Laplace-transformation, Dover-publication, 1943.
[3] Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951.
[4] И. И. Огиевецкий, До теорії сумування ряд і в методом Бореля дробового порядку, ДАН УРСР, № 6, 1962, 719—722.
[5] И. И. Огиевецкий, Некоторые тауберовы теоремы, УМН 19, вып. 4 (118) (1964).

Заседание 29 октября 1963 г.

1. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинских премий 1964 г.

Заседание 26 ноября 1963 г.

1. В. Г. Спринджук «Современное состояние метрической теории чисел и проблема Малера».

Заседание 10 декабря 1963 г.

1. О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева «О результатах последнего времени по квазилинейным уравнениям эллиптического и параболического типов» (обзорный доклад).

С 1956—1958 гг. начался новый этап в изучении уравнений второго порядка эллиптического и параболического типа, линейных с разрывными коэффициентами и квазилинейных ([1]—[7]), который привел к концу 1959 г. к достаточно полному решению 19-й и 20-й проблем Гильберта в вариационных задачах для функционалов вида

$$\int\limits_{\Omega} F(x, u, u_x)\,dx,$$

$x=(x_1, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 2$ ([8], [10]—[13]). Несколько позже и для более узкого класса $F(x, u, p)$ подобные результаты были получены в работах Морри (см. [22]). В [8], [10]—[13] одновременно с вариационной задачей был изучен класс уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}(a_i(x, u, u_x))+a(x, u, u_x)=0. \tag{1}$$

Затем в [14]—[16] были исследованы параболические уравнения вида

$$u_t-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}(a_i(x, t, u, u_x))+a(x, t, u, u_x)=0, \tag{2}$$

в том числе и линейные с разрывными неограниченными коэффициентами (частные случаи таких уравнений были предметом исследования многих авторов; см. [7], [23], [24]). Наконец, в [9], [17], [18] были изучены и квазилинейные эллиптические и параболические уравнения общего вида

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ u,\ u_x)\, u_{x_i x_j} + a(x,\ u,\ u_x) = 0, \tag{3}$$

$$u_t - \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ t,\ u,\ u_x)\, u_{x_i x_j} + a(x,\ t,\ u,\ u_x) = 0. \tag{4}$$

Во всех упомянутых работах предполагается, что уравнения (1), (3) равномерно эллиптичны (соответственно параболичны). В [4], [15], [19] построены примеры, показывающие, что полученные в работах [9]—[20] результаты точны.

Центральную часть во всех этих работах занимают априорные оценки норм $|u|_{C_{1,\,\alpha}}$. В свою очередь, получение оценок норм $|u|_{C_{1,\,\alpha}}$ разбивается на две группы: на оценки $\max|u|$ и $\max|u_x|$ и на оценки констант Гёльдера $|\cdot|_{(\alpha)}$ для u и u_x. Различные достаточные условия оценки $\max|u|$ даны во многих работах, начиная с работ Пикара и С. Н. Бернштейна и кончая [25], [26], [11], [19].

Оценки $\max|u_x|$ были даны в конце 1955 г. и опубликованы в [1] (подробное изложение имеется в [2] и в [11]), причем если заранее известна оценка нормы Гёльдера $|u|_{C_{0,\,\alpha}}$ для самого решения u с каким-нибудь $\alpha > 0$, то эти оценки $\max|u_x|$ получены для всего класса равномерно эллиптических и равномерно параболических уравнений (3), (4), удовлетворяющих только так называемым естественным ограничениям на порядки роста функций $a_{ij}(x,\ u,\ p)$, $a(x,\ u,\ p)$ по p при $|p| \to \infty$. Необходимость этих ограничений подтверждается специально построенными примерами [19]. В [9], [18] дан несколько иной вариант оценок $\max|u_x|$, при котором используется существование у $u(x)$ лишь производных, входящих в уравнение. Таким образом, вопрос о получении оценок норм $|u|_{C_{1,\,\alpha}}$ свелся к получению оценок постоянной Гёльдера $|\cdot|_{(\alpha)}$ для u и u_x. Такие оценки для всего класса уравнений (1) и (2) (в том числе и линейных уравнений с неограниченными коэффициентами) даны в [10], [11], [14]—[16]. Все ограничения, при которых это сделано в [10], [11], [14]—[16], как показано в [15], [19], [4], вызваны существом дела. Этим работам предшествовали работы [6], [7], в которых были даны оценки $|u|_{C_{0,\,\alpha}}$ для решений простейших уравнений

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, u_{x_j}\right) = 0, \tag{5}$$

$$u_t - \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\, u_{x_j}\right) = 0. \tag{6}$$

Наконец, в [9], [17], [18] были оценены $|u_x|_{(\alpha)}$ для всего класса уравнений (3) и (4), что дало возможность установить классическую разрешимость в целом основных краевых задач для них и выяснить границы справедливости 19-й проблемы Гильберта.

В [27]—[29] дан новый метод оценки $|u|_{C_{0,\,\alpha}}$ для решений (5) и (6). В [30] он применен к общим линейным уравнениям вида (2). В работе [20] дан новый метод оценок $|u|_{(\alpha)}$ и $|u_x|_{(\alpha)}$ для решений линейных и квазилинейных уравнений (1)—(4), более простой, чем первоначальный в работах [10]—[19].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений, ДАН **107**, № 5 (1956).

[2] О. А. Ладыженская, Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений, Труды Моск. матем. о-ва **7** (1958), 149—177.

[3] О. А. Ладыженская, О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторых вариационных задач, ДАН **120**, № 5 (958), 956—959.

[4] О. А. Ладыженская, О разрешимости в целом краевых задач для уравнений Навье — Стокса и квазилинейных параболических уравнений, Труды IV Всесоюзного матем. съезда, 1963.

[5] H. O. Cordes, Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen, Math. Ann. **130** (1956), 278—312.

[6] E. de Giorgi, Sulla differenziabilitá e l'analiticita delle estremal degli integrali multipli regolari, Memorie delle Acc. Sci. Torino, Ser. 3a, T. 3o, Parte I (1957), 3—19.

[7] J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. Journ. Math. **80**, № 4 (1958), 931—954.

[8] Н. Н. Уральцева, О регулярности решений многомерных эллиптических уравнений и вариационных задач, ДАН **130**, № 6 (1960), 1206—1209.

[9] Н. Н. Уральцева, Общие квазилинейные уравнения второго порядка и некоторые классы систем эллиптического типа, ДАН **146**, № 4 (1962), 778—781.

[10] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, О вариационной задаче и квазилинейных уравнениях со многими независимыми переменными, ДАН **135**, № 6 (1960), 1330—1334.

[11] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными, УМН **16**, вып. 1 (1961), 19—90.

[12] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, О регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений, ДАН **140**, № 1 (1961), 45—47.

[13] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva, On the smoothness of weak solutions of quasilinear equations in several variables and of variational problems, Comm. Pure Appl. Math. 14, № 3 (1961), 481—496.

[14] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ДАН **139**, № 3 (1961), 544—547.

[15] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ч. I, Изв. АН, серия матем. **26**, № 5 (1962), 5—52.

[16] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Первая краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ч. II, Изв. АН, серия матем. **26**, № 5 (1962), 753—780.

[17] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений второго порядка общего вида, ДАН **147**, № 1 (1962), 28—30.

[18] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Краевая задача для линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического типа, ч. III, Изв. АН, серия матем. **27**, № 1 (1963), 161—240.

[19] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, О допустимых расширениях понятия решения для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка, Вестник ЛГУ, № 1 (1963), 10—25.

[20] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, О непрерывности по Гёльдеру решений и их производных для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов, ДАН **155**, № 6 (1964).

[21] C. B. Morrey, Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity, Math. Z. **72**, № 2 (1959).

[22] C. B. Morrey, Quelques resultats recents du calcul des variations, Colloques Internationeaux du Centre National de la Recherche Seient. **117**, Juin (1962), 25—30.

[23] О. А. Олейник, О квазилинейных параболических уравнениях со многими независимыми переменными, ДАН **138**, № 1 (1961).

[24] О. А. Олейник и С. Н. Кружков, Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными, УМН **16**, вып. 5 (1961), 115—155.

[25] А. Г. Сигалов, Двумерные задачи вариационного исчисления в непараметрической форме, Труды Моск. матем. о-ва **2** (1953), 201—233.

[26] G. Stampacchia, Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellitiche, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, ser. 3 **12** (1958), 3—24.

[27] J. Moser, A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **13**, № 3 (1960), 457—468.

[28] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **14**, № 3 (1961), 577—591.

[29] J. Moser, Неравенства Гарнака для параболических дифференциальных уравнений, Совместный советско-американский симпозиум по уравнениям в частных производных, Новосибирск, 1963.

[30] С. Н. Кружков, О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, ДАН **150**, № 3 (1963).

[31] С. Н. Кружков, Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка, ДАН **150**, № 4 (1963).

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 11 февраля 1964 г.

1. П. С. Александров (Москва) «О некоторых вопросах топологических пространств» (обзорный доклад).

Заседание 25 февраля 1964 г.

1. В. А. Рохлин «Топология многообразий и многообразие топологий» (обзорный доклад).

Заседание 10 марта 1964 г.

1. С. М. Лозинский «О нормах векторов и матриц».
2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран

Чудаков Николай Григорьевич.

Заседание 24 марта 1964 г.

1. В. И. Смирнов и Н. А. Лебедев «Конструктивная теория функций комплексного переменного».

Заседание 14 апреля 1964 г.

1. Г. И. Натансон «О работе семинара по конструктивной теории функций».
2. А. И. Векслер «Об операциях частичного умножения и системах операций частичного умножения в полуупорядоченных группах и линейных пространствах».

Доклад состоит из двух частей. Результаты первой части можно найти в [1]. Во второй части речь идет о системах операций частичного умножения в K-линеале X (при этом используется терминология первой части). Системы операций полного умножения рассматривались в упорядоченных и частично упорядоченных группах Е. Габовичем [2], [3] и Д. М. Смирновым [5].

Примерами систем операций частичного умножения являются: система всех частичных умножений, система всех максимальных (т. е. непродолжимых) частичных умножений, система P (в случае архимедова X) всех реализационных частичных умножений, ее подсистема P_1 всех достаточно широких реализационных частичных умножений. Каждая реализация X на каноническом пространстве S вполне определяется выбором того элемента в максимальном расширении $\widetilde{\hat{X}}$ K-пополнения K-линеала X, которому при этой реализации соответствует функция, тождественно равная единице. Так как в K-пространстве X всякое реализационное частичное умножение определяется в точности одной реализацией, то в этом случае система $P=P_1$ изоморфна системе всех слабых единиц в $\widetilde{X}$; отсюда, в частности, P может быть сделана (при добавлении 0) коммутативной l-полугруппой, в которой все элементы положительны ($\geqslant 0$) и в которой, кроме того, определено произведение элемента на неотрицательное число.

Любая из рассмотренных выше систем определяет порядок в X (в смысле определения, аналогичного данному в [1] для системы, состоящей из одного частичного умножения). Именно, для любой рассмотренной системы множество положительных элементов в X совпадает с множеством всевозможных частичных единиц умножения.

Система H называется *нормальной*, если любой $x>0$ является частичной единицей умножения при некотором $\eta \in H$. Рассмотренные выше системы нормальны.

Линейное подмножество $I \subset X$ называется *идеалом* относительно данной системы H, если из $x \in I$, $y \in X$ и $\eta \in H$ следует $x\eta y \in I$, коль скоро $x\eta y$ существует. Изучение идеалов представляет интерес не для любой системы. Например, если H состоит из одного почти пустого частичного умножения, то множество идеалов совпадает с множеством всех линейных подмножеств X. Ограничимся рассмотрением идеалов в случае архимедова X и нормальной системы H (все рассматриваемые ниже X и H без особых оговорок такими и будут предполагаться). Для сокращения формулировок будем считать, что зафиксирована некоторая реализация X на S, никак не связанная с системой H.

Теорема 1. *Для каждого идеала I (максимального идеала M) найдется замкнутое $F \subset S$ такое, что $I=I_F \equiv \{x \in X\colon x(U_x) \equiv 0$, где U_x — окрестность $F\}$ (соответственно найдется $t \in S$ такая, что $M=I_t \equiv I_{\{t\}}$). Обратно, всякое множество I_F является идеалом в X.*

Следствие. *Все нормальные системы дают одно и то же множество идеалов в X.*

Теорема 2. *Если X — K-линеал с проекциями в любую компоненту, то отображение $F \to I_F$ ($t \to I_t$) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами всех идеалов в X и всех замкнутых подмножеств в S (соответственно между множествами всех максимальных идеалов и всех точек S).*

Следствие 1. *В X всякий идеал погружается в максимальный, т. е. структура $\mathfrak{G}$ всех идеалов в X (если считать $I \geqslant J$, когда $I \supset J$) антиизоморфна атомной.*

Аналогичное утверждение имеет место для произвольного X с единицей (Фрейденталя).

Другие результаты, вытекающие из теоремы 2, сформулируем для простоты лишь для случая K-линеала с единицей.

Следствие 2. *В X с единицей структура $\mathfrak{G}$ изоморфна структуре всех идеалов булевой алгебры компонент X* ([4], № 8). *$\mathfrak{G}$ является структурой Стона* [6], *т. е. дистрибутивной структурой с нулем и единицей 1 с относительными псевдодополнениями, в которой выполняется тождественное соотношение $I^* \vee I^{**}=1$ (I^* — псевдодополнение I).*

Из теоремы 1 видно, что всякий максимальный идеал в произвольном X простой. Можно установить общую форму простого идеала и общую форму максимального идеала в X. В частности, оказывается, что в случае *K-линеала X с проекциями в главную компоненту множество простых идеалов совпадает с множеством максимальных.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Векслер, Операции частичного умножения в векторных структурах, ДАН (1964).

[2] Е. Габович, Частично упорядоченные Ω-группы, Уч. зап. Тартуск. ун-та 102 (1961), 294—300.

[3] Е. Габович, Об архимедовски упорядоченных Ω-группах, Уч. зап. Тартуск. ун-та 129 (1962), 19—22.
[4] R. Sikorski, Boolean algebras, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
[5] Д. М. Смирнов, О приведенно свободных мультиоператорных группах, ДАН 150, № 1 (1963), 44—47.
[6] O. Frink, Pseudo-complements in semilattices, Duke Matn. Journ. 29, № 4 (1962), 505—514.

3. Выдвижение кандидатов на соискание премии Ленинградского математического общества молодому математику в 1964 г.

4. Обсуждение структуры журнала «Успехи математических наук» и рекомендации его редакции.

Заседание 12 мая 1964 г.

1. Выдвижение кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР.

2. Присуждение премии Ленинградского математического общества молодому математику. Премия Общества за 1964 г. присуждена В. С. Буслаеву за исследование коротковолновой асимптотики решения задачи дифракции на выпуклом цилиндре.

3. В. И. Битюцков «О плане выпуска математической литературы издательства «Наука».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 22 сентября 1964 г.

1. Е. С. Ляпин «Представление полугрупп преобразованиями».

Для произвольного множества Ω обозначим через $\mathfrak{F}_\Omega$ совокупность всех преобразований (частичных) Ω. Относительно действия умножения (суперпозиции) преобразований $\mathfrak{F}_\Omega$ образует полугруппу. Подполугруппы $\mathfrak{F}_\Omega$ называются полугруппами преобразований множества Ω.

Гомоморфизм φ некоторой полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{F}_\Omega$ называется представлением $\mathfrak{A}$ преобразованиями множества Ω. Если φ является изоморфизмом, то представление называется точным, или реализацией.

Пусть Ξ — некоторый класс полугрупп преобразований. Через $I(\Xi)$ обозначим класс всех полугрупп, реализуемых в Ξ, т. е. изоморфных с какой-либо полугруппой из Ξ.

$A(\Xi)$ — проблема абстрактной характеристики класса Ξ состоит в описании класса $I(\Xi)$, т. е. в нахождении необходимого и достаточного условия, которому должна удовлетворять полугруппа, чтобы реализоваться в Ξ.

R_Ξ — проблема реализации в Ξ состоит в нахождении для каждой полугруппы $\mathfrak{A} \in I(\Xi)$ всех ее реализаций в Ξ.

Эти проблемы определяют связь между общей («абстрактной») теорией полугрупп и теорией полугрупп преобразований.

В настоящее время рядом исследований различных авторов указанные проблемы решены для некоторых наиболее важных классов полугрупп преобразований. Ниже указываются некоторые (не все) из этих результатов.

Для класса Ξ_1, состоящего из всех полугрупп преобразований, решение $A(\Xi_1)$ давно известно.

$I(\Xi_1)$ есть класс всех полугрупп. Для проблемы $R(\Xi_1)$ до настоящего времени было предложено три решения. В 1956 г. В. В. Вагнер описал конструкцию, основанную на понятии так называемого репрезентативного гомоморфизма. В 1960 г. Е. С. Ляпин описал всевозможные представления при помощи операции погружения исследуемой полугруппы в некоторую надполугруппу. В 1961 г. Б. М. Шайн построил конструкцию, основанную на объединении представлений.

Пусть Ξ_2 — класс полугрупп взаимно однозначных преобразований, причем полугруппа вместе с каждым преобразованием содержит и обратное к нему преобразование. В. В. Вагнером (1952), а несколько позже независимо Престоном (1954), было дано решение $A(\Xi_2)$. Для того чтобы $\mathfrak{A} \in I(\Xi_2)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $a \in \mathfrak{A}$ нашелся $x \in \mathfrak{A}$ такой, что $axa = a$, и чтобы из $u^2 = u$, $v^2 = v$ $(u, v \in \mathfrak{A})$ всегда следовало $uv = vu$. Впоследствии были обнаружены различные другие эквивалентные характеристики класса таких полугрупп (их называют инверсными, или обобщенными группами Вагнера). Б. М. Шайном (1962) была описана конструкция для решения $R(\Xi_2)$.

Для класса Ξ_3, состоящего из полугрупп взаимно однозначных преобразований, решения для $A(\Xi_3)$ и $R(\Xi_3)$ были даны Б. М. Шайном (1960, 1961). При этом им было использовано введенное ранее П. Дюбрейлем понятие сильного подмножества полугруппы.

Для класса Ξ_4 полугрупп преобразований, осуществляющих взаимно однозначное отображение Ω на себя, $I(\Xi_4)$ есть не что иное, как класс полугрупп, вложимых в группы. Условия этого были исследованы А. И. Мальцевым (1939 1940) и впоследствии не раз привлекали внимание и других исследователей.

Для класса Ξ_5 полугрупп полных преобразований, содержащих все константные (стягивающие) преобразования (т. е. преобразования ранга 1), решение $A(\Xi_5)$ и $R(\Xi_5)$ дано Е. С. Ляпиным (1964). Оказалось, что каждая полугруппа $\mathfrak{A} \in I(\Xi_5)$ имеет с точностью до несущественных различий лишь единственную реализацию в Ξ_5. При этом строение последней может быть ясно описано.

В 1955 г. Е. С. Ляпиным было введено понятие плотно вложенного идеала, использованное им для решения проблемы A для класса полугрупп всех полных преобразований. В последующем оказалось, что этот подход может быть применен к решению проблемы A для ряда классов полугрупп преобразований. Это было осуществлено рядом исследователей, особенно широко Л. М. Глускиным (1959, 1961, 1963).

2. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинских премий 1965 г.

Заседание 13 октября 1964 г.

1. Б. П. Харламов «О математической теории обучения».

1°. Математическая теория обучения и динамическое программирование. Общность предпосылок двух теорий [1]. Управляемый процесс. Решение выбирается шаг за шагом. Марковость.

2°. Общая математическая схема. $T=\{0, 1, 2, \ldots\}$ — время. $[X, \mathfrak{X}]$ — измеримое пространство (пространство состояний). Исследуются семейства марковских процессов, получаемых по следующему правилу.

а) Задается алгоритм процесса обучения — марковская переходная функция, зависящая от управляющего параметра u, однородная во времени: $A_u(S/x)$, $S \in \mathfrak{X}$, $x \in X$, $u \in U$.

б) Задается закон выбора управляющего параметра (управление). Выбор его на каждом шагу может зависеть от состояния обучаемого объекта x, от момента времени t и от случая. После этого определен марковский процесс (с точностью до начального состояния).

Исследуется семейство процессов, порожденных одним алгоритмом и некоторым классом законов управления. В проблеме обучения алгоритм процесса обучения символизирует обучаемый объект, а управление соответствует обучающему субъекту.

3°. Классификация процессов обучения. По способу задания u:

1) $u=f(x)$, f — детерминированная функция. (Пример. Стохастический поиск максимума детерминированной, постоянной во времени функции.)

2) $u=f(x, t)$, f — детерминированная функция. (Пример: поиск и слежение за максимумом детерминированной функции.)

3) $u=f(x, \omega)$; $u(x)$ — случайная функция. (Пример. Стохастический или детерминированный поиск максимума функции, оцениваемый в среднем на классе данных функций.)

4) $u=f(x, t, \omega)$; $u(x, t)$ — случайная функция. (Пример: схемы обучения Буша и Мостеллера и Саппеса и Аткинсона, задачи стохастической аппроксимации.)

По виду алгоритма:

а) Вырожденное распределение $A_u(S/x)$. $A_u(S/x)=E(S/F(x, u))$, $F(x, u) \in X$ — детерминированный алгоритм.

б) Невырожденное распределение $A_u(S/x)$ — стохастический алгоритм.

Последнее деление с математической точки зрения не существенно. Выбор того или иного варианта зависит от взгляда автора очередной модели на роль случая в проблеме обучения.

4°. Пример 1. Модель обучаемости Буша и Мостеллера [2]. Тип 4а. Терминология и предпосылки. Операторы. Управления. Три частных случая. Вычисление моментов предельных распределений.

5°. Пример 2. Модель индивидуального обучения и обучения при взаимодействии Саппеса и Аткинсона [3]. Тип 4а) или 4б). Терминология и предпосылки. Индивидуальное обучение. Обучение при взаимодействии. Вычисление асимптотических моментов и вероятностей.

6°. Пример 3. Стохастический поиск максимума детерминированной функции (Харламов). Тип 1б). Терминология и предпосылки. Эффективность сравнительная и абсолютная. Усиленная абсолютная эффективность. Примеры абсолютно и усиленно абсолютно эффективных алгоритмов на данном классе F детерминированных функций.

7°. Пример 4. Стохастическая аппроксимация. (Тип 4а). (Роббинс и Монро, Кифер и Вольфовиц и др.) Тип 4а. Терминология и предпосылки. Задача Роббинса и Монро. Результаты. Задача Кифера и Вольфовица. Результаты. Неоднородность во времени получаемых марковских процессов.

8°. Проблемы теории обучения.

1) Определить и найти оптимальную процедуру обучения, включая определение момента остановки.

2) Получить результаты, относящиеся к информационному содержанию управляющего параметра (в теории поиска максимума). Другие задачи.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Беллман, Динамическое программирование.
[2] Р. Буш и Ф. Мостеллер, Стохастические модели обучаемости, М., ИЛ, 1962.
[3] P. Suppes, R. Atkinson, Markov Learning Models For Multiperson Interactions, Stanford, 1960.

Заседание 27 октября 1964 г.

1. Л. Д. Фадеев «Характеристические определители дифференциальных операторов».

Заседание 10 ноября 1964 г.

1. Группа математической логики ЛОМИ — Н. А. Шанин (руководитель работы), Н. А. Беляева, Г. В. Давыдов, С. Ю. Маслов, Г. Е. Минц, В. П. Оревков, А. О. Слисенко, А. В. Сочилина, «Обзор экспериментов над программой машинного поиска логического вывода, созданной в ЛОМИ».

Заседание 24 ноября 1964 г.

1. В. П. Хавин «Основные понятия теории пучков и их применение в теории функций».

Заседание 8 декабря 1964 г.

1. Д. А. Владимиров «Меры на алгебрах Буля».