1977 г. январь — февраль *т. XXXII, вып. 1 (193)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 23 сентября 1975 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1975 г.

2. Доклады лауреатов премии ЛМО молодому математику:

О. Я. Виро «Топология узлов».

Н. А. Широков «Приближение непрерывных аналитических функций на компактах».

Заседание 14 октября 1975 г.

1. А. Н. Андрианов «Автоморфные формы и операторы Гекке».

Обзор (для неспециалистов) теории дзета-функций с эйлеровым произведением, отвечающих автоморфным формам, главным образом,— модулярным формам Зигеля.

2. Прием в члены Общества — Виро О. Я.

Заседание 28 октября 1975 г.

1. Б. Б. Венков «Коды и решетки».

В докладе рассказано о связи алгебраической теории кодирования с теорией целочисленных квадратичных форм и матриц.

Заседание 11 ноября 1975 г.

1. Э. Б. Винберг (Москва) «Инварианты и орбиты».

В докладе изложена конструкция фактор-пространства для любой редуктивной линейной группы (Гильберт — Нагата — Мамфорд) и другие результаты об орбитах таких групп. Выделен также широкий класс групп, для которых описание орбит и инвариантов может быть проделано эффективно.

Заседание 25 ноября 1975 г.

1. Ф. А. Березин (Москва) «Квантование».

В докладе сообщена общая концепция квантования классической механики с произвольным фазовым пространством. Удается проквантовать механики, фазовые пространства которых есть однородные келеровы многообразия, например, двумерная сфера, плоскость Лобачевского. Результаты применяются в физике, теории операторов, теории представлений групп Ли.

Заседание 9 декабря 1975 г.

1. Л. Д. Фаддеев «Влияние солитонов на математическую физику и математиков».

Солитонами называются локализованные решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Теория солитонов оказалась в тесной связи с методами

1) См. УМН 30:5 (1975).

обратной задачи теории рассеяния, о чем рассказывалось на заседании ЛМО в 1973 г. Сейчас «солитонная» проблематика значительно расширилась; ею занимается широкий круг лиц. В ней используются понятия и методы многих областей: от алгебраической геометрии до квантовой механики. В докладе рассказано о стимулирующем влиянии теории солитонов.

Заседание 23 декабря 1975 г.

1. «Некоторые проблемы комплексного анализа».

В теории аналитических функций с давних пор в центре внимания были следующие три группы вопросов: проблема единственности для классов функций, принцип максимума и компактность семейств функций и вопросы аппроксимации. В последние годы были развиты новые подходы к этим классическим задачам ($\overline{\partial}$ — проблематика, переход к многим переменным, новые аналитические методы) и получен ряд интересных результатов. О некоторых из них рассказано в сообщениях В. П. Хавина, Е. М. Дынькина, С. В. Хрущева, В. Н. Сеничкина.

Заседание 24 февраля 1976 г.

1. В. С. Буслаев «Асимптотические формулы на непрерывном спектре дифференциальных операторов».

Рассматривались некоторые асимптотические вопросы спектральной теории для эллиптических дифференциальных операторов вида

$$\mathscr{L}u = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x^j} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x)u$$

в областях Ω пространства R^n с классическими граничными условиями на границе $\partial\Omega$. Была описана связь асимптотических вопросов с задачами геометрии геодезических метрик $ds^2 = \sum_{i,j} a_{ij}(x)dx^i dx^j$ и обсуждены механизмы формирования асимптотических серий в спектре внутренних задач. Более подробно для внутренних задач были рассмотрены геометрические основания известных асимптотических разложений вида

$$\mathscr{D}(z) \sim \sum_{p \geqslant 0} d_p \left(e^{-i\pi} z\right)^{\frac{n}{2} - l - 1 - \frac{p}{2}}, \qquad \mathscr{D}(z) = \operatorname{Tr} R^{l+1}(z), \tag{1}$$

где $R(z) = (-\mathscr{L} - z)^{-1}$, $l = [n/2]$, при $z \to \infty$ вне спектра оператора $\mathscr{L}$: $\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Если Ω — внешность ограниченной замкнутой строго выпуклой гладкой гиперповерхности, коэффициенты a^{ij} постоянны, а b^i и c достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности, то подобным же разложением обладает регуляризованный след

$$\mathscr{D}(z) = \operatorname{Tr}\left[R^{l+1}(z) - R_0^{l+1}(z)\right],$$

в котором $R_0(z)$ — резольвента оператора $\mathscr{L}_0 = \sum_{i,j} a^{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ на R^n. Операторы $R(z)$ и $R_0(z)$ действуют в разных пространствах. След Tr следует истолковывать как след интегрального оператора, в первом члене следует интегрировать по Ω, во втором — по R^n, вне какого-либо компакта интегралы следует объединить. Функция $\mathscr{D}$ на этот раз имеет гладкие предельные значения на непрерывном спектре, т. е. при $z \to \lambda \pm i0, \lambda > 0$; асимптотическое разложение вида (1) при $z \to \infty$ справедливо плоть до непрерывного спектра: $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - 0$. Хотя процедура последовательного построения коэффициентов d_p для внешних областей остается, так же как и для внутренних, локальной, доказательство того, что в асимптотике вида (1) можно выйти на непрерывный спектр, по своему характеру существенно нелокально.

В качестве следствия обсуждались спектральные тождества

$$\sum_m \lambda_m^p - \frac{p}{2\pi}\int_0^\infty \left[\sigma(\lambda) - \sum_{q=0}^{2l+2p+1} \sigma_q \lambda^{l+\frac{1}{2}-\frac{q}{2}}\right] \lambda^{p-1}\, d\lambda = t_p,$$

λ_m — собственные значения оператора $\mathscr{L}$, $\sigma(\lambda) = -i \ln \det s(\lambda)$, $s(\lambda)$ — матрица рассеяния, p — произвольное натуральное число, коэффициенты σ_q и t_p выражены явно через d_p и число N собственных значений оператора $\mathscr{L}$. Функцию σ можно при некоторых оговорках нормировать условием $\sigma(+0) = 0$. Тогда, в частности, при $\Omega = R^n$, $b^i = 0$, $p=1$ и $n=2$

$$\sum \lambda_m - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\sigma(\lambda) + 2\pi N + \frac{1}{2}\int dx\, c(x)\right] d\lambda = -\frac{1}{8\pi}\int dx c^2(x),$$

при $n=3$

$$\sum \lambda_m - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\sigma(\lambda) + 2\pi N + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int dx c(x) - \frac{1}{8\pi\sqrt{\lambda}}\int dx c^2(x)\right] d\lambda = 0.$$

Заседание 9 марта 1976 г.

1. Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллер «Выпуклые множества в римановых пространствах неотрицательной кривизны».

Строение в целом римановых многообразий неотрицательной кривизны изучено неполно. Для замкнутых многообразий существуют лишь отдельные важные результаты. Для полных незамкнутых многообразий в последние годы получены существенные продвижения, опирающиеся на изучение выпуклых множеств в таких пространствах. В докладе изложены результаты и описаны конструкции, которые позволили это сделать.

2. Обсуждение работ по математике, выдвинутых на соискание Ленинской премии 1976 г.

Заседание 23 марта 1976 г.

1. С. М. Ермаков «О математических задачах, связанных с методом Монте-Карло».

Пусть $\mathscr{E} = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел из $(0, 1)$, определяемых равенством $\varepsilon_{n+1} = \text{Др}(M\varepsilon_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где Др(a) означает дробную долю числа a, $M \gg 2$ целое. Пусть также $\mathscr{N}$ — конечное множество из k натуральных чисел, превосходящих натуральное N_0, а $\mathscr{F}$ — конечное множество из m интегрируемых по Риману в единичном s-мерном гиперкубе K_s функций. Обозначим через $X_i = (\varepsilon_{is}, \ldots, \varepsilon_{i(s+1)})$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. На основе предельных теорем для сумм вида $N^{-1}\sum_{i=0}^{N-1} f(X_i)$, $f \in \mathscr{F}$ можно доказать следующее утверждение.

При достаточно больших фиксированных N_0 и M и любых фиксированных $\mathscr{N}$ и $\mathscr{F}$ существует такое ε_0, что для каждой f из $\mathscr{F}$ и каждого N из $\mathscr{N}$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{K_s} f(X)\, dX - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(X_i)\right| \leqslant \frac{c\sigma_f}{\sqrt{N}},$$

где $\sigma_f = \left(\int_{K_s} f^2(x)\, dx - \left(\int_{K_s} f(x)\, dx\right)^2\right)^{1/2}$, $c > 0$ — константа, зависящая лишь от k и m.

Можно показать также, что этот результат остается справедливым, когда вычисления по формуле $\varepsilon_{n+1} = \text{Др}(M\varepsilon_n)$ производятся с конечным фиксированным, но достаточно большим числом знаков. В этом последнем случае последовательность $\mathscr{E}$ будет последовательностью псевдослучайных чисел, получаемых с помощью так называемого «метода сравнений» и полученный результат является детерминистским обоснованием метода Монте-Карло для конкретного способа построения псевдослучайных чисел.

Значительный интерес представляет задача конструирования ε_0 по заданному $\mathscr{N}$ и $\mathscr{F}$ и задача изучения с этой точки зрения других методов конструирования псевдослучайных последовательностей.

2. Прием в члены Общества — Андреев А. Ф., Лодкин А. А., Пилюгин С. Ю., Суслин А. А., Чернышев В. Е.

Заседание 13 апреля 1976 г.

1. Б. А. Розенфельд (Москва) «150 лет геометрии Н. И. Лобачевского».

Заседание 27 апреля 1976 г.

1. А. С. Дынин (Москва) «Псевдодифференциальные операторы на группах Ли».

С помощью группового преобразования Фурье и метода квантования Г. Вейля удается построить теорию псевдодифференциальных операторов на нильпотентных группах Ли. В случае группы Гейзенберга эти построения позволяют развить специальную «эллиптическую» теорию для многообразий с контактной структурой, в частности, для строго псевдовыпуклых многообразий.

2. Прием в члены Общества — Жубр А. В., Элиашберг Я. М.

Заседание 11 мая 1976 г.

1. О плане выпуска математической литературы издательством «Мир» на ближайшие годы. Сообщение представителя издательства «Мир» А. С. Попова (Москва).

2. Присуждение премий ЛМО молодому математику за 1976 г.

Премии присуждены: 1) Цирельсону Борису Симоновичу за цикл работ по теории вероятностей и смежным вопросам, 2) Дынькину Евсею Мордуховичу за цикл работ, посвященный свойствам решений неоднородной системы Коши — Римана.

3. Отчет правления ЛМО и ревизионной комиссии.

4. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

В правление Ленинградского математического общества выбраны:

1. С. М. Лозинский (президент).
2. Б. З. Вулих (вице-президент).
3. О. А. Ладыженская (вице-президент).
4. А. М. Вершик (председатель программной комиссии).
5. И. А. Ибрагимов.
6. С. Г. Михлин.
7. Г. И. Натансон (ученый секретарь).
8. М. З. Соломяк.
9. В. Н. Судаков (казначей).
10. В. П. Хавин.

В состав ревизионной комиссии избраны:

1. В. П. Ильин (председатель).
2. Н. К. Никольский.
3. В. Л. Файншмидт.

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ [1])

Заседание 28 сентября 1976 г.

1. Вручение премий ЛМО молодому математику за 1976 г.

2. Доклады лауреатов премии:

1°. Б. С. Цирельсон «Может ли случайное локальное взаимодействие приводить к коллективному поведению». (О новых результатах в теории случайных автоматов.)

Рассматриваются сети стохастических автоматов или, в другой терминологии, системы взаимодействующих марковских процессов, каждый — с конечным числом состояний и дискретным временем. Определения можно найти в [1] или [2]. Как в [2], и в отличие от [1], мы не предполагаем, что все автоматы устроены одинаково; но, в отличие от [2], здесь предполагается однородность по времени. Центральную роль здесь (как и в [1], [2]) играет условие, что все переходные вероятности (для отдельного автомата, на единицу времени) больше некоторого положительного числа α, которое мы называем показателем невырожденности данной сети. Как показано в [1], такие сети могут быть неэргодичны, если размерность сети $d \geqslant 2$; для $d = 1$ вопрос остается открытым. В теореме, сформулированной ниже, рассматриваются конечные сети размерности 2; автоматы размещены не на всей двумерной решетке, а лишь на квадрате размера $N \times N$. Сеть из конечного числа автоматов, разумеется, эргодична (при $\alpha > 0$); но ее время релаксации может быть экспоненциально большим по $N \to \infty$ при фиксированном α, фиксированном числе состояний автомата n и фиксированном радиусе взаимодействия r. Это, конечно, свидетельствует о коллективном поведении автоматов. Следующая теорема показывает, что у такой сети метастабильные состояния не только могут существовать, но их может быть много. Сети, существование которых утверждается в теореме, имеют $r = \sqrt{2}$, $n = 2$, т. е. каждый автомат имеет два состояния — 0 и 1, и переходные вероятности инвариантны относительно замены состояний — 0 на 1, а 1 на 0. (К сожалению, в [2] автор не указал, что в теоремах 1 и 2 имеются ввиду сети, обладающие такой инвариантностью, из-за чего теорема 1 из [2] оказалась тривиальной.)

Теорема. *При любом N существует система $\mathcal{A}_N$ вышеописанного вида, размера $N \times N$, с показателем невырожденности $\alpha \geqslant c_0$, которая может надежно хранить $c_1 N$ единиц информации в течение времени* $\exp\ (c_2 N^{c_3})$; *здесь c_0, c_1, c_2, c_3 — положительные абсолютные константы. Более точно, выполнено следующее. Пусть S обозначает множество всех состояний системы $\mathcal{A}_N$, и пусть K — конечное множество, содержащее не более чем $\exp(c_1 N)$ элементов. Тогда существуют отображение $\mathcal{C}$: $K \to S$ (кодирование) и набор отображений $\mathcal{D}_t : S \to K$ (декодирование) такие, что*

$$\mathrm{P}\{\mathcal{D}_t(s(t)) = k \mid s(0) = \mathcal{C}(k)\} \geqslant 1 - t \exp\ (-c_2 N^{c_3})$$

для любых $k \in K$ и $t = 1, 2, \ldots$; здесь $s(t)$ обозначает состояние системы $\mathcal{A}_N$ в момент t. Кроме того, $\mathcal{D}_{t+N} = \mathcal{D}_t$ при всех t.

---

[1]) См. УМН 32:1 (1977).

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Тоом, Неэргодичные многомерные системы автоматов, Проблемы передачи информации 10:3 (1974), 70—79.

[2] Б. С. Цирельсон, Неоднородное локальное взаимодействие может создать «дальний порядок» в одномерной системе, Резюме доклада, Теория вероятн. и ее применения 21:3 (1976), 681—683.

2°. Е. М. Дынькин «Оператор Фабера». (Сохранение гладкости при конформном отображении.)

Пусть G_1, G_2 — две плоские области с достаточно регулярной (например, кусочно-гладкой) границей, φ: $C\setminus G_2 \to C\setminus G_1$, $\varphi(\infty)=\infty$,— конформное отображение, w — аналитическая функция в $C\setminus G_2$. Оператор Фабера $T(\varphi, w)$ переводит функцию f, аналитическую и (например) ограниченную в G_1 в функцию Tf, аналитическую в G_2, по формуле

$$Tf(z)=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\partial G_2} f[\varphi(\zeta)]\,w(\zeta)\,(\zeta-z)^{-1}\,d\zeta,\qquad z\in G_2.$$

Обсуждается свойство оператора T сохранять гладкость вплоть до границы функции f почти при любых φ, w. Например, многочлены всегда переходят в многочлены той же степени. Если G_1 и G_2 совпадают с единичным кругом D, а w — «внутренняя» функция, то это свойство оператора T означает сохранение гладкости при канонической факторизации функций.

Рассматривается связь оператора Фабера с псевдоаналитическим продолжением гладких функций. Такая связь позволяет полностью описать действие оператора на различные классические функциональные пространства. Следующие три примера рассмотрены более подробно.

1) При $w=\varphi'^{-s}$, $s>0$, оператор T переводит пространство $A^s(G_1)$ в $A^s(G_2)$, где $A^s(G)$ — пространство аналитических в G функций, удовлетворяющих в $\overline{G}$ условию Гёльдера порядка s (с обычной модификацией при $s\geqslant 1$). В частности, банаховы пространства $A^s(G)$ при разных G изоморфны.

2) При $w=\varphi'^{\frac{1}{p}-l}$, l — целое, $1<p<\infty$, оператор T переводит пространство $E_p^l(G_1)$ в $E_p^l(G_2)$, где $E_p^l(G)$ — пространство аналитических в G функций, у которых производная порядка l входит в класс Смирнова $E^p(G)$. В частности, и эти пространства при разных G изоморфны.

3) Образ пространства $A^s(D)$ под действием классического оператора Фабера ($w=1$) может быть описан с помощью наилучших приближений многочленами или локальных модулей гладкости.

В заключение обсуждалась гипотеза о том, что зависимость изоморфизмов от s и l в примерах 1) и 2) не случайна и что шкалы банаховых пространств $\{A^s(G)\}_{s<0}$ уже не являются изоморфными в целом в существенно разных областях, например, в треугольнике и в круге.

3. Прием в члены ЛМО — Б. С. Цирельсон.

Заседание 12 октября 1976 г.

1. С. С. Кутателадзе (Новосибирск) «Полуупорядоченные пространства в выпуклом анализе».

В докладе на примере теории выпуклых экстремальных задач пояснено, почему теория полуупорядоченных векторных пространств служит технической базой развития выпуклого анализа. В частности, выведена новая основная формула для вычисления субдифференциалов суперпозиций выпуклых операторов, играющая в выпуклом анализе роль, аналогичную роли формулы для дифференциала суперпозиции в дифференциальном исчислении. Полученная формула применялась к нахождению критериев оптимальности по Парето и критериев идеального оптимума в задачах многоцелевого программирования.

2. Прием в члены ЛМО — С. В. Керов, А. Н. Лившиц.

Заседание 16 ноября 1976 г.

Математический лекторий для студентов.

1. В. П. Хавин «Что такое проблема короны?».

Проблема короны состоит в том, чтобы доказать плотность круга в некотором специальном топологическом пространстве. Возникнув в связи исследованием алгебр аналитических функций, она потребовала разработки новых средств анализа. Решение ее было дано Л. Карлесоном 15 лет назад но некоторые связанные с ней вопросы остаются открытыми.

Заседание 30 ноября 1976 г.

1. Ч. Стейн (США, Станфорд) «Метод аппроксимации вероятностных распределений».

Рассматривается аппроксимация вероятностных распределений, связанная с новым способом обработки наблюдений стационарной случайной последовательности. Полученные результаты применяются к комбинаторной задаче об асимптотике числа латинских прямоугольников; рассказано об обобщениях теорем Эрдеша и Капланского.

2. Прием в члены ЛМО — А. В. Бухвалов, А. М. Рубинов.

Заседание 14 декабря 1976 г.

1. А. А. Суслин «Проблема Серра и близкие вопросы».

Поставленный в 1955 г. Ж. П. Серром вопрос о структуре некоторых модулей над кольцом многочленов оказался тесно связанным со многими интересными проблемами алгебры, алгебраической геометрии, K-теории и др. В докладе рассказано о решении проблемы Серра, данным в 1976 г. независимо Д. Квилленом и докладчиком, и о ее связях.

Заседание 28 декабря 1976 г.

1. А. Д. Александров (Новосибирск) «Относительность, причинность, конформность».

Общий взгляд на хроногеометрию; основы теории относительности и конформные отображения областей псевдоевклидовых и конформных пространств.

Заседание 15 марта 1977 г.

1. В. А. Солонников «Математический анализ некоторых задач гидродинамики».

Математический анализ краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Навье — Стокса, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости, является одним из актуальных и интенсивно развивающихся направлений современной математической физики и опирается на самые современные математические методы. В докладе рассказано о некоторых работах последнего времени в этой области.

Заседание 29 марта 1977 г.

Математический лекторий для студентов.

1. С. Г. Михлин «Сингулярные интегральные операторы».

Сингулярные интегральные операторы (СИО) первоначально появились в теории функций комплексной переменной. С теорией СИО связана интересная и разнообразная проблематика. Исследование этой проблематики потребовало применения современных средств функционального анализа и топологии и в большой степени стимулировало их развитие. Синтез двух теорий — дифференциальных операторов и СИО — привел к созданию новой, богатой идеями и результатами, теории псевдодифференциальных операторов.

Заседание 12 апреля 1977 г.

1. Б. С. Павлов «Функциональная модель и спектральное разложение диссипативного оператора».

Оператор в гильбертовом пространстве называется диссипативным, если его мнимая компонента отрицательна. Любой такой оператор можно продолжить до самосопряженного оператора в более широком пространстве. Во многих интересных случаях такое продолжение («дилатация») строится явно, что позволяет провести полный спектральный анализ исходного оператора средствами теории функций.

Заседание 26 апреля 1977 г.

Заседание посвящено памяти Григория Яковлевича Лозановского (29.11.1937 — 17.11.1976).

1. Ю. А. Абрамович, А. В. Бухвалов, А. И. Векслер «О научных работах Г. Я. Лозановского».

2. Выступления с воспоминаниями о Г. Я. Лозановском.

Заседание 17 мая 1977 г.

1. С. А. Молчанов (Москва) «Спектральные свойства случайных операторов Шрёдингера».

В докладе изложены основные факты спектральной теории одномерных операторов Шрёдингера со случайным стационарным потенциалом и сделан обзор примыкающих сюда результатов. В частности, рассказано о некоторых приложениях к изучению физических свойств неупорядоченных структур.

2. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1977 год.

Премия присуждена:

1) А. А. Суслину за цикл работ, посвященных решению проблемы Ж. П. Серра

2) М. Д. Стерлину за цикл работ по оценкам постоянных в обратных теоремах конструктивной теории функций.

3. Прием в члены ЛМО — Ю. А. Абрамович.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ [1])

Заседание 27 сентября 1977 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1977 г.
2. Доклады лауреатов премии ЛМО молодому математику за 1977 г.

1°. А. А. Суслин «О сокращении для проективных модулей».

Рассматривается, каким условиям должно удовлетворять поле, чтобы конечно порожденные проективные модули над аффинными алгебрами над этим полем удовлетворяли усиленному условию сокращения.

2°. М. Д. Стерлин «Об экстремальных задачах, связанных с обратными теоремами теории приближения».

Рассматривается поставленный С. Н. Бернштейном в 1912 г. вопрос уточнения обратных теорем. Пусть μ — положительная борелевская мера на оси; пространства $\hat{L}^p_\mu$, модули гладкости $\omega_k(h, f)$ и наилучшие приближения $A_\sigma(f)$ определены в [1], с. 547, $0 \leqslant \gamma(\sigma) \downarrow$,

$$\mathfrak{N}(\gamma) = \{f \in \hat{L}^p_\mu \mid A_\sigma(f) \leqslant \gamma(\sigma),\ \sigma > 0\};\ h > 0.$$

Теорема 1. $\sup\limits_{f \in \mathfrak{N}(\gamma)} \omega_k(h, f) = 2^k \left[\int\limits_0^{\pi/2} \gamma^p(2t/h)\, d \sin^{pk} t\right]^{1/p}$.

Приведен аналог для полиномиальных приближений. Описаны экстремальные функции. Указаны следствия для степенных мажорант.

Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ — его подпространства $\overline{\bigcup X_n} = X$; наилучшие приближения $E_n(f) = \inf\limits_{f_n \in X_n} \| f - f_n \|$; $0 \leqslant \alpha_n \downarrow$, $\mathfrak{M}(\alpha) = \{f \in X \mid E_n(f) \leqslant \alpha_n\}$.

Теорема 2. *Для $F \in X^*$, $F(X_0) = \{0\}$ справедливы оценки:*

$$\Sigma \leqslant \sup_{f \in \mathfrak{M}(\alpha)} |F(\alpha)| \leqslant (1 + \sqrt{2})^2\, \Sigma,$$

где

$$\Sigma = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (N_{n+1} - N_n) \qquad N_n = \| F |_{X_n} \|_{X_n^*}.$$

Оценка снизу при $\alpha_n \equiv \alpha_0$ обращается в тождество. Константа $(1 + \sqrt{2})^2$ не может быть уменьшена.

Дано обобщение на полуаддитивные положительно однородные функционалы F. Приведен континуальный вариант. В пространстве функций на оси вычислены с

[1]) См. УМН 33:1 (1978).

точностью до множителя $(1+\sqrt{2})^2$ величины типа $\overline{\omega}_k(\alpha, h)_X = \sup_{f\in\mathfrak{M}(\alpha)} \omega_k(h, f)_X$. Среди содержащих тригонометрические полиномы пространств функций периода 2π с трансляционно инвариантной нормой найдены экстремальные: $\overline{\omega}_k(\alpha, h)_{\hat{l}^\infty} \leqslant \overline{\omega}_k(\alpha, h)_X \leqslant \leqslant \overline{\omega}_k(\alpha, h)_{\widetilde{C}}$ ($\hat{l}^\infty$ — пространство функций с ограниченной последовательностью коэффициентов Фурье, $\widetilde{C}$ — пространство непрерывных функций). Такие оценки характерны для большинства рассматриваемых задач и для точных констант в обратных теоремах. Вычислены нижние границы оценок. Результаты перенесены на $\omega_k(h, f^{(r)})$ ($r > 0$, $k = 0, 1, \ldots$).

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Д. Стерлин, Точные постоянные в обратных теоремах теории приближений, ДАН 202:3 (1972), 545—547.

Заседание 11 октября 1977 г.

1. А. Г. Кушниренко (Москва) «Многогранники Ньютона».

Последние работы участников и руководителя семинара В. И. Арнольда подтверждают справедливость следующего принципа: всякий разумный инвариант одного или нескольких многочленов от многих переменных достаточно просто выражается через многогранники Ньютона этих многочленов.

В докладе рассказано о нескольких теоремах, ярко иллюстрирующих этот принцип, в частности о «многогранной» теореме Безу.

Заседание 25 октября 1977 г.

Математический лекторий для студентов.

1. О. Я. Виро «Элементарные проблемы о вещественных алгебраических кривых».

Как может выглядеть кривая, определяемая на плоскости алгебраическим уравнением степени M? Полный ответ на этот классический вопрос известен лишь для M, не превосходящих шести. В недавних работах Арнольда, Рохлина и Харламова средствами алгебраической топологии были получены сильные результаты о том, какими не могут быть кривые данной степени. Насколько полны эти ограничения, неизвестно. Все имеющиеся примеры построены элементарными методами.

Заседания 22 ноября и 6 декабря 1977 г.

Заседание Ленинградского математического общества, посвященное тридцатилетию работы общегородского научно-исследовательского семинара по математической физике имени В. И. Смирнова.

1. О. А. Ладыженская «Об истории семинара им. В. И. Смирнова».
2. Г. И. Петрашень, В. М. Бабич «Математическая теория дифракции».
3. М. Ш. Бирман «Спектральные задачи математической физики».
4. В. Г. Мазья «Теория псевдодифференциальных операторов».
5. О. А. Ладыженская «Нелинейные задачи математической физики».
6. Прием в члены ЛМО — Булдырев В. С., Павлов Б. С., Харламов В. М., Стерлин М. Д., Благовещенский А. С., Иванов А. В., Дейч В. Г., Розенблюм Г. В., Яфаев Д. Р., Коплиенко Л. С.

Заседание 13 декабря 1977 г.

1. А. Н. Тюрин (Москва) «Обобщенные π-функции Вейерштрасса и многообразие модулей оснащенных римановых поверхностей».

Рассказано о применении алгебраической геометрии к теории интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений на римановых поверхностях.

Заседание 27 декабря 1977 г.

1. Ю. И. Манин (Москва) «Поля Янга — Миллса и алгебраическая геометрия». Доклад посвящен полученным недавно результатам по применению алгебро-геометрических методов к уравнениям теоретической физики. Эти методы позволили полностью описать так называемые многоинстантонные решения уравнений Янга — Миллса.

Заседание 14 февраля 1978 г.

Математический лекторий для студентов.

1. Д. К. Фаддеев «Соответствия Галуа».

Абстрактная форма соответствий Галуа описана Г. Биркгофом в связи с теорией структур. Цель лекции — рассказ о различных ситуациях, в которых возникают соответствия Галуа, главным образом в связи с теорией выпуклых тел и выпуклых многогранников.

Заседание 21 февраля 1978 г.

1. М. А. Шубин (Москва) «Новые аспекты теории индекса эллиптических операторов».

Классическая теория индекса состоит в вычислении разности размерностей ядра и коядра эллиптического оператора на компактном многообразии. В последние годы она была распространена на ряд ситуаций, когда индекс естественно считать вещественным числом, функцией или даже обобщенной функцией (операторы с почти периодическими и случайными коэффициентами, трансверсально эллиптические операторы и т. п.). В докладе рассказано об этих обобщениях в основном с аналитической точки зрения.

2. Прием в члены ЛМО — В. М. Рябов.

Заседание 14 марта 1978 г.

1. Л. А. Халфин «Современное состояние проблемы математического обоснования статистической физики».

Обсуждается классическая проблема (она была поставлена Л. Больцманом более 100 лет тому назад): можно или нет получить из обратимых во времени уравнений динамической теории описание согласно аксиом статистической физики, т. е. получить описание необратимых во времени кинетических процессов с характерным монотонным (закон возрастания энтропии) стремлением к равновесному состоянию. При этом, в случае положительного решения проблемы, необходимо также вычислить из динамических уравнений кинетические коэффициенты переноса, т. е. константы необратимых уравнений статистической физики (такие, как коэффициент теплопроводности, коэффициент вязкости (в уравнении Навье — Стокса) и так далее).

В отличие от эргодической теории, которая исследует эту проблему с точки зрения классической механики, обсуждается исследование проблемы обоснования статистической физики, исходя из квантовой теории (это направление ведет свое начало с известных работ В. Паули, Л. Ван-Хова, И. Пригожина и других). В частности, обсуждается предложенное автором (Л. Халфин, 1963 г.) исследование этой проблемы с помощью методов квантовой теории распада, которая указывает способ описания необратимых эффектов в рамках обратимой во времени квантовой теории.

Оказывается, что, строго говоря, предсказания статистической физики из квантовой теории не следуют (несправедлива эргодическая теорема, имеются эффекты «бесконечной» памяти, несправедливо марковское master-equation, Ван-Хова и т. п.). Однако главный член эволюции во времени, который следует из квантовой теории, приводит к предсказаниям статистической физики. Таким образом, статистическая физика является достаточно хорошим приближением в рамках квантовой теории. Члены в эволюции, которые обусловливают отклонения в рамках квантовой теории от предсказаний статистической физики, соответствуют неэкспоненциальным членам квантовой теории распада, обнаруженным автором более 20 лет тому назад (Л. Халфин, 1957 г.). Приводится первое доказательство знаменитой H-теоремы Л. Больцмана непосредственно в терминах квантовой динамической системы (Л. Халфин, 1977 г.). Обнаружено, что при достаточно произвольных начальных условиях существует конечный интервал времени (при достаточно больших временах, близких к равновесию), в котором нарушается H-теорема Л. Больцмана, так что в этом конечном интервале времени производная по времени энтропии меняет знак. Этот эффект приводит к образованию на конечное время «порядка» из «хаоса».

Обнаруженные недавно расходимости кинетических коэффициентов (так, например, не существует коэффициента вязкости для двумерного уравнения Навье — Стокса) соответствуют обнаруженным ранее неэкспоненциальным членам в асимптотике (при больших временах) функций корреляции.

2. Прием в члены ЛМО — С. В. Хрущев.

Заседание 28 марта 1978 г.

1. Л. Н. Гордеев «О предикативных и конструктивных вариантах теории множеств».

Рассказана история развития предикативных вариантов теории множеств, восходящих к Б. Расселу и Г. Вейлю (в них рассматриваются лишь множества, индивидуально описываемые выражениями некоторого языка). После этого изложен новый предикативный вариант канторовской теории множеств, согласованный с принципами конструктивного направления в математике и обладающий рядом преимуществ перед известными.

2. Прием в члены ЛМО — А. О. Слисенко.

Заседание 11 апреля 1978 г.

1. Г. А. Маргулис (Москва) «Дискретные подгруппы групп Ли».

В докладе рассказано о некоторых новых результатах в теории дискретных подгрупп, в частности, теорема о конечности для широкого класса фактор-групп дискретных подгрупп. Доказательство этой теоремы основывается на результатах из теории меры и из теории представлений. Рассказано также о применении полученных результатов к изучению «абстрактных» алгебраических групп над числовыми полями и других приложениях.

Заседание 25 апреля 1978 г.

1. С. И. Адян (Москва) «Классификации периодических слов и их приложения».

Классификации периодических слов по рангам вместе с сопровождающей их теорией преобразований периодических слов впервые появились в 1968 г. в совместной работе П. С. Новикова и докладчика по проблеме Бернсайда. Различные модификации этой теории были использованы как для изучения свойств периодических групп, так и для построения новых групп с теми или иными интересными свойствами.

В докладе дан обзор результатов, полученных в этом направлении.

2. Прием в члены ЛМО — В. П. Оревков.

Заседание 16 мая 1978 г.

Математический лекторий для студентов.

1. Ю. В. Матиясевич «О работе по проблеме 4-х красок».

Рассказано о недавней работе американских математиков К. Аппеля и В. Хакена, которые, используя ЭВМ, дали положительное решение известной проблемы четырех красок.

1980 г. январь—февраль *т. 35, вып. 1(211)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ [1])

Заседание 31 октября 1978 г.

1. Информация издательства «Мир» о планах на 1979—1980 гг.

2. Присуждение премий ЛМО за 1978 г. молодому математику.

Премии присуждены Л. Н. Гордееву за цикл работ по конструктивным моделям классической теории множеств; С. В. Хрущёву за цикл работ по теории функций.

3. Отчет правления ЛМО и ревизионной комиссии.

4. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

В правление Ленинградского математического общества избраны: С. М. Лозинский — президент, О. А. Ладыженская — вице-президент, А. М. Вершик — вице-президент.

Члены правления ЛМО:

З. И. Боревич, О. Я. Виро — математический лекторий для студентов, С. М. Ермаков, И. А. Ибрагимов, С. Г. Михлин, Г. И. Натансон — ученый секретарь, М. З. Соломяк — програмная комиссия, В. Н. Судаков — казначей, С. В. Хрущёв.

Члены ревизионной комиссии:

В. П. Ильин — председатель, Н. К. Никольский, В. Н. Фомин, В. П. Хавин.

Заседание 14 ноября 1978 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1978 г.

2. Доклады лауреатов премии

а) Л. Н. Гордеев «О конструктивных моделях классической теории множеств»;

б) С. В. Хрущёв «Старые и новые теоремы о рядах Фурье».

Заседание 28 ноября 1978 г.

1. В. Я. Иврий (Магнитогорск) «Распространение особенностей решений волнового уравнения вблизи границы».

Распространение особенностей вблизи границы, на которой заданы условия, удовлетворяющие критерию Шапиро — Лопатинского, происходит по оптическим путям. При нарушении этого критерия появляются новые возможности для распространения особенностей. При дифракции на угловых точках гладкость решений повышается на 1/2.

Заседание 12 декабря 1978 г.

Математический лекторий для студентов.

1. В. А. Рохлин «Целочисленные квадратичные формы и четырехмерные многообразия».

Заседание 26 декабря 1978 г.

1. В. И. Арнольд (Москва) «Краевые особенности».

Классификация простейших критических точек функций связана с простыми алгебрами Ли типа A, D, E. Оказывается, классификация критических точек функций на многообразиях с краем связана алгебрами Ли серий B, C, F, т. е. с диаграммами Дынкина с кратными ребрами.

---

[1]) См. УМН 33:6 (1978), 241—244.

В докладе рассказано об этой связи и о ее применении, в частности, в задачах геометрической оптики.

Заседание 27 февраля 1979 г.

1. В. Ф. Лазуткин «Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа».

1°. Рассмотрим оператор Бельтрами — Лапласа на компактном римановом многообразии M. Если у M есть край, то поставим на нем для определенности нулевые граничные условия. Как выглядят собственные функции оператора, отвечающие бо́льшим собственным числам? Можно ли приближенно вычислить их и бо́льшие собственные числа, зная геометрию многообразия M? Эта задача тривиальна в случае $\dim M = 1$. Однако уже в случае $\dim M = 2$ возникают значительные трудности. Цель доклада — дать представление о возникающих здесь проблемах на примере оператора Лапласа Δ в выпуклой области $M \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей.

2°. Квазимодами порядка ν называются последовательности пар $\{U_k, \lambda_k\}$, где функции U_k принадлежат области определения оператора Δ, λ_k — числа, $\lambda_k \to +\infty$ такие, что: 1) $\| U_k \| \geqslant c^{-1}$, 2) $\| \Delta U_k + \lambda_k U_k \| \leqslant c\lambda_k^{-\nu/2}$.

Если $\{U_k, \lambda_k\}$ — квазимоды, то можно сделать определенные заключения о близости чисел λ_k к собственным числам $-\Delta$ и функций U_k к собственным функциям $-\Delta$. В частности, существует собственное число $\widetilde{\lambda}_{n_k}$ такое, что $| \lambda_k - \widetilde{\lambda}_{n_k} | \leqslant c^2\lambda_k^{-\nu/2}$.

3°. Строить квазимоды можно, опираясь на изучение геодезического потока на M. В случае выпуклой области в $\mathbb{R}^2$ — это биллиард в области M.

4°. Периодической траектории общего эллиптического типа биллиарда сопоставляются квазимоды, сосредоточенные в окрестности этой траектории. В области общего вида существует бесконечное число таких периодических траекторий.

5°. Помимо периодических траекторий в фазовом пространстве произвольного выпуклого биллиарда всегда есть инвариантные множества положительной меры, называемые «семействами инвариантных торов» (далее с. и. т.). С. и. т. гомеоморфно $S^1 \times S^1 \times E$, где S^1 — окружность, E — канторово множество положительной меры, получающееся из отрезка выбрасыванием окрестностей рациональных точек. Геодезический поток на с. и. т. сопряжен потоку $\xi = \omega_1 t$, $\eta = \omega_2 t$, $\zeta = \mathrm{const}$, $\omega_1/\omega_2 = \zeta$ на $S^1 \times S^1 \times E$.

С. и. т. возникают в окрестности периодической траектории общего эллиптического типа и в окрестности периодической траектории, соответствующей движению точки по краю M.

6°. С с. и. т. можно связать квазимоды $\{U_{pq}, \lambda_{pq}\}$, где пара (p, q) пробегает некоторое бесконечное подмножество Λ целочисленной решетки $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, отбираемое с помощью приближенных условий квантования. Обозначим через $N^*(\lambda)$ число собственных чисел аппроксимируемой этими квазимодами части спектра оператора Лапласа в интервале $(0, \lambda)$. Имеет место формула

$$N^*(\lambda) = \frac{\text{Инвариантная мера с. и. т.}}{8\pi^2}\lambda + O(\lambda^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Число $\varepsilon > 0$ зависит от с. и. т. и может быть сделано сколь угодно малым за счет увеличения с. и. т.

7°. Нерешенной задачей является исследование инвариантных множеств в щелях с. и. т. и построение квазимод, им отвечающих.

2. Прием в члены ЛМО — Востоков С. В., Кисляков С. В., Пеллер В. В.

Заседание 27 марта 1979 г.

1. М. И. Кадец (Харьков) «Лемма Штейница и ее применения».

В конечномерном пространстве рассматривается задача о минимизации диаметра замкнутой векторной ломаной за счет перестановки ее звеньев (лемма Штейница). Традиционное применение леммы — к условно сходящимся рядам. Новое применение — к задачам календарного планирования.

Заседание 10 апреля 1979 г.

1. Ю. А. Брудный (Ярославль) «Интерполяционные функторы».

В теории интерполяции линейных пространств важное место занимает задача конструктивного описания интерполяционных функторов (методов интерполяции). В докладе рассказано о результатах, дающих полное описание функторов нелинейной интерполяции и частичное описание — в линейном и квазилинейном случаях. Следствия этих результатов охватывают обширную часть интерполяционной теории.

Заседание 17 апреля 1979 г.

1. А. В. Ройтер (Киев) «Классификационные задачи линейной алгебры».

Линейные классификационные задачи, возникающие в самых разнообразных областях математики, имеют много общих черт. В зависимости от мощности множества неразложимых решений они разбиваются на задачи конечного и бесконечного типов. В свою очередь среди задач бесконечного типа выделяются «ручные», для которых удается описать все неразложимые решения, и «дикие», для которых решение было бы равносильно решению классической проблемы о приведении пары квадратных матриц к диагональному виду одним и тем же преобразованием подобия.

Заседание 22 мая 1979 г.

1. А. В. Бухвалов «Банаховы пространства измеримых векторнозначных функций».

Доклад посвящен изложению последних результатов о геометрической структуре пространств функций со значениями в банаховом пространстве (БП) X и о непрерывности операторов (в частности, сингулярных интегральных операторов) в пространствах вектор-функций. Были указаны приложения к векторнозначным аналогам пространств Соболева. Приведен ряд нерешенных проблем. Сформулируем их.

Пусть E — банахово идеальное пространство на пространстве с мерой (T, Σ, μ) (т. е. $(|e_1| \leqslant |e_2|,\ e_1 \in S(T, \Sigma, \mu),\ e_2 \in E) \Rightarrow (e_1 \in E,\ \|e_1\| \leqslant \|e_2\|)$. Через $E(X)$ обозначается БП всех измеримых функций $z\colon T \to X$ таких, что $\|r(\cdot)\|_X \in E$, с нормой $\|z\| = \|\,\|z(\cdot)\|_X\,\|_E$.

1) Верно ли, что $E(X)$ слабо секвенциально полно тогда и только тогда, когда E и X слабо секвенциально полны? Ответ неизвестен и при $E = L^p$, $1 \leqslant p < \infty$.

2) Верно ли, что l^1 нельзя изоморфно вложить в $E(X)$ тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладают E и X? При $E = L^p$ — ответ положительный (Ж. Пизье, 1978 г.). Аналогичный вопрос открыт для свойства Банаха — Сакса.

3) В 1979 г. Р. Алдаус доказал, что если в $L^p((0, 1), X)$ есть безусловный базис, то на X существует эквивалентная равномерно выпуклая норма. Каковы необходимые и достаточные условия существования безусловного базиса в $L^p((0, 1), X)$?

4) Пусть H — одномерный сингулярный интегральный оператор Гильберта в $L^p(-\infty, +\infty)$. Каковы необходимые и достаточные условия непрерывности векторнозначного расширения $\widetilde{H}$ оператора H на $L^p(X)$? Если $\widetilde{H}$ непрерывен, то X B-выпукло (А. В. Бухвалов), т. е. в X нельзя равномерно вложить пространства l^1_n. Верно ли, что из равномерной выпуклости X вытекает непрерывность $\widetilde{H}$?