1980 г. ноябрь-декабрь *т. 35, вып. 6(216)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ [1])

Заседание 2 октября 1979 г.

Совместное заседание Ученого Совета математико-механического факультета ЛГУ и Ленинградского математического общества, посвященное памяти заведующего кафедрой математического анализа, вице-президента ЛМО Бориса Захаровича Вулиха.

1. Д. А. Владимиров «О педагогической деятельности Б. З. Вулиха».
2. А. И. Векслер «О научной деятельности Б. З. Вулиха».
3. Выступления с воспоминаниями о Б. З. Вулихе (С. М. Лозинский, Л. В. Канторович, А. Г. Пинскер, И. А. Егорова).

Заседание 16 октября 1979 г.

1. А. Пелчинский (Варшава) «Свойства аппроксимации, базисы, биортогональные системы и другие аппроксимативные структуры в банаховых пространствах».

Обзор современного состояния проблематики, связанной с различными аппроксимационными структурами банаховых пространств. Обсуждение нерешенных вопросов.

Заседание 30 октября 1979 г.

1. О. Я. Виро «Алгебраические многообразия с предписанными топологическими свойствами».

Изучение топологии вещественных алгебраических многообразий проводилось в двух естественных направлениях: доказывались ограничения на топологию многообразий и существование многообразий, удовлетворяющих этим ограничениям. В последние годы были достигнуты значительные успехи в обоих направлениях. Доклад посвящен обзору результатов, относящихся ко второму из них.

Заседание 20 ноября 1979 г.

1. А. М. Вершик «Функциональные группы Ли: геометрия, анализ, представления».

Теория групп функций со значениями в группах Ли фактически изучалась еще в XIX в. (матрицант — мультипликативный интеграл Вольтерра). Последние 10 лет в основном в связи с задачами теоретической физики (калибровочные поля, группы токов и др.) встал вопрос об изучении нелокальных представлений функциональных групп и, в первую очередь, построения мультипликативного интеграла представлений. Простейший ранний пример такого интеграла в нетривиальной ситуации — фоковское представление функциональной группы Гейзенберга (30-е годы). Переход к нильпотентным и разрешимым группам намечен Араки (1970), который связал этот вопрос с обобщением формулы Леви—

[1]) См. УМН, 1980, 35 : 1, с. 233—235.

Хинчина для положительно определенны функций и с когомологиями группы коэффициентов.

В работах А. М. Вершика, И. М. Гельфанда, М. А. Граева (1973—1974) впервые рассмотрены полупростые группы и проблема неприводимости представления — основная для приложений. Оказалось, что для некоторых полупростых групп ранга 1 ($SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$), в частности $SL(2, \mathbb{R})$ и $SL(2, \mathbb{C})$, можно построить по существу единственный неприводимый инвариантный мультипликативный интеграл представлений, заданный на всех ограниченных измеримых функциях на многообразии со значениями в такой группе. Имеется много реализаций этого представления, наиболее продуктивное — в пространстве L^2-функционалов по гауссовской мере. Основной метод авторов состоит в изучении геометрии окрестности единичного представления (каноническое состояние, когомологии и деформации единичного представления) и применении техники гауссовских мер, что широко использовалось в последующих работах (Гишарде, Делорм, Партасарати — Шмидт, Исмагилов, 1974—1976).

Вложение группы 1-струй функций на римановом многообразии со значениями в компактной простой группе Ли в соответствующее полупрямое произведение и ограничение на образ мультипликативного интеграла, построенного для полупрямого произведения по упомянутому выше образцу, позволяет включить в эту теорию и группы (гладких) функций с компактными коэффициентами и построить для них нелокальные представления (Вершик — Гельфанд — Граев, Исмагилов — 1976). Изучение неприводимости этих представлений оказалось более трудной и интересной задачей, связанной с теорией оператора Лапласа — Бельтрами, тонкими вопросами эквивалентности мер в функциональных пространствах, конструктивной теорией поля. В настоящее время доказана неприводимость этого представления для групп $C^\infty(X; G)$, где G — компактная простая группа Ли и $\dim X = n \geqslant 3$ (Исмагилов: $n \geqslant 5$, Вершик, Гельфанд, Граев: $n \geqslant 4$, Альбеверис — Хег — Крон: $n \geqslant 3$). Последние два автора дали для $n = 1$ реализацию представления, связанную с броуновским движением на группе, и показали недавно его приводимость. По-видимому, это представление при $n = 1$ — фактор-представление типа III_1! Недавно установлена связь этой проблематики с представлениями аффинных алгебр Ли (Леповски — Вильсон, Вершик, Кац — Френкель), а несколько ранее с представлениями групп диффеоморфизмов. Можно ожидать, что построенные представления будут полезны и в физике (киральные поля, модель струны, токи, калибровочные теории), поскольку они являются нетривиальными обобщениями на неабелев случай процедуры вторичного квантования.

Заседание 18 декабря 1979 г.

1. А. Ю. О л ь ш а н с к и й (Москва) «Геометрия определяющих соотношений».

Рассказано о предложенной в 1933 г. ван Кампеном геометрической интерпретации выводимости произвольного соотношения между порождающими элементами группы из соотношений, определяющих эту группу. Такой подход был, в частности, использован недавно докладчиком при решении проблемы О. Ю. Шмидта о существовании бесконечной неабелевой группы, все собственные подгруппы которой конечны, и ряда других задач теории групп.

2. Прием в члены Общества — И. П. Мысовских, А. Х. Гелиг, М. И. Башмаков, Л. Б. Клебанов, Г. А. Леонов.

Заседание 26 февраля 1980 г.

1. С. В. В о с т о к о в «Закон взаимности в арифметике числовых полей».

В сообщении дан исторический обзор и современное состояние проблемы закона взаимности, а также ее связь с арифметикой полей алгебраических чисел.

Проблема закона взаимности состоит в определении явного выражения произведения m-х степенных вычетов $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ через числа α и β поля алгебраических чисел k и сводится к явному заданию символа норменного вычета Гильберта (α, β) степени p^n

(p^n — максимальная степень простого числа p, делящая m) в пополнении $k_{\wp}$ поля k по $\wp$-адической метрике ($\wp$ — простой дивизор поля k, делящий p).

Пусть ζ — первообразный корень степени p^n из 1, содержащийся в $k_{\wp}$, и $z(X)$ — степенной ряд, полученный из разложения корня ζ по степеням локальной униформизирующей π поля $k_{\wp}$ с коэффициентами из кольца целых подполя инерции T поля $k_{\wp}$. Пусть, далее, tr — оператор следа в $k_{\wp}/T$.

Теорема. *Для символа Гильберта имеет место следующее выражение*:

$$(\alpha, \beta) = \zeta^{\mathrm{tr}\,\gamma},$$

где $\gamma = \mathrm{res}\, \Phi_{\alpha,\beta}(X)/s(X)$. При этом степенной ряд $\Phi_{\alpha,\beta}$ получен из разложения элементов α и β по степеням π[1]). Ряд $s(X)$ при $p \neq 2$ равен $z^{p^n} - 1$, а в случае $p = 2$ равен $(z^{2^{n+1}} - 1)/2$.

Во второй части сообщения изложены различные применения закона взаимности к арифметике полей алгебраических чисел и эллиптических кривых.

Заседание 11 марта 1980 г. и 18 марта 1980 г.

Заседание посвящено 100-летию со дня рождения академика С. Н. Бернштейна.

1. С. М. Лозинский. Вступительное слово.

2. В. С. Виденский «Публичные выступления С. Н. Бернштейна».

3. А. Т. Фоменко (Москва) «Проблемы Бернштейна и метод многомерной задачи Плато».

4. О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева «Идеи Бернштейна и новые результаты в теории квазилинейных уравнений».

5. И. А. Ибрагимов «Слабая зависимость случайных величин в работах С. Н. Бернштейна и его последователей».

6. Ю. И. Любич (Харьков) «Работы С. Н. Бернштейна по генетике и генетические алгебры».

7. В. В. Жук, Г. И. Натансон «Проблемы конструктивной теории функций в работах С. Н. Бернштейна».

Заседание 8 апреля 1980 г.

1. С. А. Евдокимов «Мультипликативная арифметика зигелевых модулярных форм и положительно определенные квадратичные формы».

В докладе дан обзор современного состояния арифметической теории модулярных форм Зигеля рода m, включая изложение последних результатов, полученных в этом направлении. Рассказано также о приложениях указанной теории к арифметике положительно определенных целочисленных квадратичных форм, в частности к знаменитой теореме Зигеля.

2. Прием в члены ЛМО — М. А. Семенов-Тянь-Шанский, В. Е. Корепин, А. А. Лаптев, Д. Ю. Григорьев, Г. М. Тащиян, О. И. Рейнов, И. Л. Братчиков.

Заседание 22 апреля 1980 г.

1. С. Г. Гиндикин (г. Москва) «Твисторы Пенроуза, уравнение Эйнштейна и интегральная геометрия».

Классический результат Плюккера — Клейна состоит в том, что многообразие прямых в CP^3 канонически изоморфно квадрике в CP^5. Среди вещественных форм квадрики, помимо многообразия вещественных прямых в RP^3 имеются сфера S^4 и конформная компактификация пространства Минковского M^4. Тем самым оба эти многообразия реализуются как некоторые подмногообразия прямых в CP^3. На этой реализации основывается теория твисторов Пенроуза, в которой различным аналитическим объектам на S^4 и M^4

[1]) Явное выражение для ряда $\Phi_{\alpha,\beta}$ см. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, 148, с. 80.

ставятся в соответствие их эквиваленты в CP^3. При этом безмассовым уравнениям (Максвелла, Дирака — Вейля, линеаризованному уравнению Эйнштейна) отвечают уравнения Коши — Римана, инстантонам — некоторые классы комплексных расслоений и так далее. Указанная реализация обобщается на некоторые четырехмерные метрики переменной кривизны и на этом пути строятся комплексные решения уравнения Эйнштейна. Эти конструкции тесно связаны с интегральной геометрией.

Заседание 13 мая 1980 г.

1. Р. Л. Добрушин (г. Москва) «Кинетические уравнения статистической механики».

Кинетические уравнения — это различные варианты уравнений для статистических характеристик эволюции системы n механических частиц при $n \to \infty$. К ним принадлежат такие известные уравнения, как уравнения Больцмана, Власова, уравнения гидродинамики.

В последние годы началось изучение соответствующих предельных переходов на математическом уровне. Возникающие здесь трудные математические проблемы тесно связаны с проблемой существования и единственности решения этих уравнений.

В докладе будет дан обзор результатов, полученных в этом направлении. В частности, будет рассказано о предложенной недавно докладчиком совместно с К. Болдригини и Ю. Суховым карикатуре на гидродинамику, возникающей при применении гидродинамического предельного перехода к системе одномерных упругих твердых стержней.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ [1]

Заседание 21 октября 1980 г.

1. Д. Ю. Григорьев, А. О. Слисенко «Что такое теория сложности вычислений»?

Теория сложности вычислений возникла около двадцати лет назад как теория, призванная дать инструмент для оценки вычислительных ресурсов (времени, памяти и т. п.), требуемых для решения конкретных задач на цифровых вычислительных машинах. Проблема нахождения точных оценок вычислительной сложности оказалась очень трудной, и несмотря на обширные исследования, особенно интенсивные в США, не решена в наиболее интересных ситуациях. Наряду с развитием своеобразной техники, восходящей к теории алгоритмов и несвойственной традиционной математике, теория сложности выявила подчас неожиданные связи алгоритмических вопросов с классической математикой. В докладе рассказано о ряде ярких достижений современной теории сложности вычислений.

1. Для распознавания простоты числа (проблема Гаусса) возможен весьма быстрый детерминированный алгоритм в предположении расширенной гипотезы Римана (Г. Миллер, США).

2. Умножение двух двоичных чисел длины n выполняется на основе преобразования Фурье за линейное время, т. е. время $O(n)$ (А. Шёнхаге, ФРГ).

3. При рассмотрении алгоритмов (типа комбинационных схем), состоящих лишь из арифметических операций, интересна оценка числа нелинейных операций, т. е. умножений и делений. Для задачи умножения двух полиномов над конечным полем Д. Ю. Григорьевым получена оценка близкая к линейной (для бесконечного поля задача значительно проще и оценка линейна).

4. Для умножения двух $n \times n$-матриц наилучшая известная оценка числа операций принадлежит А. Шёнхаге и составляет $O(n^{2,52})$.

Для получения этой оценки ключевую роль сыграло явление, обнаруженное группой итальянских математиков и состоящее в том, что для ряда задач достаточно уметь производить быстрые приближенные вычисления, чтобы быстро получить точный результат.

5. Вопрос о сложности поиска вхождения одного слова в другое решен полностью — здесь возможен максимально быстрый алгоритм, работающий в реальное время (А. О. Слисенко).

Выше речь шла в основном о верхних оценках сложности, т. е. о построении конкретных «быстрых» алгоритмов. С математической точки зрения более интересно получение нижних оценок. В этой области, если не считать экспоненциальных и более высоких оценок, получение которых по методам близко к доказательству алгоритмических неразрешимостей, и которые касаются отнюдь не самых интересных задач, мало значительных

[1]) См. УМН, 1980, 35 : 6, с. 181—184.

результатов. Пожалуй, наиболее впечатляющим результатом здесь являются нелинейные оценки Ф. Штрассена (Швейцария) для задачи интерполяции и некоторых других, относящиеся к числу арифметических операций. Для получения этих оценок Штрассен использовал понятие степени алгебраического многообразия; причем для случая конечных полей он развил технику, не традиционную для алгебраической геометрии.

2. Присуждение ЛМО премий молодому математику за 1980 г. (премии присуждены Н. Е. Барабанову, Н. Л. Гордееву, О. И. Рейнову).

3. Прием в члены общества.— В члены общества избраны: И. Л. Братчиков, И. П. Мысовских, А. Х. Гелиг, М. И. Башмаков, Г. А. Леонов, Л. Б. Клебанов.

Заседание 11 ноября 1980 г.

1. Вручение премий ЛМО молодым математикам за 1980 г.

2. Н. Е. Барабанов «Существование периодических решений в нелинейных системах регулирования и гипотеза Калмана».

Доклад посвящен проблеме асимптотической устойчивости в целом систем регулирования с одной дифференцируемой нелинейностью в случае, если соответствующие линеаризованные системы асимптотически устойчивы. В 1956 г. известный специалист по теории управления Р. Е. Калман (США) выдвинул гипотезу о том, что такие нелинейные системы регулирования асимптотически устойчивы. В докладе дан краткий обзор некоторых известных, наиболее важных критериев, выделяющих классы систем регулирования, удовлетворяющих гипотезе Калмана. Кроме того, приведены новые, более сильные результаты. В частности, показано, что гипотеза Калмана верна для систем не выше третьего порядка.

В 1966 г. Р. Е. Фиттс (США) опубликовал примеры систем четвертого порядка, противоречащие гипотезе Калмана. Они были получены численным интегрированием с использованием ЭВМ. Контрпримеры Фиттса вошли в ряд известных монографий по теории регулирования. Как показано в докладе, некоторые из этих контрпримеров неверны.

Описан новый метод обнаружения периодических решений в системах регулирования. В качестве примера использования этого метода построена система четвертого порядка, удовлетворяющая условиям гипотезы Калмана и имеющая нетривиальное периодическое решение.

3. Н. Л. Гордеев «О некоторых арифметических вопросах теории Галуа».

Содержание доклада изложено в работах [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Л. Гордеев. Задача погружения с данными локализациями и ограниченным ветвлением.— Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР, 1976, с. 85—99.

[2] Н. Л. Гордеев. Бесконечность числа соотношений в группе Галуа максимального p-расширения с ограниченным ветвлением локального поля.— ДАН, 1977, **233** : 6, с. 1031—1034.

4. О. И. Рейнов «Свойства аппроксимации порядка p пространств Банаха».

Построены контрпримеры к ряду проблем А. Пелчинского, А. Пича и др., относящихся к условиям аппроксимаций, связанным с теорией абсолютно суммирующих операторов.

Заседание 9 декабря 1980 г.

1. С. Ю. Пилюгин «Притягивающие множества грубых систем».

Излагаются некоторые новые результаты по структуре притягивающего (т. е. асимптотически устойчивого компактного инвариантного [1]) множества I для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=F(x) \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^n$. Особое внимание уделяется границе J множества I. Пусть Ω — множество неблуждающих траекторий системы (1) в J. Предполагается, что множество Ω гиперболично и на Ω выполнено строгое условие трансверсальности [2].

Теорема 1. 1°. *Любая точка $x \in J$ лежит на неустойчивом многообразии $W^u(p)$ траектории $p \in \Omega$.*

2°. *J — притягивающее множество.*

3°. *$W^u(p) \subset J$ для любой траектории $p \in \Omega$.*

4°. *В множестве Ω плотны замкнутые траектории (допускаются вырожденные замкнутые траектории, являющиеся точками покоя).*

Если множество Ω состоит из конечного числа гиперболических траекторий (и по-прежнему выполнено условие трансверсальности), то структуру J можно описать более точно. В этом случае для траектории $p \in \Omega$ многообразие $W^u(p)$ есть вложенное в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$, $S^1 \times \mathbb{R}^k$ или неориентируемое расслоение над S^1 со слоем $\mathbb{R}^k$. Будем говорить, что для траектории $p \in \Omega$ многообразие $W^u(p)$ регулярно расположено в J, если

$$(\overline{J \setminus W^u(p)}) \cap W^u(p) = \varnothing.$$

Теорема 2. *Существуют такие траектории $p_1, \ldots, p_m \in \Omega$, что многообразия $W^u(p_1), \ldots, W^u(p_m)$ регулярно расположены в J и*

$$J = \overline{W^u(p_1)} \cup \ldots \cup \overline{W^u(p_m)}.$$

Рассмотрен, кроме того, вопрос о том, когда фазовая диаграмма в смысле Смейла [3] определяет систему (1) с точностью до топологической эквивалентности в классе грубых диссипативных систем без замкнутых траекторий [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Барбашин. Метод сечений в теории динамических систем.— Матем. сб., 1951, **29** : 2, с. 233—280.

[2] З. Нитецки. Введение в дифференциальную динамику.— М.: Мир, 1975.

[3] С. Смейл. Дифференцируемые динамические системы.— УМН, 1970, **25** : 1, с. 113—185.

[4] С. Ю. Пилюгин. Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса — Смейла без периодических траекторий на сферах.— Дифф. уравнения, 1989, **14** : 2, с. 245—254.

Заседание 23 декабря 1980 г.

1. А. Г. Хованский (Москва) «Об оценке числа вещественных корней малочленов».

Известно [1], что число вещественных корней полиномиальной системы уравнений оценивается сверху (вне зависимости от степени уравнений) через число мономов, фигурирующих в системе уравнений. В докладе дана аналогичная оценка для числа комплексных корней, аргументы которых лежат в любой достаточно малой области, величина которой оценивается по многогранникам Ньютона системы. Дана также асимптотика распределения корней экспоненциальной системы уравнений и обсуждены другие применения вещественного анализа в комплексном.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Хованский. Об одном классе систем трансцендентных уравнений, ДАН, 1980, **255** : 4, с. 804—807.

Заседание 24 февраля 1981 г.

1. Ю. В. Матиясевич «Простые числа, ЭВМ и криптография».

Рассказано о современных возможностях ЭВМ по проверке простоты и разложению на множители больших чисел, а также о связи этих вопросов с криптографией.

Заседание 10 марта 1981 г.

1. И. Л. Братчиков «Основные направления развития математического обеспечения ЭВМ».

В обзорном докладе рассказано о современном состоянии и перспективах развития ЭВМ и некоторых областей их математического обеспечения: языков программирования и методов трансляции, операционных систем, баз данных, автоматизированных обучающих систем.

Заседание 24 марта 1981 г.

1. И. М. Кричевер (Москва) «Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений».

Рассказано, как с помощью методов алгебраической геометрии находить точные решения нелинейных уравнений типа КдФ. Эти уравнения эквивалентны условиям совместности вспомогательных задач, собственные функции которых определены на римановой поверхности конечного рода, накрывающей плоскость спектрального параметра, и образуют l-мерное векторное голоморфное расслоение над римановой поверхностью. В случае ранга $l = 1$ в общем положении полученные решения оказываются квазипериодическими и могут быть выражены через тэта-функции Римана.

Заседание 14 апреля 1981 г.

1. Ю. С. Ильяшенко (Москва) «Слабо сжимающие динамические системы и аттракторы».

Первая часть доклада посвящена определению и свойствам слабо сжимающих систем и их применению к уравнениям Навье—Стокса. Этот материал содержится в заметке [1]. Вторая часть посвящена обобщениям и дальнейшим применениям слабо сжимающих систем.

1. Область B называется обобщенной глобально поглощающей для системы $\dot{x} = v(x)$, с периферией B_1 и запаздыванием T, если: 1°. всякая фазовая кривая системы с началом в B, не позже, чем за время T, вернется в B, не покидая при этом области B_1; 2°. каждая фазовая кривая за положительное время попадает в B; 3°. замыкания $\overline{B}$ и $\overline{B_1}$ компактны.

Обобщенно слабо сжимающие системы и их характеристика определяются так же, как слабо сжимающие системы и их характеристика [1], только в определении системы глобально поглощающая область должна быть заменена на обобщенную глобально поглощающая область, а в определении характеристики — на периферию B_1.

Теорема. *Хаусдорфова размерность аттрактора обобщенной слабо сжимающей системы не превосходит ее характеристики.*

2. В химической кинетике рассматривается уравнение

$$u_t = u_x^2 - u_{xx} - \nu u_{xxxx}, \quad x \in R^1/\mathbb{Z}, \quad \nu \ll 1, \tag{1}$$

галеркинские приближения к которому обладают «турбулентными» свойствами, как показывает численный анализ [2]. Сходное уравнение возникает в теории двумерного течения по наклонной плоскости [3]:

$$u_t = u_x u - u_{xx} - \nu u_{xxxx}, \ x \in R^1/\mathbb{Z}, \ \nu \ll 1. \tag{2}$$

Фазовым пространством N-го галёркинского приближения к уравнениям (1) и (2) является пространство тригонометрических многочленов степени не выше N.

Теорема. *N-е галёркинское приближение к уравнению* (1) *или* (2) *при достаточно большом N является обобщенной слабо сжимающей системой, хаусдорфова размерность аттрактора которой оценивается сверху константой, зависящей только от ν и не зависящей от номера N.*

3. Пусть M — компактное двумерное риманово многообразие, D — ковариантная производная на M. Уравнение Навье — Стокса на M имеет вид

$$u_t = -D_u u + \nu \Delta u + f, \quad \operatorname{div} u = 0. \tag{3}$$

Фазовое пространство N-го галёркинского приближения к уравнению (3) натянуто на бездивергентные векторные поля собственные для оператора $-\Delta$, соответствующие N наименьшим собственным значениям этого оператора.

Теорема. *Галёркинское приближение к уравнению* (3) *является слабо сжимающей системой, хаусдорфова размерность аттрактора которой оценивается сверху величиной, зависящей только от ν и M и не зависящей от N.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. С. Ильяшенко. Слабо сжимающие системы и аттракторы галёркинских приближений уравнения Навье — Стокса.— УМН, 1981, **36** : 3.

[2] T. Yamada, Y. Kuramoto, A Reduced Model Showing Chemical Turbulence, Prog. Theor. Phys., 1976, **56**, с. 681—683.

[3] А. В. Петвиашвили. Неодномерные солитоны.— В. кн.: Нелинейные волны.— М.: Наука, 1979.

Заседание 28 апреля 1981 г.

1. А. Б. Александров, В. П. Хавин «Классы Харди и *BMO*».

Многие линейные операторы, отображающие каждое из пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$ в себя при конечных p, больших единицы, плохо ведут себя в L^1 и в L^∞. Важным достижением анализа в 70-х годах явилось осознание того, что «истинным» правым концом шкалы L^p служит не L^∞, а пространство *BMO*, «истинным» же левым — пространство Харди H^1. В докладе рассказано об этих пространствах, которые уже прочно вошли в быт и без которых трудно представить себе современный анализ; это относится и к замечательной «атомной технике» оценок линейных операторов, о которой также шла речь; рассмотрена связь «шкалы Харди» с обычной шкалой гладких функций и с теорией гармонических векторных полей (эта последняя связь была обнаружена методами броуновского движения, и лишь позднее была понята на «детерминистском» уровне).

2. Прием в члены ЛМО. В члены общества избраны: Н. Е. Барабанов, С. С. Валландер.

Заседание 26 мая 1981 г.

1. О планах издательства «Мир» на 1982—83 гг. Сообщения заместителя заведующего редакцией А. С. Попова.

2. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1981 г. Премии присуждены

а) А. Р. Итсу за цикл работ «Конечнозонные и изомонодромные решения уравнений типа НШ».

б) Е. Д. Глускину за цикл работ по геометрии пространств Минковского.

3. Отчет правления ЛМО и ревизионной комиссии.

4. Обсуждение планов работы Общества на ближайшие годы.

Принято к сведению, что с сентября 1981 г. создается секция математики при Ленинградском Доме ученых, которая будет работать в тесном контакте с ЛМО.

5. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

В правление выбраны:

С. М. Лозинский — президент Общества;

А. М. Вершик — вице-президент Общества,

О. А. Ладыженская — вице-президент Общества,

Члены правления:

В. С. Буслаев, О. Я. Виро, В. Ф. Демьянов, С. М. Ермаков, Г. И. Натансон — секретарь Общества, Б. С. Павлов, М. З. Соломяк, В. Н. Судаков — казначей Общества.

Члены ревизионной комиссии:

Н. К. Никольский, В. Н. Фомин — председатель, В. П. Хавин.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1])

Заседание 29 сентября 1981 г.

1. Вручение премий ЛМО молодым математикам за 1981 г.

2. Доклады лауреатов.

Е. Д. Глускин «Геометрия пространств Минковского».

Совокупность $\mathfrak{M}_n$ всех n-мерных нормированных пространств, снабженная метрикой Банаха — Мазура, превращается в метрический компакт (компакт Минковского). Последние годы значительно возрос интерес к изучению асимптотического поведения различных геометрических функционалов на $\mathfrak{M}_n$ с ростом n. О вопросах такого рода и шла речь. В частности было рассказано о диаметре компакта Минковского и о конечномерных аналогах банахова пространства без базиса.

А. Р. Итс «О некоторых новых методах в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных».

В рамках интенсивно развивающегося в последнее время направления в теории нелинейных уравнений математической физики, известного под названием «метод обратной задачи теории рассеяния», излагаются те возможности, которые открываются благодаря привлечению нетрадиционных для нее методов алгебраической геометрии и идей классического анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заседание 13 октября 1981 г.

1. А. Б. Венков «Теория неаналитических автоморфных функций А. Сельберга и ее приложения».

Формула следа Сельберга на компактной римановой поверхности. Элементы теории дзета-функции Сельберга. Доказательство аналога гипотезы Римана о нулях дзета-функций Сельберга. Элементы спектральной теории автоморфных функций. Ряды Эйзенштейна и соотношения Масса — Сельберга. Арифметические и геометрические приложения.

Заседание 27 октября 1981 г.

1. Г. Г. Каспаров «Что такое операторная K-теория?».

Операторная K-теория возникла как дальнейшее развитие топологической K-теории в связи с задачами расширения операторных алгебр. Основной объект этой теории — серия абелевых групп, сопоставляемых одной или нескольким операторным алгебрам (K-функторы). Эти группы отвечают за важнейшие свойства алгебр, связанных с расширениями, теорией возмущений, классификацией и др. Топологическая K-теория и общая теория индекса Атьи — Зингера укладываются в операторную K-теорию как частный случай. В докладе рассказано об основных понятиях и приложениях.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избран А. А. Иванов.

---

[1]) См. УМН, 1982, **37**:1 (223), с. 163—167.

Начиная с 1981—82 учебного года часть заседаний ЛМО проводится совместно с вновь созданной секцией математики Ленинградского Дома ученых им. А. М. Горького.

Заседание 27 октября 1981 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Л. Д. Фаддеев «Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна».

В гамильтоновой формулировке теории поля энергия определяется как генератор сдвига по времени. В общековариантной теории тяготения это определение является наиболее подходящим, хотя и нуждается в уточнении, которое и обсуждалось в докладе. Приводится также доказательство положительности полной энергии поля тяготения и полей материи.

Содержание доклада подробно изложено в статье автора в УФН т. 136, вып. 3, с. 435.

Заседание 15 декабря 1981 г.

1. А. М. Рубинов «О некоторых задачах экономической динамики».

Доклад посвящен моделям экономической динамики неймановского и рамсеевского типов. Дано определение этих моделей, указаны основные задачи, приведены типичные результаты (см. обзор [2]). Основное внимание уделено неймановским моделям, в которых динамика задается многозначным отображением a, определенным на R^n_+, причем $a(0) = \{0\}$ и a суперлинейно, т. е. его график является выпуклым замкнутым конусом. Траектория x_t определяется соотношением $x_{t+1} \in a(x_t)$. Одна из задач, здесь возникающих, заключается в изучении асимптотики различных классов траекторий. Ответ дается с помощью понятия магистрали — множества, к которому в том или ином смысле близки изучаемые траектории. Методы экономической динамики иногда пригодны и для описания асимптотики траекторий, порождаемых непрерывным многозначным отображением метрического компакта в себя (см. [1]). Интересные результаты получены недавно в этом направлении А. Я. Заславским, Г. А. Ларичевой и др.

В последнее время становится все более ясным, что одна из основных задач экономической динамики заключается в эндогенном (внутримодельном) определении критериев оптимальности (в отличие от теории экстремальных задач, где указанные критерии задаются извне). В решении этой задачи, сближающей экономическую динамику с теорией игр, делаются лишь первые шаги.

Оставшаяся часть доклада посвящена простейшей однопродуктовой модели неймановского типа N_1 и ее обобщениям, активно изучаемым в последние два года участниками семинара по экономической динамике ИСЭП АН СССР (К. Ю. Борисовым, В. Н. Воробьевой, В. Д. Матвеенко и докладчиком). Состоянием модели N_1 является вектор $x = (K, L) \in R^2_+$, где K — фонды, L — рабочая сила. Модель задается производственной функцией F: $R^2_+ \to R_+$ (она суперлинейна, т. е. вогнута и положительно однородна; $F(0, 1) = F(1, 0) = 0$), коэффициентом выбытия фондов $\mu \in (0, 1)$ и ставкой заработной платы $\omega > 0$. Производственное отображение a этой модели определено так: $(K', L') \in \in a(K, L)$, если найдется число $I \geqslant 0$ (инвестиции), при котором $\omega L' + I \leqslant F(K, L)$, $K' = (1 - \mu)K + I$, $L' \geqslant 0$. Траектория x_t модели N_1 называется пошагово оптимальной относительно функционала p, если $p(x_{t+1}) \geqslant p(y)$ при всех t и $y \in a(x_t)$. Траектория x_t эффективна, если для каждого t найдется вектор $f_t \geqslant 0$ (цены), при котором $(f_t, x_t) \geqslant \geqslant (f_t, y)$ для любого y, достижимого из начального состояния x_0 за t шагов. Одна из задач, относящихся к N_1 и ее обобщениям, заключается в следующем: описать все функционалы p, пошаговая оптимизация которых приводит к эффективной траектории. Существование такого p доказано в [1] для любого суперлинейного отображения. Там же дан способ построения, однако непосредственная экономическая интерпретация получающегося функционала неясна. В то же время в модели N_1 удалось показать, что пошаговая оптимизация «национального богатства» $q(K, L) = \nu K + F(K, L)$ приводит к эффективности. Есть ли еще функционалы, обладающие нужным свойством? Какова их интерпретация? Существенно сложнее, чем N_1 модели, в которых производственная функция зависит от времени или состояния (учет научно-технического прогресса) или не однородна, а также модели, в которых фонды различаются по сроку службы. Полученные здесь результаты (в частности, магистрального характера) и возникающие задачи тоже обсуждены в докладе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Рубинов. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам.— Л.: Наука, 1980.
[2] А. М. Рубинов. Экономическая динамика.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 19, М.: ВИНИТИ, 1982, 58—110.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избраны А. Итс, Н. А. Вавилов, А. Меркурьев, Е. Д. Глускин, А. Черняков.

Заседание 21 декабря 1981 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. И. В. Романовский «Математическая полиграфия».

В докладе рассказано о новом направлении в прикладном программировании: математическая теория и использование ЭВМ в типографии.

Заседание 16 февраля 1982 г.

1. В. В. Пеллер, С. В. Хрущёв «Операторы Ганкеля и их приложения (наилучшие приближения, стационарные гауссовские процессы)».

В докладе приводятся новые результаты об операторах Ганкеля и рассматриваются многочисленные приложения этих операторов.

Оператор Ганкеля H_φ, $\varphi \in L^\infty$, определяется на классе Харди H^2 равенством $H_\varphi f = f - \mathbf{P}_+ f$, где $\mathbf{P}_+$— ортогональный проектор пространства L^2 на H^2. Операторы Ганкеля можно также определить как операторы в пространстве l^2, атрицы которых имеют вид $\{\gamma_{m+k}\}_{m,k\geqslant 0}$. Приводится критерий принадлежности оператора Ганкеля H_φ классам Шаттена — фон-Неймана (в частности критерий ядерности оператора H_φ) в терминах его символа φ. В качестве приложений операторов Ганкеля получены следующие результаты:

1) Для широкого класса пространств X на единичной окружности $\mathbf{T}$ решается задача наилучшего приближения аналитическими функциями в равномерной метрике, т. е. показано, что если $f \in X$ и g — аналитическая в единичном круге функция, минимизирующая норму $\| f - g \|_{L^\infty \mathbf{T}}$, то $g \in X$.

2) Найдены условия на пространство X и унимодулярную функцию u (т. е. $|u(\zeta)| = 1$ п. в. при $\zeta \in \mathbf{T}$), при которых $\sum\limits_{n<0} \hat{u}(n)\zeta^n \in X \Rightarrow u \in X$.

3) Получены теоремы о восстановлении в пространствах мер, т. е. указаны классы распределений X таких, что если μ — борелевская мера на $\mathbf{T}$ и $\sum\limits_{n>0} \hat{\mu}(u)\zeta^n \in X$, то $\mu \in X$.

4) Описаны интерполяционные подмножества на окружности в некоторых классах аналитических функций (в частности в классе функций с конечным интегралом Дирихле, непрерывных вплоть до границы).

5) Получены новые простые доказательства всех известных ранее результатов, описывающих в терминах спектральной плотности стационарные гауссовские процессы, удовлетворяющих различным условиям регулярности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Пеллер. Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов).— Матем. сб., 1980, 113:4, с. 538—581.
[2] В. В. Пеллер, С. В. Хрущёв. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы.— УМН, 1982, 37:1, с. 53—124.

Заседание 16 марта 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Приветствие от ЛМО О. А. Ладыженской в связи с ее 60-летием.

2. С. П. Новиков. «Теория Морса для многозначных функций».

В ряде задач математической физики в качестве функционалов действия возникают многозначные или неположительные функционалы. Классическое вариационное исчисление «в целом» (Пуанкаре — Биркгоф — Люстерник — Шнирельман — Морс) к ним неприменимо. В докладе рассказано о недавних работах, в которых строится соответствующее обобщение теории Морса. «Конечномерный» аналог теории связан с новыми задачами гомологической алгебры.

Подробно содержание доклада опубликовано в работах автора (см. Функц. анализ и его прилож., 1981—82 гг.).

Заседание 30 марта 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. В. И. Зубов «Квантование орбит».

Содержание доклада публикуется в ДАН СССР.

Заседание 13 апреля 1982 г.

1. А. С. Меркурьев, А. А. Суслин. «K — когомологии многообразий Севери — Бауэра и гомоморфизм норменного вычета».

В докладе рассказано о решении проблемы биективности гомоморфизма норменного вычета [1], [2], [3].

Теорема 1. *Пусть n — натуральное число, F — произвольное поле, характеристика которого не делит n. Тогда гомоморфизм норменного вычета*

$$R_{F,\,n}\colon\ K_2(F)/nK_2(F) \longrightarrow H^2(F,\ \mu_n^{\otimes 2})$$

является изоморфизмом.

Приведены следствия из теоремы 1:

Теорема 2. *Если $\mu_n \subset F$, то любая центральная простая алгебра экспоненты n подобна тензорному произведению циклических алгебр экспоненты n и, следовательно, имеет абелево поле расщепления. В общем случае каждая центральная простая алгебра имеет разрешимое поле расщепления.*

Теорема 3 (аналог теоремы Гильберта 90 для функтора K_2). *Пусть E/F — циклическое расширение, σ — образующая группы* $\mathrm{Gal}(E/F)$. *Тогда*

$$\ker\,(K_2(E) \xrightarrow{N} K_2(F)) = K_2(E)^{1-\sigma}.$$

Теорема 4 (о кручении в K_2). *Если $\mu_n \subset F$, то ${}_nK_2(F) = \{\mu_n,\ F^*\}$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Меркурьев. О символе норменного вычета степени два.— ДАН, 1981, **261**:3, с. 542—547.

[2] А. С. Меркурьев, А. А. Суслин. K-когомологии многообразий Севери — Брауэра и гомоморфизм норменного вычета.— ДАН, 1982, **264**:3, с. 555—559.

[3] А. С. Меркурьев, А. А. Суслин. Гомоморфизм норменного вычета.— Препринт ЛОМИ, Р—6—82, 1982.

Заседание 27 апреля 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. М. И. Башмаков «О преподавании математики будущим инженерам».

Задача построения курса математики для будущих инженеров еще не нашла, по мнению докладчика, удовлетворительного решения.

В докладе обсуждались имеющиеся трудности и намечались некоторые пути их преодоления.

Заседание 18 мая 1982 г.

1. Я. Б. Песин «Гиперболические явления в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

Начало гиперболической теории восходит к трудам Адамара, Морса, Хедлунда, Хопфа; в настоящее время она является одним из основных аппаратов качественного исследования неинтегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений. В докладе приведены определения различных уровней гиперболичности и отвечающих им классов динамических систем. Описаны топологические и стохастические свойства этих систем обрисованы современные проблемы гиперболической теории (странные аттракторы, хаусдорфова размерность и др.).

2. Прием в члены общества.— В члены общества избраны В. М. Цветков, Ю. Д. Бураго, Е. К. Склянин, А. Ю. Зайцев, А. Г. Рейман.

Заседание 8 июня 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых и было посвящено памяти академика Ю. В. Линника (1915—1972).

1. Вступительное слово Президента Ленинградского математического общества С. М. Лозинского.

Уже вступает в науку поколение ученых, не знавших Ю. В. Линника лично и воспринимающих его только как автора классических математических трудов. Лиц, помнящих Ю. В. Линника молодым, становится все меньше.

Во вступительном слове докладчик говорил главным образом о студенческих и первых годах научной работы Юрия Владимировича; сообщены различные факты из биографии Юрия Владимировича, которые помогают лучше представить себе и оценить его исключительную личность.

2. А. В. Малышев «Дискретный эргодический метод Ю. В. Линника и его дальнейшее развитие».

В докладе изложена история развития метода, его основные черты. Дан обзор современных результатов и перспектив развития.

3. И. В. Островский «Теория разложения вероятностных распределений».

Совокупность **P** всех вероятностных распределений в $\mathbb{R}$ является полугруппой относительно операции свертки. Арифметика вероятностных распределений занимается изучением делимости и факторизации в этой полугруппе и в некоторых чертах сходна с мультипликативной теорией чисел.

Первым результатом была теорема Крамера 1936 г.: все делители в **P** распределения Гаусса — также распределения Гаусса (быть может, вырожденные). Ряд важных результатов был получен в предвоенные годы А. Я. Хинчиным, П. Леви, Д. А. Райковым. После почти двадцатилетнего перерыва дальнейшее развитие возобновилось благодаря работам Ю. В. Линника 1957—1961 годов, где был предложен новый подход к изучению делителей в **P**, основанный на глубоких фактах теории целых функций.

В докладе рассмотрены наиболее важные результаты и методы Ю. В. Линника и их влияние на современные исследования по арифметике вероятностных распределений и различным ее обобщениям. Изложение основано на соответствующих частях статей [1] и [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Ибрагимов, И. В. Островский, В. В. Петров. О работах Ю. В. Линника по теории вероятностей.— В кн.: Ю. В. Линник. Избранные труды. Теория вероятностей, Л.: Наука, 1981.

[2] I. V. Ostrovskii. The arithmetic of probability distributions.— J. Multivar. Anal., 1977, 7:4, p. 475—490.

4. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1982 г. Премия присуждена А. С. Меркурьеву за цикл работ по алгебраической K-теории и В. В. Пеллеру за цикл работ по ганкелевым операторам.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1])

Заседание 21 сентября 1982 г.

1. Вручение премий ЛМО молодым математикам за 1982 г.
2. В. В. Пеллер «Что мы знаем об операторах Тёплица и Ганкеля?»

Этот обзорный доклад представляет собой введение в теорию операторов Тёплица и Ганкеля; в нем также уделяется значительное внимание многочисленным приложениям этих операторов в различных областях анализа и теории вероятностей.

Пусть H^2 — класс Харди, $H^2_- = L^2 \ominus H^2$, $\mathbf{P}_+$ и $\mathbf{P}_-$ — ортопроекторы в L^2 на подпространства H^2 и H^2_-. Тогда для функции φ из L^∞ на единичной окружности операторы Ганкеля и Тёплица H_φ и T_φ на классе H^2 с символом φ определяются равенствами

$$H_\varphi f = \mathbf{P}_-\varphi f, \quad f \in H^2; \qquad T_\varphi f = \mathbf{P}_+\varphi f, \quad f \in H^2.$$

Рассматриваются многочисленные задачи, в которых возникают эти операторы и для решения которых они используются. К таким задачам относятся: проблемы моментов, различные интерполяционные задачи, ортогональные полиномы, краевые задачи теории функций комплексной переменной, сингулярные интегральные уравнения, уравнения Винера — Хопфа, функциональная модель Сёкефальви-Надя — Фойаша, стационарные процессы, рациональная аппроксимация, равномерные приближения аналитическими функциями, базисы из экспонент и другие. Причем в последнее время круг задач, для решения которых используются операторы Тёплица и Ганкеля заметно расширяется (см. [1], [4]), и хотя свойства операторов Тёплица и Ганкеля, очень непохожи, во многих вопросах применяются одновременно и операторы Тёплица, и операторы Ганкеля и большую роль играют различные алгебраические соотношения между этими операторами.

В докладе излагаются следующие результаты об операторах Ганкеля: приводятся теорема Нехари, описывающая норму операторов Ганкеля, обсуждается связь с пространством BMO функций ограниченной средней осцилляции, критерий Хартмана компактности операторов Ганкеля, описание операторов Ганкеля класса Шаттена — фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, принадлежащее автору [2], теорема В. М. Адамяна, Д. З. Арова, М. Г. Крейна об s-числах операторов Ганкеля; показано, как эти результаты применяются в различных вопросах.

Одним из основных вопросов в теории операторов Тёплица является проблема обратимости и вычисления спектра. Приведен общий критерий Девинаца — Уидома обратимости операторов Тёплица и продемонстрировано на примере операторов Тёплица с кусочно-непрерывными символами, как этот критерий можно применять для геометрического описания спектра. Приведены также известные описания спектров операторов Тёплица с почти периодическими символами, и с символами из $H^\infty + C$.

Много внимания уделяется локальным принципам в теории операторов Тёплица и алгебраическому подходу к этой теории. Локальный принцип, грубо говоря, заключается в том, что если символ оператора Тёплица локально (в том или ином смысле) совпадает с символами фредгольмовых операторов Тёплица, то этот символ является символом фредгольмова оператора Тёплица. Излагаются локальные принципы И. Б. Симоненко и Р. Дугласа и демонстрируются применения этих принципов для вычисления спектров.

---

[1]) См. УМН, 1983, 38:1(229) с. 217—221.

Алгебраический подход заключается в том, что вместе с операторами Тёплица, символы которых принадлежат тому или иному классу, рассматривается алгебра, порожденная этими операторами, и проблема обратимости (фредгольмовости) изучается сразу для всех операторов из этой алгебры. Этому подходу посвящено множество работ (см. обзор [1]). При этом оказывается существенным знать, насколько отличаются между собой операторы $T_\varphi \cdot T_\psi - T_{\varphi\psi}$. Приводится критерий компактности этого оператора, принадлежащий Ш. Аклеру, С. Ю. А. Чанг, Д. Сарасону и А. Л. Вольбергу (см. об этом [1]).

В заключение рассматриваются более тонкие свойства операторов Тёплица. Приводятся результаты М. Розенблюма и Р. Исмагилова об унитарной классификации самосопряженных операторов Тёплица, теоремы Д. Кларка и Д. Ванга о классификации с точностью до подобия операторов Тёплица с рациональными (и с некоторыми другими) символами (см. [1]) и одна теорема автора [3], утверждающая существование нетривиальных инвариантных подпространств для операторов Тёплица с непрерывными символами φ, для которых модуль непрерывности ω_φ удовлетворяет соотношению $\int\limits_0 \frac{\omega_\varphi(t)}{t \log 1/t}\, dt$ и в некотором круге $\mathscr{D}$ на плоскости функция φ принимает значения в $\mathscr{D} \cap \Gamma$ для липшицевой дуги Γ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Никольский. Операторы Ганкеля и Тёплица.— Препринты ЛОМИ, Р-1-82, Р-2-82, Р-5-82.

[2] В. В. Пеллер. Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов).— Матем. сб., 1980, 113:4, с. 538—581.

[3] В. В. Пеллер. Инвариантные подпространства операторов Тёплица.— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, 126, с. 170—179.

[4] В. В. Пеллер, С. В. Хрущёв. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы.— УМН, 1982, 37:1, с. 53—124.

3. Прием в члены Общества.— В члены Общества избран А. Н. Бородин.

Заседание 12 октября 1982 г.

1. А. М. Виноградов (Москва) «Высшие симметрии и законы сохранения общих систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными».

Классическая теория симметрий общих систем нелинейных дифференциальных уравнений (н. д. у.) в частных производных была создана С. Ли примерно 100 лет тому назад. Преобразование $(x, u) \longmapsto (x', u')$ совокупности зависимых $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и независимых $u = (u^1, \ldots, u^m)$ переменных порождает естественным образом преобразование производных любого порядка функции $u = u(x)$. Если такое преобразование сохраняет форму рассматриваемой системы н. д. у., то оно по С. Ли называется ее симметрией. Аналогично определяются бесконечно малые (инфинитезимальные) симметрии системы н. д. у. В последнее время Л. В. Овсянниковым и его учениками теория Ли была с успехом применена для решения многих задач механики и математической физики. Однако теория Ли оказывается недостаточной для объяснения многих важных эффектов, обнаруженных в последнее время, например, в теории уравнений Лакса и т. п. Необходимое расширение понятия симметрии системы н. д. у. осуществляется следующим образом.

Всякую систему н. д. у. порядка k, заданную на «многообразии независимых переменных» M, можно трактовать как подмногообразие $\mathscr{Y} \subset J^k(\pi)$, где π — некоторое гладкое расслоение и $J^k(\pi)$ — многообразие k-джетов этого расслоения, $k = 0, 1, \ldots, \infty$. На бесконечномерном многообразии $J^\infty(\pi)$ имеется естественное n-мерное распределение, которое индуцирует n-мерное распределение на бесконечном продолжении $\mathscr{Y}_\infty \subset J^\infty(\pi)$ системы $\mathscr{Y}$. Высшей симметрией (соответственно инфинитезимальной симметрией) системы $\mathscr{Y}$ мы называем гладкое преобразование $\mathscr{Y}_\infty \to \mathscr{Y}_\infty$ (соответственно векторное поле на $\mathscr{Y}_\infty$), сохраняющее это распределение. Совокупность $\operatorname{Sym} \mathscr{Y}$ всех высших инфинитезимальных симметрий системы $\mathscr{Y}$ естественным образом является алгеброй Ли. Ее аналитическое описание состоит в следующем.

Введем на $J^\infty(\pi)$ локальные координаты $x, u_1, \ldots, u_\sigma, \ldots$, где u_σ — производная функции $u = u(x)$, отвечающая мультииндексу σ. Если система $\mathcal{Y}$ имеет вид $F = 0$, $F = (F_1, \ldots, F_l)$, $F_i = F_i(x, \ldots, u_\sigma, \ldots)$, $|\sigma| \leqslant k$, то соответствующий ей оператор универсальной линеаризации l_F имеет вид $l_F = \sum\limits_\sigma \partial F/\partial u_\sigma D_\sigma$, где $D_\sigma = D_1^{i_1} \circ \ldots \circ D_n^{i_n}$, если $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$, и $D_i = \partial/\partial x_i + \sum\limits_\sigma u_{\sigma+1_i}\partial/\partial u_\sigma$.

Теорема 1. *Имеет место изоморфизм* $\mathrm{Sym}\,\mathcal{Y} = \ker \overline{l}_F$, *где* $\overline{l}_F$ — *ограничение оператора* l_F *на* $\mathcal{Y}_\infty$.

Для того чтобы инвариантным образом ввести понятие закона сохранения для системы $\mathcal{Y}$ рассмотрим фактор-комплекс $\{\overline{\Lambda}^i, \overline{d}\}$ комплекса де Рама $\{\Lambda^i, d\}$ на $\mathcal{Y}_\infty$, где $\overline{\Lambda}^i = \Lambda^i/\mathscr{C}\Lambda^i$, а $\mathscr{C}\Lambda^i$ состоит из всех i-форм, которые имеют тривиальные ограничения на все интегральные многообразия в $\mathcal{Y}_\infty$. Обозначим через $\overline{H}^i$ i-ю группу когомологий комплекса $\{\overline{\Lambda}^i, \overline{d}\}$. Законами сохранения системы $\mathcal{Y}$ будем называть элементы группы $\overline{H}^{n-1}$.

Теорема 2. *Пусть система* $\mathcal{Y}$ *определена и регулярна. Тогда существует такой дифференциальный оператор* A, *что группа* $\overline{H}^{n-1}$ *изоморфна* $\ker \overline{l}_F^* \cap \ker A$. *В частности,* $\overline{H}^{n-1} \subset \ker \overline{l}_F^*$, *где* $\overline{l}_F^*$ — *оператор, формально сопряженный с* $\overline{l}_F$.

Теоремы 1 и 2 непосредственно приводят к эффективным процедурам, позволяющим полностью вычислить алгебру $\mathrm{Sym}\,\mathcal{Y}$ и группу $\overline{H}^{n-1}(\mathcal{Y})$ для конкретных систем дифференциальных уравнений (см. [1]).

Замечание. Ввиду того, что для систем Эйлера — Лагранжа $l_F = l_F^*$, теорема Нётер, обобщенная на высшие симметрии, является непосредственным следствием теорем 1 и 2.

Пусть N — n-мерный объект категории дифференциальных уравнений в смысле [2] и $f\colon N \to \mathcal{Y}_\infty$ — сюръективный невырожденный морфизм, т. е. накрытие в этой категории. Нелокальной симметрией (законом сохранения) типа f для системы $\mathcal{Y}$ назовем автоморфизм (закон сохранения) для объекта N. Для нелокальных симметрий и законов сохранения имеют место аналоги теорем 1 и 2.

Гипотеза. *Всякая «достаточно регулярная» система н. д. у.* $\mathcal{Y}$ *обладает бесконечным запасом нелокальных симметрий и законов сохранения.*

Приведенные выше результаты являются следствием теории «многообразий» вида $\mathcal{Y}_\infty$ (см. обзор [3], где указана дальнейшая литература).

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. M. Vinogradov. Local symmetries and conservation laws of systems of partial differential equations.— Acta Appl. Math., 1984, 2:1.

[2] А. М. Виноградов. Категория нелинейных дифференциальных уравнений.— В сб.: Уравнения на многообразиях. Воронеж: ВГУ, 1982, с. 26—51.

[3] А. М. Виноградов. Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений.— В сб.: Проблемы геометрии (сер. «Итоги науки и техники»).— М.: ВИНИТИ, 1980, 11, с. 89—134.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избран О. М. Фоменко.

Заседание 26 октября 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Приветствие от Общества члену-корреспонденту АН СССР Дмитрию Константиновичу Фаддееву в связи с его 75-летием.

2. И. Р. Шафаревич (Москва) «Алгебраические поверхности типа К3 над полями конечной характеристики».

Самый естественный способ изучения алгебраических поверхностей типа К3 над полями комплексных чисел основывается на рассмотрении интегралов от (единственной с точностью до постоянного множителя) голоморфной дифференциальной формы на такой поверхности. В последнее время выяснилось, что в некоторых случаях аналоги этих интегралов могут быть определены и для поверхностей, заданных над полями конечной характеристики. Доклад содержит обзор результатов, полученных докладчиком совместно с А. Н. Рудаковым в этом направлении.

Заседание 16 ноября 1982 г.

1. Л. А. Бунимович «Динамические системы с упругими отражениями».

Системы с упругими отражениями, или, как их принято называть, биллиарды, возникают во многих задачах теории динамических систем и ее приложений. С общей точки зрения биллиарды представляют собой геодезические потоки на римановых многообразиях с краем. В частности, к таким системам относятся наиболее популярные модели статистической механики — газ Лоренца и газ твердых сфер.

Пусть Q — компактное риманово многообразие размерности d с кусочно-гладкой границей ∂Q. Обозначим через M многообразие касательных векторов к Q единичной длины. Многообразие M также имеет границу ∂M, которая образована единичными векторами с носителями на ∂Q.

Биллиардом в Q называется динамическая система в M, порожденная движением вектора $\mathbf{x} = (q, \mathbf{v}) \in M$, где $q \in Q$, $\mathbf{v} \in T_qQ \cap M$, по определяемой им геодезической с единичной скоростью, причем при попадании носителя линейного элемента на границе ∂Q происходит мгновенное отражение от нее, при котором касательная составляющая вектора $\mathbf{v}$ сохраняется, а нормальная меняет знак. Если траектория попадает в множество сингулярных точек границы, то считается, что дальнейшее движение не определено. Биллиард является гамильтоновой системой и имеет естественную инвариантную меру $d\mu = dq\,d\omega$, где $d\omega$ — мера Лебега на $(d-1)$-мерной единичной сфере, dq — мера на Q, порожденная римановой метрикой. Можно показать, что множество траекторий, попадающих в особые точки границы, имеют меру нуль.

Динамическая система, отвечающая равномерному движению n материальных точек на отрезке, упруго отражающихся друг от друга и от концов отрезка, сводится к биллиарду в n-мерном симплексе. Движение n упругих шаров в трехмерном кубе сводится к биллиарду в $3n$-мерном кубе, из которого вырезано $n(n-1)/2$ цилиндров.

Рассмотрим в d-мерном евклидовом пространстве бесконечное множество непересекающихся между собой шаров (рассеивателей). На дополнении к множеству рассеивателей разбросано по закону Пуассона бесконечное число точечных частиц. Каждая из этих частиц движется с постоянной скоростью и при столкновении с любым рассеивателем отражается от него по закону «угол падения равен углу отражения». Газом Лоренца называется динамическая система, отвечающая движению этого бесконечного ансамбля частиц.

Эргодические свойства биллиардов существенно зависят от вида границы ∂Q. Например, у биллиарда внутри достаточно гладкой выпуклой кривой существует бесконечное число каустик. Условие гладкости границы существенно, так как имеются примеры выпуклых областей, биллиарды в которых являются K-системами и изоморфны сдвигу Бернулли.

Если граница является всюду выпуклой внутрь области Q, то такие биллиарды называются рассеивающими. В частности, к рассеивающим биллиардам относится газ Лоренца. Математическое изучение эргодических свойств рассеивающих биллиардов началось с работы [1], в которой, в частности, было показано, что такие системы обладают гиперболической структурой.

Для гиперболических динамических систем с помощью специальной геометрической конструкции — марковского разбиения фазового пространства — многие важные с точки зрения физики проблемы сводятся к задачам теории вероятностей.

Пусть μ_0 — вероятностная мера на M, абсолютно непрерывная по отношению к μ, так что соответствующая плотность непрерывно дифференцируема. Для любого $t > 0$ положим $q_t(s) = \frac{1}{\sqrt{t}} q(st)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Мера μ_0 индуцирует распределение вероятностей μ_t на множестве всех траекторий $q_t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, являющихся элементами пространства $C_{[0,\,1]}(R^d)$. В [2], [3] для двумерного периодического газа Лоренца с ограниченной длиной свободного пробега и при некоторых дополнительных ограничениях на конфигурацию рассеивателей был доказан принцип инвариантности Донскера. Новая конструкция марковского разбиения позволяет обобщить этот результат для произвольной периодической конфигурации рассеивателей в любой размерности.

Теорема. *Для любой периодической конфигурации рассеивателей последовательность мер μ_t при $t \to \infty$ слабо сходится к мере Винера.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Г. Синай. Динамические системы с упругими отражениями.— Эргодическая теория рассеивающих биллиардов.— УМН, 1970, 25:2, с. 141—192.

[2] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai. Markov partitions for dispersed billiards.— Commun. Math. Phys., 1980, 77, p. 247—280.

[3] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers.— Commun. Math. Phys., 1981, 78, p. 479—497.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избран В. Б. Матвеев.

Заседание 23 ноября 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Приветствие от ЛМО Александру Даниловичу Александрову в связи с его 70-летием.

2. А. Д. Александров «Научная постановка вопроса о разработке программы по математике для средней школы».

1°. Научные основы всякого преподавания состоят прежде всего в том, что преподавать нужно правду. (Однако этому сплошь и рядом не придают первостепенного значения.)

2°. Научные основы преподавания подразумевают преодоление узости и формализма в определении понятий, в выборе уровня строгости и др. (Ошибочен распространенный взгляд, абсолютизирующий строгость в стандартном преподавании.)

3°. Удовлетворительное с точки зрения научных основ построение курса математики представляет чрезвычайные трудности.

Заседание 14 декабря 1982 г.

Заседание проводилось совместно с семинаром по математической логике ЛОМИ, было посвящено памяти С. Ю. Маслова (1939—1982).

1. Современное состояние теории формальных систем.

Выступления Н. А. Шанина, Г. Е. Минца, В. П. Оревкова, А. О. Слисенко, Г. В. Давыдова.

Заседание 28 декабря 1982 г.

1. Я. Г. Синай (Москва) «Канторовы множества в физических задачах».

В последнее время канторовы множества под видом пространств дробной размерности (фрактали, по терминологии Б. Мандельброта) встречаются в разнообразных физических задачах. В докладе описаны следующие примеры таких задач:

1°. Универсальность Фейгенбаума.

2°. Странные аттракторы.

3°. Спектр уравнения Шрёдингера с почти периодическим потенциалом.

4°. Фазовые переходы «соизмеримость-несоизмеримость».

Заседание 15 февраля 1983 г.

1. А. Б. Александров «Внутренние функции в шаре».

Проблема о существовании внутренних функций в шаре была решена в конце 1981 г. докладчиком [1] и Э. Ловом [2] независимо и почти одновременно. В настоящее время имеется по крайней мере три доказательства существования внутренних функций в шаре. Третье доказательство основано на очень красивом результате П. Войтащика — И. Рыля [3] и использует L^2-технику. (В то время как доказательство в [1] использует технику пространств L^p с $p < 1$.)

Пусть B обозначает открытый единичный шар в пространстве $\mathbb{C}^n$, S — его граница. Пусть m обозначает «поверхностную» вероятностную меру на сфере S. Обозначим через $A(S)$ пространство всех голоморфных в B функций, непрерывных вплоть до границы. Символом $H^p(S)$ будем обозначать класс Харди в шаре B. Всюду ниже φ обозначает положительную полунепрерывную снизу функцию на сфере S.

Теорема 1 [1]. *Если $\varphi \in L^1(S)$, то существует положительная сингулярная мера ν на сфере S такая, что $\nu(S) = \int\limits_S \varphi\, dm$ и интеграл Пуассона меры $\varphi \cdot m - \nu$ — плюригармоническая в шаре B функция.*

Теорема 2 ([1], [2]). *Если $\varphi \in L^p(S)$ $(0 < p \leqslant +\infty)$, то существует функция $f \in H^p(S)$ такая, что $|f| = \varphi$ почти всюду на S и $f(0) = 0$.*

Теорема 3 [4]. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f \in A(S)$, что $f(0) = 0$, $|f| \leqslant \varphi$ всюду на S и $m\{|f| \neq \varphi\} < \varepsilon$.*

Аналоги теорем 2 и 3 для случая ограниченной строго псевдовыпуклой области с C^2-границей были получены Э. Ловом [5]. Оказывается, что аналоги теорем 1—3 имеют место в довольно общей абстрактной ситуации. В этой же ситуации справедлива и теорема Н. Сибони — М. Хакима [6]. Этот абстрактный подход вместе с результатами работы [5] показывает, что теорема 1 тоже имеет место для ограниченных строго псевдовыпуклых областей с C^2-границей. Кроме того, этот абстрактный подход позволяет получить аналоги теорем 1—3 не только для произвольных ограниченных симметрических областей и даже для областей Зигеля первого и второго рода, но также потребовать в теоремах 1—3, чтобы мера $\varphi \cdot m - \nu$ и функция f имели весьма редкий «спектр».

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Александров. Существование внутренних функций в шаре.— Матем. сб., 1982, 118:2, с. 147—163.
[2] E. Low. A construction of inner functions on the unit ball in $\mathbb{C}^n$.— Invent. Math., 1982, 67:2, p. 223—229.
[3] J. Rull, P. Wojtaszczyk. On homogeneous polynomials on a complex ball.— The University of Texas at Austin, Preprint, 1981.
[4] А. Б. Александров. О граничных значениях голоморфных в шаре функций.— ДАН, 1984.
[5] E. Low. Inner functions and boundary values in $H^\infty(\Omega)$ and $A(\Omega)$ in smoothly bounded pseudoconvex domains.— Princeton University dissertation, 1983.
[6] M. Hakim, N. Sibony. Fonctions holomorphes bornees sur la boule unite de $\mathbb{C}^n$.— Invent. Math., 1982, 67:2, p. 213—222.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избран С. Ю. Славянов.

Заседание 1 марта 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. В. И. Арнольд (Москва) «Особенности систем лучей».

Системами лучей Гамильтон назвал то, что теперь называется лагранжевыми многообразиями. Вариационные задачи с односторонними ограничениями (например, задача об обходе препятствия) приводят к лагранжевым многообразиям, которые сами имеют особенности. В докладе рассказано о выражении этих особенностей через геометрию SL(2, R)-модулей (связь с которыми заранее не очевидна) и о многомерном обобщении теории эвольвент Гюйгенса, первым рассмотревшего задачу об обходе препятствия. (Более подробно см. УМН, 1983, 38 : 2(228), с. 77—147.)

Заседание 22 марта 1983 г.

1. Д. Б. Фукс (Москва) «Тождества Эйлера — Якоби — Макдональда и когомологии алгебр Ли».

В последние годы была найдена замечательная связь между классическими тождествами Эйлера — Якоби и градуированными алгебрами Ли. Макдональд и его последователи связали эти тождества с формулами характеров.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избраны С. А. Назаров, М. В. Паукшто, А. И. Кароль, Н. В. Борисов, М. И. Захаревич, Н. Б. Маслова, А. Н. Подкорытов.

Заседание 29 марта 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. В. А. Рохлин «Недавний прогресс в четырехмерной топологии».

Обзор замечательных открытий, сделанных недавно в топологии четырехмерных многообразий. Были рассмотрены: теорема Доналдсона о формах, реализуемых гладкими односвязными замкнутыми четырехмерными многообразиями; теорема Фридмана о многообразиях Кассона; классификационная теорема Фридмана о почти сглаживаемых односвязных замкнутых четырехмерных многообразиях; теорема Квинна о сглаживании четырехмерных многообразий; следствия теорем Фридмана и Дональдсона, относящиеся к некомпактным многообразиям (существование гладких многообразий, гомеоморфных, но не диффеоморфных, многообразиям $S^3 \times R$, $S^2 \times S^2 - pt$ и $\mathbb{R}^4$).

Заседание 12 апреля 1983 г.

1. Н. В. Крылов (Москва) «Нелинейные уравнения в частных производных и управляемые процессы».

В последние десять лет в теории вероятностей были созданы методы исследования задач оптимального управления случайными процессами диффузионного типа. Как и в задачах управления детерминированными процессами, здесь имеются два подхода: 1) стохастический принцип максимума (вариационное исчисление), 2) уравнения Беллмана (уравнение Гамильтона — Якоби). Более плодотворный второй подход позволил выделить широкий класс уравнений (включающий уравнения Монжа — Ампера), где удалось доказать разрешимость вероятностными методами. Затем ряд авторов доказали это же традиционными методами.

Заседание 26 апреля 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Приветствие от Ленинградского математического общества С. Г. Михлину в связи с его 75-летием.

2. О. А. Олейник (Москва) «Некоторые задачи усреднения в теории упругости».

1°. Краевые задачи для системы теории упругости с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами и краевые задачи в перфорированных областях. Усредненная краевая задача. Оценки разности решений исходной и усредненной задач. Асимптотическое разложение решения. Случай почти периодических коэффициентов.

2°. Колебания пористых тел и композитных материалов с периодической структурой. Усредненная задача. Формулы для коэффициентов усредненной системы. Оценки отклонения собственных чисел и собственных функций.

Заседание 17 мая 1983 г.

1. Сообщение представителя издательства «Мир» (Г. М. Цуккерман) о планах изданий на 1984—1985 гг.

2. Отчет правления ЛМО и отчет ревизионной комиссии.

К настоящему времени ЛМО насчитывает 189 человек, из них 87 докторов физико-математических наук. Регулярно дважды в месяц проводятся научные заседания.

В сентябре 1981 г. организована секция математики Дома ученых им. М. Горького при АН СССР, совместно с которой проводится часть заседаний. Руководство секцией осуществляет бюро секции совместно с правлением ЛМО. С 1981 г. в Петродворце возобновил работу математический лекторий для студентов Ленинградского университета, организованный ЛМО. Прочитаны лекции: Н. Н. Петров «Кубик Рубика», А. С. Меркурьев «Простые алгебры», Г. С. Цейтин «Представления знаний», Ю. Д. Бураго «Смешанные объемы», В. И. Арнольд «Теория катастроф», Н. А. Шанин «Анализ безканторовской теории континуума», Ю. А. Давыдов «Индикатриса Банаха».

3. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

Состав вновь избранного правления: С. М. Лозинский (президент), О. А. Ладыженская (вице-президент), А. М. Вершик (вице-президент). Члены правления: С. М. Ермаков, С. Г. Михлин, Б. С. Павлов, В. Ф. Лазуткин и М. З. Соломяк (комиссия по программе заседаний ЛМО), О. Я. Виро и Ю. А. Давыдов (математический лекторий для студентов), В. Н. Судаков (казначей), Г. И. Натансон (секретарь ЛМО). Ревизионная комиссия: В. Н. Фомин (председатель), В. П. Хавин, Н. К. Никольский. Состав бюро секции математики при Доме ученых: М. И. Башмаков, А. М. Вершик (зам. председателя), И. А. Ибрагимов, С. В. Керов, С. М. Лозинский (председатель), Б. С. Павлов, В. Г. Тураев (секретарь), Н. Н. Уральцева, С. В. Хрущёв.

4. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1983 г. Премия присуждена Е. К. Склянину (ЛОМИ) за работу: «О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера».