1985 г. март—апрель т. 40, вып. 2(242)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1])

Заседание 4 октября 1983 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1983 г.
2. Лекции лауреатов премии.

А. С. Меркурьев «Делимые группы Брауэра».

Хорошо известно, что группа Брауэра поля является абелевой периодической группой. Примеры полей, для которых можно явно вычислить группу Брауэра, показывают, что эта группа близка к делимой. Однако долгое время не удавалось построить пример абелевой периодической группы, которая не изоморфна группе Брауэра поля. Первые такие примеры были построены в [3], где было доказано, что при $p = 2$ или 3 p-компонента группы Брауэра любого поля либо является элементарной 2-группой, либо содержит нетривиальную делимую подгруппу. В [1] Файн и Шакер выдвинули гипотезу о том, что любая делимая абелева периодическая группа изоморфна группе Брауэра некоторого поля. Настоящая лекция содержит доказательство этой гипотезы.

Теорема. *Для любой делимой абелевой периодической группы A существует поле F такое, что* $\mathrm{Br}(F) \simeq A$.

Доказательство. Построим по индукции последовательность вложенных друг в друга полей $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ и подгруппы A_i, $B_i \subset \mathrm{Br}(F_i)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) Группа A изоморфна A_1.

2) $\mathrm{Br}(F_i) = A_i \oplus B_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

3) Ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{Br}(F_i) \to \mathrm{Br}(F_{i+1})$, индуцированного вложением полей $F_i \subset F_{i+1}$, совпадает с группой B_i, а группа A_i изоморфно отображается на A_{i+1}.

Пусть сначала $i = 1$. Выберем такое поле F_1, что группа A изоморфна некоторой подгруппе $A_1 \subset \mathrm{Br}(F_1)$ ([2], теорема 2). Поскольку группа A_1 делима, она выделяется прямым слагаемым в $\mathrm{Br}(F_1)$, т. е. существует такая подгруппа $B_1 \subset \mathrm{Br}(F_1)$, что $\mathrm{Br}(F_1) = A_1 \oplus B_1$.

Пусть мы уже построили поля $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$ и соответствующие подгруппы A_i, $B_i \subset \mathrm{Br}(F_i)$. Выберем теперь такое поле F_{n+1}, содержащее F_n, что ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{Br}(F_n) \to \mathrm{Br}(F_{n+1})$ совпадает с группой B_n ([2], теорема 1). Обозначим через A_{n+1} образ группы A_n при этом гомоморфизме, а через B_{n+1} — любое дополнение к A_{n+1} (группа $A_{n+1} \simeq A$ делима). Построение цепочки полей завершено.

Обозначим теперь через F объединение всех полей F_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, что

$$\mathrm{Br}(F) = \varinjlim \mathrm{Br}(F_i) = \varinjlim (A_i \oplus B_i) = \varinjlim A_i \simeq A.$$

Теорема доказана.

---

[1]) См. УМН, 1984, 39:1(235), с. 181—188.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Fein, M. Schacher. Brauer groups of fields.— Ring Theory and Algebra, 1980, 3, p. 345—356.
[2] B. Fein., M. Schacher. Relative Brauer groups. I.— J. Reine Angew. Math., 1981, 321, p. 179—194.
[3] A. S. Merkurjev. Brauer groups of fields.— Comm. in Algebra, 1983, 11:22, p. 2611—2622.

Е. К. Склянин «Об одной алгебре порождаемой. квадратичными соотношениями».

Доклад посвящен исследованию ассоциативной алгебры $\mathcal{F}$, порождаемой четырьмя образующими S_0, S_1, S_2 и S_3 и квадратичными соотношениями

$$(1)\qquad \begin{cases} (S_0S_1-S_1S_0)=iJ_{23}\,(S_2S_3+S_3S_2), \\ (S_1S_2-S_2S_1)=i\,(S_0S_3+S_3S_0), \end{cases}$$

а также получающимися из них циклическими перестановками индексов 1, 2, 3 (всего 6 соотношений). При этом предполагается, что константы $J_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношению

$$(2)\qquad J_{12}+J_{23}+J_{31}+J_{12}J_{23}J_{31}=0.$$

Алгебра $\mathcal{F}$ была предложена в работе [1] как алгебра наблюдаемых для некоторой вполне интегрируемой квантовомеханической системы.

Так как алгебру $\mathcal{F}$ можно рассматривать как деформацию универсальной обертывающей алгебры Ли $U(\mathrm{gl}\,(2))$, которая получается при $J_{\alpha\beta}\equiv 0$, неудивительно, что многие свойства алгебры $\mathcal{F}$ копируют соответствующие свойства $U(\mathrm{gl}\,(2))$. Так, алгебра имеет квадратичные по S_α операторы Казимира и обладает серией конечномерных представлений, вырождающихся в неприводимые конечномерные представления $\mathrm{sl}(2)$. Вместе с тем существуют еще две серии конечномерных представлений алгебры $\mathcal{F}$, которые не имеют уже соответствий в теории алгебр Ли. Подробное описание свойств алгебры $\mathcal{F}$ и ее представлений приведены в работах [1], [2].

Остановимся в заключение на некоторых нерешенных вопросах. Остается недоказанной в общем случае сформулированная в [1] гипотеза об аналоге теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта для алгебры (в случаях $J_{12}=0$ или $J_{23}=0$ эта гипотеза доказана недавно Л. А. Тахтаджяном). Невыясненным остается все, что касается неприводимости построенных в [2] представлений алгебры $\mathcal{F}$. Неизвестно также, содержатся ли среди построенных представлений все неприводимые конечномерные представления алгебры $\mathcal{F}$. Как сообщил докладчику А. М. Вершик, в случае $J_{12}=J_{23}=-J_{31}$ (относящемся к случаю 1в по классификации статьи [2]) ему удалось перечислить все неприводимые самосопряженные представления алгебры $\mathcal{F}$, размерность которых, как оказалось, может быть 1, 2 и 4 и которые параметризуются тремя вещественными параметрами, напоминая тем самым представления серии б) статьи [2].

Интересно было бы также расширить аналогию с универсальной обертывающей алгеброй Ли, введя на алгебре $\mathcal{F}$ операцию коумножения φ: $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ и задав на ней, тем самым, структуру алгебры Хопфа [3]. Так, в случае $J_{12}=0$, $J_{23}=-J_{31}=c^2$ коумножение φ имеет вид

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi\,(S_0)=S_0\cdot S_0+c^2S_3\cdot S_3, \\ \varphi\,(S_3)=S_3\cdot S_0+S_0\cdot S_3, \\ \varphi\,(S_\pm)=S_\pm\cdot(S_0+cS_3)+(S_0-cS_3)\cdot S_\pm, \end{cases}$$

где $S_\pm=S_1\pm iS_2$. Непосредственным вычислением проверяется, что отображение φ сохраняет соотношения (1) и коассоциативно. Обобщение формул (3) на произвольные $J_{\alpha\beta}$ пока неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. К. Склянин. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. I.— Функц. анализ, 1982, 16 : 4, с. 27—34.
[2] Е. К. Склянин. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. II. Представления квантовой алгебры.— Функц. анализ, 1983, 17 : 4, с. 34—48.
[3] E. Abe. Hopf algebras.— Cambridge: Univ. Press, 1980.

Заседание 25 октября 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. А. И. Кострикин (Москва) «Конечные простые группы: результаты и проблемы».

Считается, что конечные простые группы расклассифицированы. Однако математики проявляют сдержанность в оценке степени завершенности этого фундаментального достижения. Почему? В докладе рассказано о состоянии вопроса и деятельности, которая ведется в направлении совершенствования доказательства в реализации существующих простых групп. В конечном счете это сводится к лучшему пониманию природы простых групп и обнаружению новых связей их с другими областями математики. В частности, рассказано о решетках в алгебрах Ли и группах их автоморфизмов.

Заседание 15 ноября 1983 г.

1. А. Н. Паршин (Москва) «О гипотезе Морделла».

Гипотеза Морделла — одно из центральных утверждений теории диофантовых уравнений — доказана в этом году молодым немецким математиком Фалтингсом. Из нее, в частности, следует конечность числа решений в целых числах уравнения «великой теоремы Ферма» для $n \geqslant 3$. Работа опирается на доказанные ранее глубокие факты алгебраической теории чисел.

Заседание 29 ноября 1983 г.

1. Ю. Ш. Абрамов «Вариационные методы в теории операторных пучков».

В докладе изложены новые подходы к вариационному исследованию спектра оператор-функций (пучков операторов — п. о.). Возникающие здесь задачи, как правило, не только включают соответствующие проблемы из спектральной теории операторов, но и обогащают их многообразием постановок одного и того же вопроса. Для спектра п. о. приводится ряд аналогов классических результатов: вариационные принципы, теоремы о качественном и количественном его поведении и др. Рассказывается об общих экстремальных задачах, содержащих в себе спектральные задачи для п. о. в вариационной постановке, и о связанной с ними «невыпуклой» теории двойственности. Рассмотрены также некоторые приложения.

Подробное изложение см. в книге докладчика «Вариационные методы в теории операторных пучков».— Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества избраны Ю. Ш. Абрамов, А. Ф. Иванов, А. Н. Кириллов, А. Е. Каган, Е. П. Ожегова.

Заседание 6 декабря 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секциями математики и физики Ленинградского Дома ученых.

1. Б. Б. Кадомцев, Ю. А. Данилов (Москва) «Синергетика: идеи, методы, надежды».

Физика, химия и биология изучали процессы самоорганизации своими специфическими средствами и методами. Последние годы предпринимаются настойчивые попытки создания единой теории процессов самоорганизации, применимой к системам различной природы. Единый подход позволяет установить ряд аналогий и обнаружить новые явления и ранее неизвестные типы решений. Разработаны первые теоретические модели, воспроизводящие сложные режимы самоорганизации, наблюдаемые в реальных системах.

Создание теории, охватывающей широкий круг явлений, наталкивается на определенные трудности: отсутствие адекватного математического аппарата, строгих определений, достаточно общих понятий. Преодоление этих трудностей требует и одновременно является источником новых идей и методов.

Заседание 20 декабря 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых и было посвящено Леонарду Эйлеру (1707—1783).

1. Ю. Х. Копелевич «Л. Эйлер и Петербургская Академия наук».

В выступлении рассказано об условиях службы Эйлера в Петербургской Академии наук, способствовавших становлению его как ученого мирового значения.

2. Н. Н. Поляков «Значение работ Эйлера по механике».

В докладе освещено обоснование Эйлером ньютоновой механики с помощью дифференциального исчисления.

3. Е. П. Ожегова «Рукописное наследие Эйлера по теории чисел».

Рассмотрено влияние рукописного наследия Эйлера на творчество К. Г. Якоби, П. Л. Чебышёва и других математиков.

Заседание 28 февраля 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математиков Ленинградского Дома ученых.

1. В. А. Якубович «Теория адаптивных систем (метод рекуррентных целевых неравенств)».

В докладе был сделан обзор работ по методу рекуррентных целевых неравенств (методу РЦН), частично представленных в [1], [2], а также опубликованных в основном в журналах технического профиля. Формальное определение адаптивной системы имеется в [1]. Задание адаптивной системы предполагает задание множества $\Xi = \{\xi\}$ (класса адаптации) уравнений системы (включая уравнение регулятора) и цели управления (ЦУ), содержащих $\xi \in \Xi$. (Элемент ξ объединяет все то, что неизвестно и может меняться.) В простейшем случае ЦУ задается неравенствами, связывающими переменные в каждый момент времени. Уравнения регулятора не должны содержать ξ; в задачах адаптации именно эти уравнения подлежат определению из условия адаптивности системы. Система называется адаптивной, если для любого $\xi \in \Xi$ существует такой момент $t_*(\xi)$, что ЦУ выполнена для всех $t \geqslant t_*(\xi)$. Если спустя время адаптации $t_*(\xi)$ меняется $\xi \in \Xi$, то спустя новое время адаптации ЦУ снова начинает выполняться, что и означает приспособляемость системы к изменению внешних условий и цели управления.

Предполагается, что существует закон управления $u_t = U^0(\sigma_t, \xi)$, для которого выполнена ЦУ $Q_t \geqslant 0$ $\forall t$. Здесь u_t, σ_t — управление и сенсор в момент t. Наиболее интересные задачи адаптации сводятся к восстановлению неизвестной функции $U^0(\sigma_t, \xi)$ (неизвестного «хорошего» закона управления) в своеобразной и нестандартной ситуации, тогда известна лишь косвенная специфическая информация о качестве принятого приближения этой функции.

В методе РЦН $U^0(\sigma, \xi)$ точно или приближенно представляется в виде $U^0(\sigma, \xi) = \sum v_j(\sigma)\tau_j(\xi) \overset{\mathrm{def}}{=} U[\sigma, \tau(\xi)]$, $\tau(\xi) \in \mathbb{R}^N$ и отыскивается $\tau(\xi)$ с точностью до выполнения ЦУ. Регулятор ищется в виде $u_t = U(\sigma_t, \tau_t)$, $\tau_{t+1} = T(\sigma_{t+1}, \sigma_t, \tau_t)$. Для определения T составляются РЦН $Q_t(\tau) \geqslant 0$. Неравенство $Q_t(\tau) \geqslant 0$ определяет множество всех $\tau \in \mathbb{R}^N$, для которых при $u_t = U(\sigma_t, \tau)$ и при заданных значениях всех переменных до момента t выполнена ЦУ. Обычно не только $\tau(\xi) \in \mathcal{G}_t = \{\tau\colon Q_t(\tau) \geqslant 0\}$, но и некоторый шар $|\tau - \tau(\xi)| \leqslant \varepsilon$ содержится в $\bigcap_t \mathcal{G}_t$. Если $\tau_t = \hat{\tau} = \mathrm{const}$ и $Q_t(\hat{\tau}) \geqslant 0$ при $t \geqslant t_*(\xi)$, то система адаптивна. Такие алгоритмы T называются конечно сходящимися алгоритмами (КСА) решения счетной системы РЦН $Q_t(\tau) \geqslant 0$. Основной характеристикой КСА является оценка числа $r = r(\xi)$ невыполненных неравенств $Q_t(\tau_t) < 0$ через число $\delta = \varepsilon\,|\,r_0 - \tau(\xi)\,|^{-1}$. Она должна быть существенно лучше оценки для метода полного перебора. (Отметим, что получить оценку времени адаптации $t_*(\xi)$ принципиально невозможно, ибо в общем случае неравенства $Q_t(\tau_t) < 0$ могут быть сколь угодно «растянуты» во времени.) Для выпуклых областей $\mathcal{G}_t$ КСА с «хорошими» оценками для $\tau(\xi)$ получены в [3] и др. Именно таким способом решено большое число разнообразных задач адаптации (подробности и библиографию см. в [1], [2]). Заметим еще, что КСА должен быть представим в виде $\tau_{t+1} = T(\sigma_{t+1}, \sigma_t, \tau_t)$ и, в частности, не должен зависеть от ξ; поэтому для одних и тех же РЦН одни КСА применимы, а другие нет. Имеются и другие осложняющие обстоятельства.)

А. С. Немировский обратил внимание автора на то, что известный алгоритм эллипсоидов является КСА для линейных РЦН. Он поэтому также применим в задачах адаптации. Сравнение оценок $r(\xi)$ показало, что при любом N и малых δ (больших необходимых точностях) алгоритм эллипсоидов лучше алгоритмов [3], но при любом фиксированном δ и больших размерностях N алгоритмы эллипсоидов хуже алгоритмов [3]: $r_э \gg r$. Так, например, при $\delta = 10^{-3}$, взяв для наглядности вместо $r_э$ и r при $N \geqslant 29$. При этом $T_э = T = 2$ ч. 47 мин. для $N = 29$; метод же полного перебора дает $T = 3 \cdot 10^{800}$ лет; последние цифры характеризуют эффективность алгоритмов адаптации.

Выбор КСА в задачах адаптации связан и с необходимостью обоснования условий сходимости КСА, что обычно сводится к обоснованию замкнутой нелинейной системы (см. [1]). Основными здесь являются методы теории абсолютной устойчивости и близкие к ним. Методом РЦН решены разнообразные технические задачи (Д. П. Деревицкий, А. Л. Фрадков, Б. Р. Андриевский, Г. С. Аксенов, Б. М. Соколов, В. М. Брейтман, А. В. Зак, Б. Д. Любачевский, Б. А. Перлин и др.), в том числе задачи робототехники (А. В. Тимофеев, В. И. Ружанский, Ю. К. Зотов, Г. Д. Пенев, С. В. Гусев и др.). Промоделировано на ЭВМ поведение различных квазибиологических самообучающихся систем. С. В. Гусевым и С. Л. Шишкиным промоделирован на ЭВМ процесс самообучения ходьбе модели антропоморфного механизма.

Другой подход к развитию теории адаптивных систем (стохастических) предложен ранее Я. З. Цыпкиным [4]; он широко представлен в современной технической литературе. Имеются и другие направления в теории адаптивных систем; они описаны в [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Фомин, А. Л. Фрадков, В. А. Якубович. Адаптивное управление динамическими объектами.— М.: Наука, 1981.

[2] Д. П. Деревицкий, А. Л. Фрадков. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления.— М.: Наука, 1981.

[3] В. А. Якубович. ДАН 1966, **166**:6, с. 1308—1311.

[4] Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.

[5] В. Г. Срагович. Адаптивное управление.— М.: Наука, 1981.

Заседание 20 марта 1984 г.

1. А. М. Вершик «Аменабельность и аппроксимируемость групп и алгебр».

В 1929 г. в журнале «Fundamenta Mathematika» вышла работа фон Неймана «Zur allgemeinen theorie des masses» (К общей теории меры). Ее значение было полностью оценено лишь много позже.

В ней обсуждалась проблема, поставленная Лебегом в 1906 г. о существовании конечно-аддитивного евклидово-инвариантного продолжения меры Лебега на σ-алгебру всех подмножеств R^n. Фон Нейман показал, что определяющими в этой задаче являются чисто алгебраические свойства группы, а не свойства пространства R^n, где действует группа. Это объясняет, почему проблема Лебега решается положительно при $n = 1,2$ (Банах — Тарский, 1924) и отрицательно при $n \geqslant 3$ (Хаусдорф, 1914). Помимо подробного исследования известного парадокса Хаусдорфа (о сфере S^2), автор находит и другие примеры, показывающие, что эффективное действие свободной группы с двумя образующими всегда связано с парадоксами; например, любая мера, решающая проблему Лебега в R^2, не инвариантна относительно $SL(2, \mathbb{R})$, а в R^1 такая мера обязательно обладает свойством: существует дробно-линейное преобразование R^1, которое уменьшает меру некоторого множества, хотя его якобиан на множестве больше 1! Эти остроумные парадоксы, волновавшие тогда крупных математиков, постепенно забылись. Однако анализ работы фон Неймана привел к новому и важному вопросу о том, какие свойства действия групп с инвариантной или квазиинвариантной мерой зависят только от алгебраической природы группы и каков класс групп, гарантирующий данное свойство при всяком действии. Ясно, что такие свойства действия (и соответственно классы групп) должны быть очень грубыми и поэтому принципиальными. В работе фон Неймана выделен класс групп, соответствующий свойству: «иметь положительное решение проблемы Лебега при любом действии»; это класс «измеримых», как назвал их автор, а по нынешней терминологии — «аменабельных», или «имеющих инвариантное среднее», групп. Теперь приходится удивляться тому, как правильно угадан этот класс групп, нашедший применения в значительно более актуальных вопросах. Он естественно появляется в теории динамических систем, теории представлений, теории групп Ли и дифференциальной геометрии, теории вероятностей и математической физике и др. Имеются комбинаторные (Фельнер), вероятностные (Кестен, Вершик — Кайманович), гомологические (Джонсон), функциональные (Диксмье — Хуланицкий), геометрические (Марков — Какутани) и другие критерии аменабельности. Вот несколько результатов последних лет.

В 1981 г. Конн, Фельдман, Орнштейн и Вейс [1], завершая почти 20-летние усилия ряда математиков, доказали замечательную теорему, глубоко вскрывающую аппроксимационный смысл аменабельности: для счетных (соответственно сепарабельных локально-компактных недискретных) групп аменабельность равносильна тому, что всякое (или даже хотя бы одно свободное) действие группы с инвариантной мерой траекторно изоморфно действию $\mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{R}$). Тем самым аменабельные группы составляют в точности тот класс, на который переносятся наиболее общие принципы эргодической теории (эргодические теоремы, энтропия и др.).

Чисто алгебраическое описание класса аменабельных групп до самых последних лет мало продвинулось по сравнению с работой фон Неймана, где показано, что этот класс замкнут относительно перехода к расширениям, подгруппам, фактор-группам, индуктивным пределам и содержит конечные и коммутативные группы. Совсем недавно Р. И. Григорчук [2] привел пример аменабельных групп, которые не получаются этими операциями из конечных и коммутативных. А именно, он построил интересные сами о себе группы промежуточного (между полиномиальным и экспоненциальным) роста. Несколько ранее А. Ю. Ольшанский [3], используя методы, развитые для других целей, построил пример периодической не аменабельной группы, чем опроверг гипотезу, высказанную последователями фон Неймана [4] (а не им самим, как иногда пишут) о том, что всякая неаменабельная группа содержит свободную группу W_2. Ранее идеи таких построений выдвигались разными авторами. Не исключено, что неаменабельными являются группы Адяна — Новикова. В работах Вершика — Каймановича — Березного (см. обзор [5]) приведены другие аналитические характеристики, связанные с аменабельностью (энтропия, асимптотика «гоша» и др.).

Наиболее интересная проблематика связана с перенесением понятия аменабельности на алгебры (ядерность, гиперконечность, инъективность C^*-алгебр — Конн, Хагеруп и др.). Эти понятия относятся к теории C^*- и W^*-алгебр; однако чисто алгебраического определения аменабельности алгебры все еще нет. По-видимому, здесь полезно обобщение критерия аменабельности групп, принадлежащего Кестену в форме, приданной ему Григорчуком (т. е. в терминах роста слов в нормальном делителе свободной группы, задающих копредставление групп —«корост»). Для алгебр соответствующее понятие должно быть связано с грубой классификацией идеалов в свободной алгебре, ранее не рассматривавшейся.

Имеются ли другие столь же радикально различающиеся классы групп, подобно классам введенных фон Нейманом аменабельных и неаменабельных групп? По-видимому, таким же (в классе неаменабельных групп) является свойство (T), введенное Кажданом: изолированность единичного представления в пространстве неприводимых унитарных представлений. Это свойство имеет много применений. Его аналог для алгебр также не изучен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Connes et al. An amenable equivalence relations generated by single transformation.—Ergodic theory and dynamical systems.— 1981, 1 : 4, p. 431—450.

[2] Р. И. Григорчук. К проблеме Милнора о групповом росте.— ДАН, 1983, 271 : 1, с. 30—33.

[3] А. Ю. Ольшанский. К проблеме существования инвариантного среднего на группе.— УМН, 1980, 35 : 4, с. 199—200.
[4] Ф. Гринлиф. Инвариантные средние на топологических группах.— М.: Мир, 1983, с. 1—136.
[5] A. M. Vershik. Amenability and approximation of infinite groups.— Selecta Math. Sov., 1982, 2 : 4, p. 311—330.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества избраны А. А. Киселёв, М. С. Никулин.

Заседание 27 марта 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых и было посвящено Владимиру Ивановичу Смирнову (1887—1974).

С воспоминаниями о жизни и деятельности академика В. И. Смирнова выступили С. М. Лозинский, С. Л. Соболев, Д. К. Фаддеев, Л. В. Канторович, О. А. Ладыженская, С. Г. Михлин, Г. И. Петрашень, Е. И. Эдельштейн.

Заседание 10 апреля 1984 г.

1. М. А. Шубин (Москва) «Нестандартный анализ и теория релаксационных колебаний».

Нестандартный анализ, созданный в начале 60-х годов нашего века А. Робинсоном, часто называют также теорией бесконечно малых: в нем поле действительных чисел расширяется до более широкого упорядоченного поля, уже содержащего бесконечно большие и бесконечно малые числа. Это позволяет, в частности, сделать более естественной теорию сингулярных возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений, считая малый параметр сразу бесконечно малым. На этом пути были, в частности, открыты утки — циклы характерной специальной формы, появление которых сопровождает бифуркацию Хопфа в системах с малым параметром.

В докладе рассказаны основные идеи нестандартного анализа и дан обзор некоторых его приложений в теории релаксационных колебаний.

Подробная статья докладчика и А. К. Звонкина на эту тему опубликована в УМН, 1984, 39:2.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества избраны А. Л. Лихтарников, Н. Н. Ляшенко, В. Н. Солев, В. М. Харламов.

Заседание 17 апреля 1984 г.

Заседание проводилось совместно с общематематическим семинаром ЛОМИ.

1. Ж.-П. Серр (Париж) «О τ-функции Рамануджана».

Заседание 24 апреля 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых и было посвящено 50-летию первой Ленинградской математической олимпиады для школьников.

Весной 1934 г. в Ленинграде состоялась первая в Советском Союзе математическая школьная олимпиада, объявленная и готовившаяся с осени 1933 г. Ее основными организаторами были Б. Н. Делоне и Г. М. Фихтенгольц.

На заседании с воспоминаниями выступили участники первых олимпиад и организаторы олимпиад разных лет: Д. К. Фаддеев, М. Л. Александрова (победительница 1-й олимпиады), В. А. Залгаллер, М. И. Башмаков, А. В. Яковлев, В. Я. Григошин (Дворец пионеров), А. С. Меркурьев, А. Г. Гольдберг (Институт усовершенствования учителей), Н. А. Шанин (победитель 2-й олимпиады), С. В. Рукшин (Дворец пионеров).

Заседание 22 мая 1984 г.

1. А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский «Группы Ли и вполне интегрируемые системы».

Уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, имеют ряд замечательных свойств: эти уравнения гамильтоновы, они обладают большим числом интегралов в эволюции, их решение сводится к задаче Римана. Эти свойства естественно объединяются общей теоретико-групповой схемой, применимой как к обыкновенным дифференциальным уравнениям, так и к уравнениям в частных производных. Ее первоначальный вариант появился в работах Б. Костанта и М. Адлера (библиографию см. в [1]). Эта схема, в частности, непосредственно приводит к известной алгебро-геометрической теории уравнений со спектральным параметром, развивавшейся С. П. Новиковым и др.

Конструкция основана на взаимодействии двух структур алгебры Ли на одном и том же пространстве. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебры Ли, $\mathfrak{g}^*$ — двойственное пространство. Скобка Ли — Пуассона (скобка Кириллова) в $\mathfrak{g}^*$ определяется тем, что для линейных функций на $\mathfrak{g}^*$, т. е. элементов алгебры $\mathfrak{g}$, она совпадает со скобкой Ли в $\mathfrak{g}$. Как правило, эта скобка вырождена. Максимальные невырожденные подмногообразия для нее — орбиты коприсоединенного действия Ad^* группы G в $\mathfrak{g}^*$. Центр скобки Ли — Пуассона совпадает с подалгеброй $I(\mathfrak{g})$ функций, инвариантных относительно Ad^*.

Определение [1]. Классической R-матрицей называется линейный оператор в алгебре $\mathfrak{g}$ такой, что R-скобка

$$[X, Y]_R = [RX, Y] + [X, RY] \tag{1}$$

есть скобка Ли в пространстве $\mathfrak{g}$.

Основной пример R-матрицы следующий. Предположим, что алгебра $\mathfrak{g}$ представима в виде линейной суммы двух своих подалгебр, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$, и пусть $P_\pm$ — проекторы на $\mathfrak{g}_\pm$. Тогда

$$R = \frac{1}{2}(P_+ - P_-). \tag{2}$$

Теорема 1. 1) *Функции из $I(\mathfrak{g})$ находятся в инволюции относительно R-скобки Ли — Пуассона.* 2) *Пусть $\Phi \in I(\mathfrak{g})$. Уравнения движения, задаваемые гамильтонианом Φ относительно R-скобки, имеют «лаксов» вид*

$$\frac{d}{dt}L = -\operatorname{ad}^* R(M)\cdot L, \tag{3}$$

где $M = d\Phi(L)$.

Геометрический смысл теоремы 1 проясняется при переходе к соответствующим группам Ли [2]. Мы сформулируем результат для R-матрицы вида (2). Пусть $G_\pm$ — подгруппы, отвечающие подалгебрам $\mathfrak{g}_\pm$.

Теорема 2. *Факторизация однопараметрической подгруппы* $\exp tM$:

$$\exp tM = g_+(t)^{-1}g_-(t), \tag{4}$$

где $g_\pm(t)$ — гладкие кривые в подгруппах $G_\pm$, $g_\pm(0) = 1$, — дает решение уравнений движения (3):

$$L(t) = \mathrm{Ad}^*\, g_+(t)\cdot L = \mathrm{Ad}^*\, g_-(t)\cdot L. \tag{5}$$

Итак, для построения уравнений вида (3) нужно указать:

1) R-матрицу; обычно она имеет вид (2);

2) орбиту R-скобки — фазовое пространство системы; для R-матрицы вида (2) она распадается в прямую сумму орбит подалгебр $\mathfrak{g}_\pm$;

3) гамильтониан Φ — инвариант коприсоединенного действия.

Подчеркнем, что R-матрица определяет задачу факторизации, и обратно; R-матрица также определяет гамильтонову структуру лаксовых уравнений. Тем самым гамильтоновость очень тесно связана с задачей факторизации.

Разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$ обычно связано с градуировкой в алгебре $\mathfrak{g}$: если $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_i$, то $\mathfrak{g}_+ = \sum\limits_{i>0} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}_- = \sum\limits_{i\leqslant 0} \mathfrak{g}_i$. Важно отметить, что если $\mathfrak{g}_i$ конечномерны, то орбиты R-скобки конечномерны, хотя алгебра $\mathfrak{g}$ может быть бесконечномерной.

Конечномерные (простые) алгебры Ли приводят лишь к системам типа обобщенных цепочек Тоды. Гораздо большее число интересных систем доставляют аффинные алгебры Ли — алгебры матричнозначных полиномов Лорана от переменной λ и их градуированные подалгебры. Уравнение (3) в этом случае приобретает вид лаксова уравнения со спектральным параметром

$$\frac{d}{dt}L(\lambda) = [L(\lambda), M_\pm(\lambda)], \tag{6}$$

где $M_\pm(\lambda) = \pm P_\pm(M(\lambda))$. Среди получающихся гамильтоновых систем — многомерные волчки в линейном поле сил, периодические цепочки Тоды, ангармонические осцилляторы и др. ([2], [3]). Задача факторизации в этом случае представляет собой задачу Римана — Гильберта об аналитической факторизации матричных функций.

Теорема 2 дает ключ к алгебро-геометрическому описанию решений уравнения (6). Уравнение $\det(L(\lambda) - z) = 0$ задает спектральную кривую X_L матрицы $L(\lambda)$. Для каждой точки $p = (\lambda, z) \in X_L$ имеется одномерное (в случае простого спектра) собственное подпространство $E_L(p)$. Возникает линейное голоморфное расслоение E_L над X_L. Согласно (6) в процессе эволюции кривая X_L не меняется. Из теоремы 2 легко вытекает

Следствие. *Расслоение $E_{L(t)}$ меняется линейно (как точка на якобиане компактификации $\overline{X}_L$ кривой X_L).*

Доказательство. Определим аффинные области $U_\pm \subset \overline{X}_L$ условиями $\lambda^{\pm 1} \neq \infty$; имеем $\overline{X}_L = U_+ \cup U_-$. Поскольку $M = d\Phi(L)$, а $\Phi \in I(\mathfrak{g})$, то $[L, M] = 0$. Следовательно, подпространства $E_L(p)$ — собственные для M: $M \mid E_L(p) = \mu(p)$. Пусть $\exp tM = g_+(t)^{-1}g_-(t)$ — решение задачи факторизации (4); оно существует, по крайней мере, для малых значений t. Согласно (5) эволюция матрицы L дается формулой $L(\lambda, t) = g_+(\lambda, t)L(\lambda)g_+(\lambda, t)^{-1} = g_-(\lambda, t)L(\lambda)g_-(\lambda, t)^{-1}$, где $g_\pm(\lambda, t)$ регулярны в областях $\lambda^{\pm 1} \neq \infty$ на $\mathbb{C}P^1$. Поэтому расслоение собственных векторов $E_{L(t)}$, как подрасслоение в $\overline{X}_L \times \mathbb{C}^n$, над областями $U_\pm$ представляется в виде $E_{L(t)}(p) = g_\pm(\lambda, t)E(p)$: функции $g_\pm(\lambda, t)$ задают изоморфизмы E_L и $E_{L(t)}$ над $U_\pm$. При этом функция перехода в $U_+ \cap U_-$, различающая эти изоморфизмы, есть $g_+(t)^{-1}g_-(t) \mid E_L = \exp tM \mid E_L = \mathrm{ext}\, t\mu$. Таким образом, $E_{L(t)} = E_L \otimes E_t$, где E_t — однопараметрическая подгруппа линейных расслоений, задаваемая функцией перехода $\exp t\mu$. Поэтому в терминах якобиана движение линейно.

Двумеризация лаксовых уравнений приводит к уравнениям нулевой кривизны Захарова — Шабата. Включение этих уравнений в нашу схему требует центрального расширения основной алгебры с помощью коцикла Маурера — Картана [4]. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли функций переменной x со значениями в $\mathfrak{g}$. Определим 2-коцикл ω на $\tilde{\mathfrak{g}}$ равенством

$$\omega(X, Y) = \int dx\, B\left(X, \frac{d}{dx}Y\right), \tag{7}$$

где B — инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Построим по ω центральное расширение $\hat{\mathfrak{g}}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Если форма B невырождена, то коприсоединенное действие группы $\hat{G}$ на $\hat{\mathfrak{g}}^*$ задается калибровочными преобразованиями. Инфинитезимально оно имеет вид

$$\mathrm{ad}^* M \cdot L = c\frac{d}{dx}M + [M, L].$$

Соответствующие гамильтоновы уравнения по скобке Ли — Пуассона принимают вид уравнений нулевой кривизны. Инварианты такого действия — собственные значения преобразования монодромии для уравнения

$$\frac{d}{dx}\psi = L\psi.$$

Если в качестве $\mathfrak{g}$ выбрана аффинная алгебра Ли, то тем самым в нашей схеме воспроизводится обычный формализм метода обратной задачи, и естественно возникают такие уравнения, как нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение ферромагнетика, двумеризованные цепочки Тоды и т. д.

Если в качестве $\mathfrak{g}$ взять алгебру псевдодифференциальных символов, то двумеризация приводит к уравнениям КП и ему подобным 5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Семёнов-Тян-Шанский. Что такое классическая R-матрица.— Функц. анализ, 1983, 17 : 4, с. 17—33.

[2] A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations I, II.— Invent. Math., 1979, 54 : 1, p. 81—100; 1981, 63 : 3, p. 423—432.

[3] А. Г. Рейман. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли.— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, 95, с. 3—54.
[4] А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных.— ДАН, 1980, 251 : 6, с. 1310—1313.
[5] А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский. Гамильтонова структура уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили.— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, 133, с. 212—227.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества избраны А. Л. Вернер, Н. Л. Гордеев, Ю. Г. Дуткевич, А. А. Жиглявский, А. А. Корбут, А. П. Киселёв, В. Л. Кобельский, П. П. Кулиш, М. А. Лифшиц, М. М. Лесохин, В. В. Некруткин, С. Л. Печерский, А. И. Соболев.

Заседание 5 июня 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. И. М. Гельфанд (Москва) «Несколько замечаний об опыте работы в математике и биологии».

2. И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский (Москва) «Модели представлений классических групп и скрытые симметрии».

Для всех комплексных классических групп G построены новые реализации модели представлений G, т. е. суммы всех конечномерных алгебраических неприводимых представлений G, взятых ровно по одному разу. Эти реализации обладают скрытой симметрией: действие алгебры Ли группы G на них естественно продолжается до действия большей (супер-)алгебры Ли. Построение скрытых симметрий основано на геометрической конструкции, аналогичной конструкции твисторов Пенроуза.

Подробный текст публикуется в журнале «Функциональный анализ и его приложения», 1984, 18:3., с. 14—31.

Заседания математического Лектория для студентов при ЛМО в 1983/84 г.

18 октября 1983 г. О. Я. Виро «О расположении прямых в пространстве».
17 ноября 1983 г. А. Н. Паршин «О гипотезе Морделла».
1 марта 1984 г. В. С. Буслаев «Что такое континуальный интеграл».
29 марта 1984 г. Ю. В. Матиясевич «Как перемножить два числа».
12 апреля 1984 г. М. А. Шубин «Что такое нестандартный анализ».
17 мая 1984 г. С. Ю. Пилюгин «Динамика отображений отрезка в себя».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1])

Заседание 25 сентября 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. Приветствие Ленинградского математического общества С. М. Лозинскому в связи с его семидесятилетием.

2. И. П. Мысовских «Об исследованиях С. М. Лозинского по оценке погрешности приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений».

Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x),\qquad x(t_0)=x_0. \tag{1}$$

Система записана в векторной форме, x — вектор с n составляющими, $f(t,x)$ — вектор-функция.

Остановимся на следующих трех направлениях в исследованиях С. М. Лозинского: 1) Оценка погрешности приближенного решения $X(t)$ задачи (1); при этом вектор-функция $X(t)$ задается аналитически. 2) Оценка погрешности численного интегрирования системы (1) методом Адамса. 3) Применение численного интегрирования для получения строгой информации о расположении решения задачи (1).

В работах, относящихся к первому направлению, получены оценки для составляющих и норм вектора $x(t) - X(t)$, где $x(t)$ — точное решение задачи (1). Эти оценки выражены через некоторые характеристики матрицы Якоби вектор-функции $f(t,x)$ и невязку системы (1) на приближенном решении: $X'(t) - f(t, X(t))$. В работах [27], [28] предполагается, что решение $x(t)$ существует на некотором интервале. (Цифры в квадратных скобках означают номера в списке печатных работ С. М. Лозинского, который опубликован в УМН, 1964, т. 19, вып. 6 (120), с. 210—212, и УМН, 1975, т. 30, вып. 2 (182), с. 233—234.) В [29], [30] получены оценки без этого предположения: по заданной вектор-функции $X(t)$ гарантируется определенный интервал $[t_0, T]$, на котором существует точное решение задачи (1). Эти результаты обобщены в [52], [53], где даны рекомендации по их применению и приведены численные примеры.

Ко второму направлению относится работе [35], где указаны априорная и апостериорная оценки погрешности экстраполяционного метода Адамса. Предполагается, что точное решение $x(t)$ существует на том интервале $[t_0, T]$, на котором выполняется численное интегрирование, и указана некоторая область, содержащая это решение. Для проверки этого предположения используются результаты работ первого направления. Полученные оценки существенно улучшают ранее известные оценки и отличны от них как по своей структуре, так и по методу получения. По-видимому, эти оценки до настоящего времени остаются лучшими в литературе. В [35] введено понятие логарифмической нормы матрицы. Это понятие нашло применения в работах по линейной алгебре и дифференциальным уравнениям как самого С. М. Лозинского, так и многих других авторов. Значение логариф-

[1]) См. УМН, 1985, т. 40, вып. 2 (242), с. 213—222.

мической нормы станет ясным, если сопоставить два факта: 1) в оценках она появляется в показателе степени l, 2) она может принимать отрицательные значения.

Третье направление представлено работами [38] и [45]. В [38] введен класс избыточных методов численного интегрирования, обладающий следующими свойствами. Пусть правые части системы (1) и некоторые их частные производные не убывают по каждому аргументу. Если численное интегрирование задачи (1) избыточным методом удается выполнить на некотором интервале, то из этого факта вытекает, что точное решение задачи (1) на этом интервале существует и в узлах интегрирования не превосходит численного решения. Показано, что за счет уменьшения шага интегрирования можно получить сколь угодно хорошее приближение к истинному интервалу существования непродолжимого решения. Существование методов с такими свойствами в литературе не отмечалось. В [45] введены недостаточные методы численного интегрирования, которые дают численное решение с недостатком.

3. Г. И. Натансон «О работах С. М. Лозинского по конструктивной теории функций».

4. С. М. Лозинский «Краткие сведения из истории Ленинградского математического общества (к 25-летию Общества)».

Ленинградское математическое общество (далее, ЛМО) основано 25 лет назад, в сентябре 1959 г. Однако еще в 20-е годы существовало Ленинградское физико-математическое общество, президентом (председателем) которого был член-корреспондент АН СССР Николай Максимович Гюнтер; с 1926 г. Общество издавало журнал. Почетным членом Общества, основателем и первым редактором журнала был вице-президент АН СССР Владимир Андреевич Стеклов. Общество и журнал прекратили существование в 1930 г.

В начале 1953 г. по инициативе академика В. И. Смирнова был организован Ленинградский общегородской математический семинар, заседания которого проходили (2 раза в месяц, кроме каникулярного времени) в Ленинградском доме ученых. Председателем семинара был В. И. Смирнов. Чтобы дать представление о характере работы семинара, приведем названия некоторых из докладов, сделанных в первом полугодии 1953 г.: В. И. Смирнов «Современные проблемы математической физики»; Н. П. Еругин «Методы Ляпунова и вопросы устойчивости в большом»; А. Д. Александров «Отношение геометрии к физике»; М. К. Гавурин «О современных вычислительных машинах»; Л. В. Канторович «Значение современной вычислительной техники для прикладной математики»; А. А. Марков «Теория алгоритмов».

Семинар работал до сентября 1959 г. Всего на семинаре было сделано 143 доклада, из них 9 иногородними и 2 иностранными докладчиками. Среди докладов было примерно 10 обзорных и несколько информационных — о планах издания математической литературы, о международных математических съездах. Одно из заседаний было посвящено памяти Е. И. Золотарёва и одно — памяти И. А. Лаппо-Данилевского. Образование семинара было отмечено УМН (1953 г., вып. 6, с. 159—161), и работа семинара систематически освещалась в УМН в среднем два раза в год. Математической общественностью семинар воспринимался как образование «по существу Ленинградского математического общества» (слова в кавычках взяты из статьи П. С. Александрова, И. Н. Векуа, М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева, посвященной 70-летию В. И. Смирнова (УМН, 1957, т. 12, вып. 6, с. 200).

В 1959 г. был положительно решен вопрос о создании ЛМО; его устав был утвержден Министерством высшего образования СССР в апреле 1959 г. По этому уставу Общество создавалось при ЛГУ и подчинялось непосредственно ректору университета. 29 сентября 1959 г. состоялось учредительное собрание ЛМО. На этом собрании было избрано Правление в составе: Ю. В. Линник (президент), О. А. Ладыженская и С. М. Лозинский (вице-президенты), А. Д. Александров, Б. А. Венков, А. В. Малышев (секретарь), С. Г. Михлин, Н. Н. Поляхов, В. И. Смирнов (казначей).

С созданием ЛМО общегородской математический семинар прекратил свою работу; Общество приняло на себя его функции, собираясь с той же периодичностью, что и семинар, но заседания Общества стали проводиться на мат.-мех. ф-те ЛГУ (Васильевский остров, 10 линия, д. 33), а с 1981 г. — одно из двух заседаний в месяц — в Доме ученых.

Всего до 1984 г. было 11 распорядительных собраний с отчетом и перевыборами Правления, проходивших один раз в два года. В 1965 г. Ю. В. Линник сложил с себя обязанности президента ЛМО. Президентом был избран С. М. Лозинский, вице-президентами — Б. З. Вулих и Д. К. Фаддеев. С 1970 по 1978 гг. вице-президентами избирались Б. З. Вулих и О. А. Ладыженская, а с 1978 г. по настоящее время — О. А. Ладыженская и А. М. Вершик.

Динамика роста количества членов Общества: при основании — 49 человек, в феврале 1963 г.— 92, в мае 1970 г.—93, в мае 1973 г.—123, в октябре 1978 г.—150, в сентябре 1984 г.—209, в мае 1985 г.—224. Среди них (май 1985 г.): академиков — 2, членов-корреспондентов АН — 4, докторов наук — 91, кандидатов наук — 121, без ученой степени — 6. С. Н. Бернштейн, А. Д. Александров, Л. В. Канторович и А. А. Марков избраны в 1966 г. почетными членами Общества. В. И. Смирнов в 1962 г. избран почетным членом, а в 1967 г.— почетным президентом ЛМО. В настоящее время Общество объединяет в своих рядах почти всех активно работающих математиков Ленинграда и в первую очередь математиков университета и ЛОМИ АН СССР.

В УМН опубликованы материалы обо всех заседаниях ЛМО, за исключением заседаний первого полугодия 1969 г. Информация помещается раз в год, как правило, с тезисами докладов. В каждом отчете дается ссылка на предыдущую публикацию.

С сентября 1959 г. по сентябрь 1984 г. в Обществе сделано ленинградскими математиками 203 доклада, иногородними — 80, иностранными математиками — 11 (в эти числа не входят информационные доклады и доклады по вопросам преподавания).

В 1970 г. в Правлении ЛМО создана программная комиссия (председатель А. М. Вершик), которая занялась планированием и организацией докладов и, в частности, организовала большой цикл докладов о современных проблемах математики. В результате интерес к заседаниям постепенно стал повышаться, в ряды Общества было привлечено много молодежи. Возросло абсолютное и относительное количество обзорных докладов и докладов, сделанных иногородними математиками (до 1970 г. обзорные доклады составляли примерно седьмую часть всех докладов, после — больше четверти, доклады иногородних математиков соответственно 1/8 и 1/3), расширилась проблематика и оживилась деятельность Общества в целом. Среди докладчиков, кроме ленинградцев, математики Москвы, Новосибирска, Киева и др. Тематика докладов охватывает почти все области математики и ряд ее приложений; при этом организаторы стараются отразить все сколько-нибудь крупные математические события у нас в стране и за рубежом. Много докладов делают молодые математики Ленинграда.

В 1976 г. при ЛМО был организован математический лекторий для студентов мат.-мех. и других факультетов ЛГУ; доклады лектория посвящены отдельным проблемам или областям математики, носят обзорный характер и доступны студентам 3—5 курсов.

С 1981 г. при Ленинградском доме ученых организована математическая секция и заседания Общества раз в месяц проводятся совместно с нею в Доме ученых. Председатель секции — вице-президент Общества А. М. Вершик.

С 1962 г. ЛМО ежегодно весной присуждает одну или две премии молодым математикам (не старше 30 лет). Всего было 30 лауреатов (премия не присуждалась в 1969, 1972 и 1979 гг.). Первым лауреатом в 1962 г. был В. Г. Мазья. Начиная с 1970 г., новый сезон открывается докладами лауреатов премии.

ЛМО выдвигало кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР и кандидатов на Ленинские премии. Общество проводило заседания, посвященные памяти Л. Эйлера, П. Л. Чебышёва, С. В. Ковалевской, Н. М. Гюнтера, С. Н. Бернштейна, а также заседания памяти умерших членов Общества И. П. Натансона, Ю. В. Линника, В. И. Смирнова, В. З. Вулиха, Г. Я. Лозановского, С. Ю. Маслова.

В 1984 г. было проведено заседание ЛМО совместно с секцией математики Дома ученых, посвященное 50-летию первой Ленинградской (и первой в СССР) математической олимпиады для школьников.

Регулярно приглашаются представители центральных издательств для информации о выходе математической литературы. Устраиваются совместные заседания (с секцией физики Дома ученых, с Институтом истории естествознания, математико-механическим факультетом и др.).

Состав Правления и ревизионной комиссии, избранной в 1985 г., публикуется в этом отчете.

Заседание 9 октября 1984 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1984 г. Премии присуждены Д. Ю. Григорьеву и А. Л. Чистову за цикл работ «Эффективные алгоритмы в коммутативной алгебре» и В. Л. Кобельскому за работу «Модули многомерных зацеплений».

2. Лекция лауреатов премии: Д. Ю. Григорьев и А. Л. Чистов «Эффективные алгоритмы в коммутативной алгебре».

В последнее время произошел значительный прогресс в построении эффективных алгоритмов для основных вычислительных задач коммутативной алгебры: разложение многочлена от многих переменных на неприводимые множители, разложение многообразия на неприводимые компоненты, проекция многообразия, нахождение вещественных решений системы полиномиальных неравенств, разрешение элементарной теории вещественно замкнутых полей (алгебры Тарского). Для всех этих задач ранее были известны (Кронекер, А. Зайденберг, Д. Коллинз, Х. Вютрих) алгоритмы, требующие экспоненциального (от размера входных данных) времени работы.

Для разложения многочлена от одной переменной над конечным полем алгоритм полиномиальной сложности был предложен в конце 50-х годов Д. К. Фаддеевым, А. И. Скопиным и позже Д. Берлекэмпом. В 1982 г. А. Ленстра, Х. Ленстра, Л. Ловас построили алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочлена от одной переменной над полем рациональных чисел. Далее, Д. Ю. Григорьев, А. Л. Чистов построили алгоритм для разложения многочлена от многих переменных над полем, конечно порожденным над простым подполем данной характеристики, время работы которого полиномально.

Для более общей задачи разложения алгебраического многообразия на неприводимые компоненты (и тем самым для решения системы алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем) Д. Ю. Григорьев, А. Л. Чистов предложили алгоритм субэкспоненциальной (т. е. экспоненциальной от полинома от логарифма) сложности. Далее, Д. Ю. Григорьев, А. Л. Чистов построили алгоритм субэкспоненциальной сложности для нахождения линейной проекции квазипроективного многообразия.

Решение систем полиномиальных неравенств является обобщением задач линейного, а также выпуклого программирования. Н. Н. Воробьев (мл.), Д. Ю. Григорьев предложили алгоритм для нахождения вещественных решений системы полиномиальных неравенств, время работы которого субэкспоненциально.

Разрешимость элементарной теории вещественно замкнутых полей (алгебры Тарского) была впервые установлена А. Тарским. В методологическом плане разрешение алгебры Тарского обобщает все рассмотренные выше задачи. Д. Ю. Григорьев построил алгоритм для ее разрешения, время работы которого на данной формуле алгебры Тарского субэкспоненциально при ограниченном числе перемен кванторов в формуле. С другой стороны, известна (М. Фишер, М. Рабин) нижняя экспоненциальная оценка сложности разрешения алгебры Тарского, установленная для последовательности формул, у которых число перемен кванторов растет линейно с числом переменных.

Заседание 23 октября 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. А. В. Скороход (Киев) «Стохастические полугруппы».

В докладе рассмотрены свойства общих стохастических полугрупп, которые являются обобщением случайных процессов с независимыми приращениями, в первую очередь стохастические полугруппы в пространствах операторов и их представления через операторнозначные процессы с независимыми приращениями.

Заседание 13 ноября 1984 г.

1. В. Е. Захаров (Москва) «Многомерная обратная задача рассеяния».

При помощи метода $\bar\partial$-проблемы построены точные решения некоторых многомерных нелинейных дифференциальных уравнений.

2. Прием в члены Общества; в члены Общества принят Г. С. Осипенко.

Заседание 27 ноября 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева «Новое в теории квазилинейных дифференциальных уравнений».

В докладе рассказано:

1) О новых оценках для решений равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений 2-го порядка общего вида и соответствующих усилениях результатов по разрешимости краевых задач для них.

2) О классической разрешимости задачи Дирихле для некоторых нелинейных эллиптических уравнений.

3) Об исследовании гладкости решений задач с односторонними ограничениями.

Заседание 11 декабря 1984 г.

Председательствующий сообщает, что 3 декабря 1984 г. скончался член ЛМО Владимир Абрамович Рохлин.

1. Ю. Г. Решетняк (Новосибирск) «Пространственные отображения с ограниченным искажением и дифференциальные уравнения».

Отображение области n-мерного пространства называется отображением с ограниченным искажением, если определитель матрицы Якоби оценивается сверху через n-ю степень нормы этой матрицы, с константой, не зависящей от точки области.

Отображение с ограниченным искажением можно рассматривать как многомерный аналог аналитической функции одной переменной. В докладе рассказано об основных результатах теории отображений с ограниченным искажением и используемых в ней методах.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества приняты Г. П. Астраханцев, О. К. Даугавет, И. В. Клокачев, Б. Л. Овсиевич, Л. А. Оганесян, В. Т. Перекрест, Л. А. Руховец.

Заседание 25 декабря 1984 г.

1. В. М. Харламов «Жесткие изотопии алгебраических кривых и поверхностей».

В докладе рассмотрены неособые плоские вещественные алгебраические кривые и неособые вещественные алгебраические поверхности трехмерного пространства. Для них жесткая изотопия может быть определена как непрерывное изменение коэффициентов уравнения, обходящее особенности. Изучение кривых и поверхностей с точностью до жестких изотопий имеет столь же давнюю историю, как родственные вопросы об обыкновенных изотопиях, включенные Гильбертом в его известную 16-ю проблему. Прогресс, достигнутый за последние годы в 16-й проблеме Гильберта, значительно продвинул и изучение жестких изотопий.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества приняты А. С. Матвеев, А. Е. Барабанов.

Заседание 26 февраля 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых. Вычислительный эксперимент в математических исследованиях.

1. Ю. В. Матиясевич «Вычислительные эксперименты по гипотезе Римана».

На примере двух гипотез — гипотезы Римана и более сильной гипотезы Мертенса — показано, что вычислительный эксперимент не может служить полноценной заменой человеческой интуиции. Гипотеза Мертенса была сформулирована на основе большого численного материала и подтверждалась последующими интенсивными вычислениями. Тем не менее она в конце концов была опровергнута в ходе счета на ЭВМ [1]. Напротив, вычислительные эксперименты по гипотезе Римана развернулись только после того, как она была уже сформулирована. Все они (а сейчас проверено, что первые 40 000 000 нулей лежат на критической прямой [2]), а также теоретические исследования служат неформальными доводами в пользу гипотезы Римана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Te Riele H. Mertens' conjecture disproved.— CWI Newslett., 1983, № 1, p. 23—24.
[2] Van de Lune J., te Riele H. J. J. Recent progress on the numerical verification of the Riemann Hypothesis.— CWI Newslett., 1984, № 2, p. 35—37.

2. М. Ю. Любич «Численные эксперименты в теории итераций рациональных функций комплексного переменного».

Основы теории итераций рациональных функций комплексного переменного были заложены в начале века в трудах Фату и Жюлиа. В последние годы эта теория привлекла большой интерес, который в значительной степени связан с возможностями современных компьютеров. С одной стороны, с помощью компьютеров можно рисовать впечатляющие картинки, которые иллюстрируют неожиданную сложность динамики уже для простейших функций и приводят к новым наблюдениям и гипотезам. С другой стороны, теория Жюлиа — Фату дает надежду усовершенствовать методы приближенных вычислений и лучше понять их возможности. В частности, представляется весьма важной задача исследования глобальной сходимости итерационного процесса Ньютона. Простые примеры показывают, что процесс Ньютона может «зацикливаться» для открытого множества начальных приближений $\left(\text{например, для полинома } p(z)=z^3-z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Однако следующий результат является в какой-то степени обнадеживающим.

Теорема. *Пусть корни полинома $p(z)$ вещественны и просты. Тогда почти все траектории интерационного процесса Ньютона $z_{n+1}=z_n-\dfrac{p(z_n)}{p'(z_n)}$ сходятся к корням.*

3. В. А. Залгаллер «Перечень правильногранных многогранников».

4. А. М. Вершик «Рост и асимптотика случайных конфигураций («рост зверей») — теория и эксперимент».

Возможности современных ЭВМ позволяют по-новому взглянуть на трудные задачи об асимптотических свойствах растущих конфигураций, множеств, траекторий процессов с нечисловым пространством состояний. Такие модели рассматривались фон Нейманом, Уламом и их последователями. Характерная постановка вопроса такова: имеется пространство объектов («зверей»), например конечных подмножеств на решетке $\mathbb{Z}^v$ определенного вида (связных, выпуклых и т. п.), и правила допустимых переходов от одного объекта к другому (например, присоединение или стирание граничных узлов объекта или более общее взаимодействие) заданы также вероятности, согласованные с этими правилами. Таким образом, имеется марковский процесс с переменным множеством состояний. Модели такого рода возникают в статистической физике, химии полимеров, эпидемиологии, теории конечных автоматов, комбинаторике, теории представлений групп, теории вероятностей.

Строгих результатов в этой области очень мало, но экспериментаторами (в основном физиками и химиками) накоплен огромный фактический материал. Возникло даже предложение [1] использовать термин «показать» (montrer), в отличие от «доказать» (démontrer), в значении «получить достоверный машинный результат». Например, *показано*, что размерность 7 является критической для ветвящихся случайных блужданий. Трудные задачи об асимптотике случайного роста диаграмм и таблиц Юнга возникают в связи с теорией представлений и аддитивной теорией чисел с растущим числом слагаемых (см. [2]). Особенно неприступными (даже для машинных экспериментов) выглядят задачи о росте трехмерных таблиц Юнга. В теоретических постановках следует помнить и о том, что общие задачи об эргодичности, нетривиальности границы и др. для подобных процессов, как правило, алгоритмически неразрешимы. Поэтому машинный эксперимент и изучение отдельных классов моделей не могут быть заменены общей теорией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Viennot G. Seminar Bourbaki.— Fevrier, 1984, № 626.
[2] Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы. —Функцион. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 1, с. 25—36.

Заседание 12 марта 1985 г.

1. Г. В. Розенблюм «Можно ли услышать форму барабана? — 20 лет спустя».

В 1965 г. М. Кац (см. в [1] изложение его доклада) предложил остроумную формулировку: можно ли услышать форму барабана, т. е. найти область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (с гладкой границей) по спектру оператора Лапласа в Ω с условиями Дирихле. Сходный вопрос ставится в отношении оператора Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии с краем или без края: описать множество $\Sigma(\Omega)$ многообразий, *изоспектральных* Ω. В докладе изложены отрицательные и положительные результаты последних лет по этим проблемам.

Если Ω, $\partial\Omega = \varnothing$, имеет постоянную кривизну, то из экстремальных свойств коэффициентов разложения при $t \to 0$ функции $\operatorname{Tr} e^{t\Delta}$ следует, что $\Omega' \in \Sigma(\Omega)$ тоже должно иметь постоянную кривизну. С помощью имеющихся здесь формул следов (Якоби, Сельберга и т. п.) доказано, что $\Sigma(\Omega)$ конечно. В [2] построены примеры изоспектральных пятимерных линзовых пространств, которые даже не гомеоморфны.

Пусть, далее, Ω — область на сфере S^n, вырезаемая камерой Вейля группы Вейля G в $\mathbb{R}^{n+1}$. Спектр полностью описывается набором показателей группы G. В [3] при $n \geqslant 3$ построены неизоморфные группы Вейля с совпадающими наборами показателей. В частности, области на S^3, отвечающие группам $B_3 \times A_1$ и $I_2(4) \times I_2(6)$, изоспектральны. Усеченные конусы в $\mathbb{R}^4$ с соответствующими основаниями дают пример отрицательного ответа на вопрос М. Каца, впрочем, с негладкой границей. Ответ на исходный вопрос неизвестен.

Во всех упомянутых примерах множество $\Sigma(\Omega)$ оказывалось дискретным. В ряде случаев, например для многообразий отрицательной кривизны без края, такое свойство типично (см. [4]). Лишь в [5] выяснилась возможность *изоспектральной деформации* римановой метрики. Пусть G — нильпотентная экспоненциально полная группа Ли Γ — решетка в G, $\Omega = \Gamma \setminus G$; снабдим Ω левоинвариантной римановой метрикой, унаследованной из G. Автоморфизму $\Phi \in \operatorname{Aut}(G)$ отвечает многообразие $\Omega_\Phi = \Phi(\Gamma) \setminus G$. Если Φ — внутренний автоморфизм, $\Phi \in \operatorname{Inn}(G)$, то Ω_Φ изометрично Ω. Автоморфизм Φ — *почти внутренний*, $\Phi \in \operatorname{AIA}(G)$, если в присоединенном представлении $\operatorname{Aut}(G)$ в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ $\Phi \cdot X \in \operatorname{Inn}(G) \cdot X$ для любого $X \in \mathfrak{G}$. Если $\Phi \in \operatorname{AIA}(G)$, то Ω и Ω_Φ изоспектральны. Например, для алгебры Ли $\mathfrak{G}$ с образующими X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2)$ $[X_i, Y_i] = Z_1$, $[X_1, Y_2] = Z_2$, $\operatorname{AIA}(G)/\operatorname{Inn}(G) \cong \mathbb{R}^2$ и $\Sigma(\Omega)$ имеет структуру двумерного многообразия, т. е. метрика Ω допускает двупараметрическое семейство нетривиальных изоспектральных деформаций.

Положительные ответы на вопрос М. Каца получают обычно на пути анализа числовых характеристик спектра, выражающихся в геометрических терминах. Такими спектральными инвариантами служат объем Ω, площадь поверхности, средняя кривизна, а для строго выпуклых многообразий с краем — набор длин замкнутых бильярдных траекторий на Ω и замкнутых геодезических на $\partial\Omega$. В [6] с помощью этих инвариантов найдено содержащее круг трехпараметрическое семейство областей в $\mathbb{R}^2$, которые можно услышать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kac M., Can one hear the shape of a drum? — Amer. Math. Monthly, 1966, v. 73, № 4, p. 1—23.

[2] Ikeda A. On spheric space forms which are isospectral but not isometric. — J. Math. Soc. Japan, 1983, v. 35, № 3, p. 437—444.

[3] Urakawa H., Bounded domains whieh are isopectral but not congruent. — Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., v. 15, № 3, p. 441—456.

[4] Guillemin V., Kazhdan D., Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds. Topology, 1980, v. 19, № 3, p. 301—312.

[5] Gordon C. S., Wilson E. N., Isospectral deformation of compact solvmanifolds. — J. Diff. Geom., 1984, v. 19, № 1, p. 241—256.

[6] Marvisi S., Melrose R., Spectral invariants of convex planar regions. — J. Diff. Geom., 1982, v. 17, № 4, p. 475—502.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества приняты Н. М. Ивочкина, М. Ю. Любич.

Заседание 26 марта 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. Б. В. Чириков (Новосибирск) «Численное моделирование хаотических процессов».

Обсуждаются особенности численного моделирования хаотических процессов, а также некоторые численные эксперименты, составляющие основу нашего понимания динамического хаоса, в частности, так называемое ренорм-свойство хаоса.

2. Д. В. Ширков (Москва) «Ренорм-группа в различных областях физики».

Обсуждается соответствие между различными ренорм-группами. Вводится понятие функциональной автомодельности, обобщающее хорошо известное понятие степенной автомодельности.

Заседание 9 апреля 1985 г.

Заседание посвящено памяти Владимира Абрамовича Рохлина (1919—1984). С воспоминаниями о жизни и деятельности выступили С. М. Лозинский, О. А. Ладыженская, С. П. Новиков, А. М. Вершик, О. Я. Виро, В. А. Ефремович, В. А. Залгаллер, Д. А. Владимиров, Л. М. Абрамов.

Заседание 23 апреля 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых и математико-механическим факультетом ЛГУ.

Заседание посвящено памяти погибших в Великой Отечественной войне студентов, аспирантов, преподавателей, математиков, учившихся или работавших на математико-механическом факультете ЛГУ.

Выступившие С. М. Ермаков, А. Д. Александров, Е. С. Ляпин, М. К. Гавурин, В. А. Залгаллер, А. А. Никитин, Ц. А. Рахман, А. В. Белова и др. рассказали о многих талантливых студентах, аспирантах и преподавателях математико-механического факультета, погибших в годы войны.

Заседание 28 мая 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. Отчет правления ЛМО (С. М. Лозинский, А. М. Вершик).
2. Отчет ревизионной комиссии (В. Н. Фомин).
3. Обсуждение работы ЛМО и планов на ближайшее время.
4. Выборы Правления, ревизионной комиссии и бюро секции математики Дома ученых.

Новый состав Правления:. С. М. Лозинский (президент), О. А. Ладыженская (вице-президент), А. М. Вершик (вице-президент). Члены Правления: С. М. Ермаков, С. Г. Михлин, С. Б. Павлов, Г. И. Натансон (ученый секретарь), В. Н. Судаков (казначей), Н. В. Иванов, В. Ф. Лазуткин, А. С. Меркурьев, М. З. Соломяк — программная комиссия, Ю. В. Давыдов, О. Я. Виро — математический лекторий для студентов. Ревизионная комиссия: В. Н. Фомин (председатель), В. П. Хавин, Н. К. Никольский. Бюро секции математики:. А. М. Вершик (председатель), М. И. Башмаков (заместитель председателя). Члены: И. А. Ибрагимов, С. В. Керов, С. М. Лозинский, Б. С. Павлов, А. И. Плоткин, В. Г. Тураев (секретарь), Н. Н. Уральцева, С. В. Хрущев, В. А. Якубович.

5. Сообщение представителя издательства «Наука» А. П. Баевой о планах издательства по выпуску математической литературы на ближайшие годы.

6. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1985 г.

Премия присуждена М. А. Лифшицу за работы по изучению структуры распределений функционалов от траекторий случайных процессов.

7. Прием в члены Общества. Членами Общества избраны В. Н. Попов, В. А. Даугавет, Н. Е. Фирсова.

Лекции математического лектория для студентов при ЛМО в 1984/85 учебном году:

1. С. Г. Михлин «Погрешности в вычислительных процессах».
2. Н. Н. Ляшенко «Конечноразрядный математический анализ».
3. С. А. Виноградов «Об одной гипотезе Литтлвуда, связанной с оценкой тригонометрических сумм».
4. В. И. Арнольд «Фокальные точки, оптимизация и группы отражений».
5. З. И. Боревич «Теорема Ферма и современные ЭВМ».
6. Г. С. Цейтин «Как мы программируем».

Примечание при корректуре. 22 августа 1985 г. скончался президент Ленинградского математического общества Сергей Михайлович Лозинский. На заседании, состоявшемся 22 октября 1985 г., новым президентом Ленинградского математического общества был избран Дмитрий Константинович Фаддеев.

1987 г. март—апрель *т. 42, вып. 2(254)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА[1]

Заседание 24 сентября 1985 г.

1. Вручение премий ЛМО молодому математику за 1985 г.

2. Доклады лауреатов премий.

М. А. Лифшиц «Допустимые преобразования и распределения функционалов от случайных процессов».

Распределение функционала от случайного процесса можно рассматривать как образ вероятностной меры, сосредоточенной на функциональном пространстве. Если исходная мера обладает большим запасом допустимых преобразований, то открывается возможность проверять такие свойства распределения, как абсолютная непрерывность, ограниченность плотности, существование старших производных.

В. Л. Кобельский (Лауреат премии 1984 г.) «Алгебраическая структура моделей зацеплений коразмерности два».

Классическое зацепление — это несколько непересекающихся окружностей в трехмерной сфере. Зацепления, о которых идет речь в докладе, представляют собой многомерные аналоги классических зацеплений. Основное отношение эквивалентности между зацеплениями — объемная изотопия; в нем формализуются наглядные представления о «перевязывании» одного зацепления в другое. Существует богатый набор инвариантов, позволяющих различать изотопические типы зацеплений. Доклад посвящен описанию алгебраической структуры этих инвариантов.

3. Прием в члены Общества.

В члены Общества избраны: Меркурьев С. П., Решетихин Н. Ю., Васюнин В. И., Шубов В. И., Капитанский Л. В., Скриганов М. М., Тетерин Ю. Г., Сафаров Ю. Г., Макаров Н. М., Гершкович В. Я.

Заседание 15 октября 1985 г.

1. Н. Б. Маслова «Математические проблемы кинетической теории».

Кинетические уравнения предназначены для описания необратимых процессов (типа вязкости и теплопроводности) с точки зрения молекулярной динамики. Основные физические идеи вывода таких уравнений были сформулированы в работах Максвелла и Больцмана. Математическая разработка вопросов обоснования и исследования кинетических уравнений, как и всего круга проблем неравновесной статистической механики, ведется сейчас весьма интенсивно. Обзорное изложение последних результатов содержится в книге [1].

Одна из классических нерешенных задач — описание связи уравнения Больцмана с уравнениями гидродинамики. В работах Максвелла впервые появилась бесконечная цепочка моментных уравнений для больцмановской функции распределения и проблема обоснования уравнений гидродинамики была сформулирована как проблема замыкания

[1] См. УМН, 1986, т. 41, 1(247), с. 215—223.

этой цепочки. Ожидается, что в ситуациях, близких к равновесным, быстро происходит «приспособление» старших моментов к младшим, обеспечивающее возможность упрощенного описания. Однако физическая и математическая природа этого процесса не вполне ясна.

Одно из направлений исследований, связанное с именами Гильберта и Карлемана состоит в изучении асимптотики решения задачи Коши для уравнения Больцмана

$$(1) \qquad \frac{dF}{dt} = \varepsilon^{-1} J(F), \qquad F\,|_{t=0} = F(0)$$

с большим параметром ε^{-1} при нелинейном операторе столкновений. Здесь $F = F(t, x, \xi)$ — функция, описывающая плотность распределения молекул по координатам x ($x \in \Omega \subset R^m$, $m = 1, 2, 3$) и импульсам $\xi (\xi \in R^3)$ в момент времени $t (t \in [0, T])$, $\frac{d}{dt} = \partial_t + \xi \cdot \partial_x$. Ниже предполагается, что $\Omega = R^m$. Основные формулируемые ниже утверждения верны для тора и области с гладкой зеркально отражающей границей.

Гильберт описал структуру формальных степенных разложений F по ε и свойства связанных с этим разложением интегральных операторов. Любое такое разложение однозначно определяется вектором гидродинамических моментов $M = (\rho, v, \theta)$. Компоненты вектора M имеют смысл плотности (ρ) скорости (v, $v \in R^3$) и температуры (θ). Главный член гильбертова ряда — максвелловское распределение $\omega(M, \xi)$, параметры M которого определяются из решений уравнений Эйлера для сжимаемой жидкости.

В работах японских математиков (С. Укаи, Т. Нишида, К. Асано) доказаны теоремы, дающие обоснование главного члена ряда Гильберта для начальных данных $F(0)$, близких к максвелловскому распределению с постоянными параметрами и аналитических по переменным x. Время существования решения задачи Коши (1), гарантируемое этими теоремами, зависит от нормы начального возмущения в соответствующем банаховом пространстве аналитических функций и убывает с ростом этой нормы.

На самом деле по каждому решению задачи Коши для уравнений Эйлера на $[0, T]$ (существование такого решения в соболевских пространствах гарантируется теоремой Като) можно на том же промежутке времени построить решение задачи (1) в пространстве

$$B(l, \omega) = \{F\colon (F - \omega)\,\overline{\omega}^{-1/2} \in L_\infty([0, T], W_2^l(\Omega, H))\}.$$

Здесь $\omega = \omega(M, \xi)$, $M \in L_\infty\{[0, T], W_2^l(\Omega)\}$ — решение задачи Коши для уравнений Эйлера с начальными данными, соответствующими распределению $F(0)$, $\overline{\omega}$ — максвелловское распределение с постоянными параметрами, мажорирующее ω, H — пространство суммируемых с квадратом функции от ξ. Единственное существенное предположение — близость начального распределения F к ω. Однако достаточно предположить близость в пространстве $L_\infty(\Omega, H)$, не вводя, таким образом, никаких ограничений на градиенты гидродинамических моментов M. Точнее, предположим, что при $t = 0$ выполнены следующие условия:

1) $M - M_0 \in W_2^l(\Omega)$, $M_0 = \mathrm{const}$, $\inf \rho$, $\theta > 0$, $l \geqslant 5$,

2) $(1 + |\xi|)^4 (F - \omega)\,\omega^{-1/2} \in W_2^l(\Omega, H)$.

Т е о р е м а. *Существуют постоянные c^*, T^* такие, что при $T \leqslant T^*$, $\|(F - \omega)\omega^{-1/2}\|_{L_\infty(\Omega, H)} \leqslant c^*$ задача* (1) *при всех ε имеет единственное решение в* $B(l - 3, \omega)$.

Одно из следствий теоремы состоит в возможности полного обоснования метода Гильберта. Для гладких начальных данных n-я частная сумма ряда Гильберта отличается от точного решения на величину порядка ε^n в норме $W_2^l(\Omega, H)$ при любом $t > 0$.

Глобальные решения задачи (1) удается построить только для начальных данных с малыми (порядка ε в $W_2^l(\Omega)$) начальными гидродинамическими моментами. Главные члены асимптотики моментов при $\varepsilon \to 0$ определяются решениями уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ, 1985, Т. 2. С. 235—307.

Заседание 22 октября 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и было посвящено памяти профессора Сергея Михайловича Лозинского (1914—1985), президента Ленинградского математического общества с 1965 по 1985 гг., заслуженного деятеля науки и техники РСФСР.

С воспоминаниями выступили И. П. Мысовских, В. А. Плисс, Х. Л. Смолицкий, Д. А. Владимиров, Л. Я. Адрианова, Т. В. Кербер, Б. Н. Саморуков (см. некролог в УМН, 1986, вып. 5).

На этом же заседании новым президентом Ленинградского математического общества избран Дмитрий Константинович Фаддеев.

Заседание 19 ноября 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

В. П. Гердт, Д. В. Ширков (Дубна) «Аналитические вычисления на ЭВМ: системы, алгоритмы, применения».

Дан обзор основных этапов становления и перспектив развития методов аналитических вычислений на ЭВМ. Рассмотрены наиболее популярные программные системы аналитических вычислений и показана роль эффективных символьных алгоритмов. Приведен ряд примеров и применений (дифференц. уравнения — обыкновенные и в частных производных; вычисления квантово-полевых величин в рамках теории возмущений).

Заседание 10 декабря 1985 г.

1. А. Б. Венков, П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян «О монодромии фуксовых дифференциальных уравнений: проблема Римана — Гильберта в рамках теории автоморфных функций и связь с геометрией пространства Тейхмюллера».

2. Организационные вопросы: об оплате секретарям Общества.

Заседание 24 декабря 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. Ю. М. Березанский (Киев) «Спектральные методы в бесконечномерном анализе».

Бесконечномерный анализ в настоящее время активно развивается в связи с рядом задач функционального анализа, квантовой теории поля, статистической физики и т. д. Большую роль в нем играют методы спектральной теории операторов. В докладе описываются некоторые из этих методов, а также связанные с ними вопросы: 1) обобщенные функции бесконечного числа переменных, 2) разложения по совместным обобщенным собственным векторам коммутирующих семейств операторов и его применения к гармоническому анализу, 3) спектральные свойства бесконечномерных дифференциальных операторов и их применение к теории поля.

2. Прием в члены Общества

Членами Общества избраны — Вольберг А. Л., Шмидт Р. А.

Заседание 18 февраля 1986 г.

Г. В. Кузьмина «Геометрическая теория функций и гипотеза Бибербаха».

В геометрической теории функций (в дальнейшем ГТФ) исследуются общие классы функций, заданных в различных областях определения или на римановой поверхности. При этом ГТФ концентрирует внимание на классах функций преимущественно как на классах отображений и существенная роль в ГТФ принадлежит однолистным функциям. Одним из основных классов однолистных функций является класс S функций $f(z) = z + c_2z^2 + \ldots + c_nz^n + \ldots$, регулярных и однолистных в круге $U = \{|z| < 1\}$.

Метод площадей, разработанный Гронуоллом, Бибербахом и Фабером, позволил установить ряд замечательных свойств функций Кебе

$$K_\varepsilon(z) = z/(1 + \varepsilon z)^2, \qquad |\varepsilon| = 1. \tag{1}$$

В 1916 г. Л. Бибербах высказал гипотезу, что в классе S справедливо неравенство

$$|c_n| \leqslant n, \qquad n \geqslant 2, \tag{2}$$

и что равенство в (2) имеет место только для функций (1). Сам Бибербах доказал неравенство (2) для $n = 2$. Гипотеза Бибербаха (в дальнейшем ГБ) оказала большое влияние на развитие многих методов ГТФ. Так, в 1923 г. К. Левнер создал свой параметрический метод и с его помощью доказал неравенство (2) для $n = 3$. В 1930—1940 гг. возникли метод полос (Х. Гретш, 1928), метод контурного интегрирования (Х. Грунский, 1932), методы граничных и внутренних вариаций (М. Шиффер, 1938 и 1943; Г. М. Голузин, 1946). В начале 1950 годов возникли метод экстремальных метрик в его современной форме (Л. Альфорс и А. Бейрлинг, Дж. Дженкинс) и метод симметризации, несколько позднее — метод крайних точек. Все эти методы являются по существу геометрическими. Получили развитие и первоначальные классические методы. Так, в 1950—1960 гг. в работах Н. А. Лебедева и И. М. Милина были разработаны общие формы метода площадей. Именно указанные методы определили современное состояние ГТФ. Большое внимание в исследованиях последних лет уделяется весьма общим объектам: классам систем отображений на station неналегающие области различных типов (см. монографии Дж. Дженкинса [1] и Н. А. Лебедева [2]).

ГБ исследовалась в различных направлениях. В 1958 г. В. К. Хейман показал, что для каждой функции $f \in S$ существует такой номер N_f, что $|c_n| \leqslant n$ для всех $n \geqslant N_f$. Была доказана так называемая локальная ГБ: (2) справедливо для всех $f \in S$, принадлежащих некоторой окрестности функции Кебе. Стало традиционным доказательство оценок вида $|c_n| \leqslant Cn$ для всех n (в последней из них $C = 1{,}0691$ (1976)). Усилия многих аналитиков были посвящены точным оценкам начальных коэффициентов в классе S. Однако после Левнера и до 1984 г. неравенство (2) было доказано лишь для $n = 4$, 5 и 6 (соответственно, в 1955, 1972 и 1968 гг.). Поэтому явилось подлинной сенсацией полученное в 1984 г. де Бранжем доказательство неравенства (2) одновременно для всех $n \geqslant 2$.

Одновременно с ГБ де Бранж доказал гипотезу Робертсона (ГР) (1936). В классе $S^{(2)}$ нечетных функций из S, т. е. функций $f^{(2)}(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + c_2^2 z^3 + \ldots + c_k^{(2)} z^{2k-1} + \ldots$, где $f \in S$, справедливо неравенство

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n} |c_k^{(2)}|^2 \leqslant n, \qquad n \geqslant 2,$$

и равенство в (3) имеет место только для функций $K_\theta^{(2)}(z) = \sqrt{K_\theta(z^2)}$, где $K_\theta(z)$ — функция (2). ГБ следует из ГР. До 1984 г. ГР была доказана для $n = 2, 3, 4$.

Де Бранж использует следующее из неравенств, установленных в 1965—1967 гг. совместно Н. А. Лебедевым и И. М. Милиным [3, 4]. Пусть γ_k — логарифмические коэффициенты функции $f \in S$, определяемые разложением $\log\{f(z)/z\} = 2\gamma_1 z + \ldots + 2\gamma_k z^k + \ldots$ В классе S справедливо неравенство

$$(4)\qquad (|c_{n+1}| \leqslant) \sum_{k=1}^{n+1} |c_k^{(2)}|^2 \leqslant (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Равенство в (4) имеет место только в случае $\gamma_k = \eta^k/k$, $|\eta| = 1$ $(k = 1, \ldots, n)$. Из (4) непосредственно следует, что если для $f \in S$

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k|\gamma_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\frac{1}{k},$$

то справедливы неравенства (2) и (3). Де Бранж воспользовался этим соображением и получил неравенство (5) в качестве следствия установленного (см. ниже) неравенства для ограниченных функций. Предположения о том, что (5) справедливо для любой функции $f \in S$, естественно называть гипотезой Лебедева — Милина.

Пусть S_1 — класс функций $f(z) = c_1 z + \ldots + c_k z^k + \ldots$, $c_1 > 0$, регулярных и однолистных в круге U, $|f(z)| < 1$ в U,

$$(6)\qquad K_{\tau,x}(z) = K_x^{-1}(\tau K_x(z)), \qquad 0 < \tau \leqslant 1, \qquad |x| = 1,$$

где $K_x(z)$ — функция Кебе (1). В дальнейшем $\sigma_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n+1)$ — система функций, удовлетворяющих при $t \in [1, \infty)$ рекуррентной системе уравнений

$$\sigma_k(t) + \frac{t}{k}\sigma_k'(t) = \sigma_{k+1}(t) - \frac{t}{k+1}\sigma_{k+1}'(t)$$

с начальными условиями $\sigma_k(1) = n + 1 - k$ $(k = 1, \ldots, n+1)$.

Теорема Де Бранжа [5]. *Для любого $n \geqslant 1$, любого $\beta > 1$, любой функции $f(z) \in S_1$, $f'(0) = \tau$, $0 < \tau < 1$, и произвольной регулярной в круге U функции $p(z) = p_1 z + \ldots + p_k z^k + \ldots$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\left\{\log\frac{f(z)}{\tau z} + p\circ f(z)\right\}_k\right|^2 k\sigma_k(\beta\tau) \leqslant \sum_{k=1}^{n}|p_k|^2 k\sigma_k(\beta) + \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k}(\sigma_k(\beta\tau) - \sigma_k(\beta)). \tag{7}$$

Здесь $\{F(z)\}_k$ — коэффициент при z^k разложения $F(z)$ в ряд по степеням z. Для функций $f(z) = K_{\tau,x}(z)$, где $|x| = 1$, и $p(z) = -2\log(1 + xz)$ в (7) имеет место равенство.

Из этой теоремы и неравенства Лебедева — Милина (4) справедливость ГБ и ГР вытекает крайне просто. Пусть $f(z) \in S$ и $|f(z)| < M$, где $M > 1$, в U. Тогда $f_1(z) = M^{-1}f(z) \in S_1$, $f_1'(0) = M^{-1}$. Следовательно, для $f_1(z)$ справедливо (7) с $\tau = M^{-1}$, $\beta = M$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $M \to \infty$, получаем (5), а из (5) и (4) следуют (2) и (3) с утверждениями о случаях равенства.

Сначала теорема доказывается в предположении, что функции $\sigma_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n+1)$ неотрицательны и не возрастают на $[1, \infty)$. Это — основная часть доказательства. Затем показывается, что функции $\sigma_k(t)$ действительно обладают требуемыми свойствами (здесь используются известные результаты теории гипергеометрических рядов). Остановимся кратко на основной части доказательства.

Из классической теоремы Левнера следует, что суперпозиции конечного числа отображений вида (6) образуют всюду плотный подкласс в S_1. Поэтому достаточно доказать (7) лишь для таких суперпозиций. Можно и дальше сузить множество функций, для которых достаточно доказать неравенство (7). Это де Бранж устанавливает при помощи следующего весьма изящного рассуждения. Пусть $f(z) = f_2 \circ f_1(z)$, где f_2 — отображение вида (6), f_1 — суперпозиция $m \geqslant 1$ таких отображений. Имеем $f'(0) = \tau = \tau_2\tau_1$, где $\tau_j = f_j'(0)$. Обозначим через $\Phi(f, p, \beta)$ разность между левой и правой частями неравенства (7). Пользуясь аддитивностью второй суммы в правой части (7) (ее можно записать в виде интеграла по промежутку $[\beta\tau, \beta]$), получаем тождество

$$\Phi(f_2 \circ f_1, p, \beta) = \Phi(f_2, p, \beta) + \Phi(f_1, \log(f_2/\tau_2 z) + p \circ f_2, \beta\tau_2).$$

Отсюда и из очевидного тождества $\Phi(K_{\tau,x}, p, \beta) = \Phi(K_{\tau,1}, \tilde{p}, \beta)$, где $\tilde{p}(z) = p(\bar{x}z)$, следует, что достаточно доказать неравенство (7) только для функций $K_{\tau,1}(z)$ и произвольной функции $p(z)$, $p(0) = 0$, регулярной в U. Последнее не представляет принципиальных трудностей и сводится к несложным формальным преобразованиям.

Несколько иной вариант доказательства ГБ дан де Бранжем в [6], см. также [7]. В выработке классической версии первоначального доказательства де Бранжа в [5] существенную роль сыграл Ленинградский семинар по ГТФ. Подробно об этом говорится в [8]. Исходное доказательство де Бранжа основано на развитой им теории суммируемых с квадратом степенных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. — М.: ИЛ, 1962.

[2] Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1975.

[3] Лебедев Н. А., Милин И. М. Об одном неравенстве//Вестн. ЛГУ. — Сер. мат., мех. и астрон., вып. 4. 1965. — № 19. — С. 157—158.

[4] Милин И. М. О коэффициентах однолистных функций//ДАН СССР. — 1967.— Т. 176, № 5. — С. 1015—1018.

[5] de Branges L. A proof of the Bieberbach conjuecture// LOMI preprints, E-5-84. Leningrad. 1984.
[6] de Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture// Acta Math. — 1985. — V. 154, № 1—2. P. 137—152.
[7] Fitzgerald C. H., Pommerenke Ch. The de Branges theorem on univalent functions// Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 290, № 2, P. 683—690.
[8] Fomenko O. M., Kuz'mina G. V. The last 100 days of the Bieberbach conjecture// Math. Intel. — 1986. — № 1. — P. 40—47.

Заседание 4 марта 1986 г.

Об учебниках по математике для средней школы

1. Д. К. Фаддеев, М. С. Никулин, И. Ф. Соколовский «Об учебниках по алгебре и началам анализа для 6—10 классов».

1° На сегодняшний день средняя школа накопила значительный опыт преподавания элементов математического анализа. Поэтому есть смысл снова вернуться к вопросу о том, целесообразно ли вообще такое обогащение курса математики средней школы и если да, то какова должна быть идейная направленность и содержание этого курса?

Анализируя результаты практического преподавания, нетрудно заметить, что изучение начал анализа сводится в основном к двум моментам: а) овладение техникой дифференцирования, б) отработка навыка применения алгоритма исследования функции на экстремумы и монотонность с помощью производной. И то, и другое — вещи безусловно необходимые для многих специалистов в самых различных областях человеческой деятельности, но в общеобразовательной школе такого рода навыки и умения не должны быть в центре внимания. Приоритет должен быть отдан решению общеобразовательных задач. Курс математики в средней школе должен прежде всего заложить и воспитать в ученике не формальное, а основанное на понимании ощущение связи основной идеи дифференциального исчисления с реальной действительностью. Ученику следует дать наглядное и интуитивно ясное представление о методах высшей математики как о мощнейшем инструменте изучения многих явлений природы. Такая ориентация в преподавании элементов математического анализа принесет пользу и тому, кто продолжит образование в техническом вузе, и тому, кто практически не будет сталкиваться с применением математического аппарата в своей трудовой деятельности.

2° По нашему мнению, первое знакомство школьника с элементами математического анализа должно происходить на том интуитивном уровне, на котором математический анализ фактически возник. Надо убедить учащегося в простоте, наглядности и даже «грубости» основной идеи дифференциального исчисления. Эта идея сводится, по существу, к следующему простому соображению (мы называем его «основным принципом дифференциального исчисления»): на небольшом участке любой достаточно «хорошей» кривой она успевает мало изогнуться, и тем меньше, чем меньше рассматриваемый участок. Поэтому маленький участок кривой линии почти совпадает с отрезком некоторой прямой и их различие постепенно исчезает по мере стягивания участка кривой к некоторой точке. Эта прямая называется касательной к кривой в этой точке. Угловой коэффициент касательной к графику функции называется значением производной от функции в данной точке.

В книге Д. К. Фаддеева и др. «Элементы высшей математики для школьников» (готовится к выпуску в 1987 г. в изд-ве Наука) принят следующий подход к изложению основных результатов дифференциального исчисления. Сначала понятия и утверждения формулируются и обосновываются на уровне «основного принципа», затем они доказываются более строго с привлечением понятия бесконечно малой величины (в книге параллельный термин —«исчезающая величина») и понятия сходящейся переменной. Таким образом, первоначально смысл утверждений и их обоснования проводится на наглядно-интуитивном уровне. В учебнике для массовой школы, который создается на основе написанной книги, предполагается этот метод изложения реализовать в предельно последовательной форме. При этом мы считаем, что изучение понятий бесконечно малой величины, сходящейся переменной и предела не должно быть самоцелью и составлять раздел, предшествующий понятию производной. Эти понятия следует ввести только как средство исследования и обоснования в связи с уточнением «основного принципа» после введения понятия производной. Кроме того, мы считаем необходимым ввести понятие дифференциала, так как именно через представление дифференциала как «малого куска» изучаемой величины осуществляются наиболее элементарные, но важнейшие приложения элементов высшей математики в физике, технике и т. д. Интегрирование следует рассматривать как действие, восстанавливающее функцию прежде всего по ее дифференциалу, а не производной. Наиболее существенный довод в пользу этого то, что при применении интегрирования к вычислению некоторой величины, она рассматривается как значение переменной величины, дифференциал которой наглядно виден или легко вычисляется.

3° Успешное проведение предлагаемого варианта введения элементов высшей математики требует некоторой целенаправленной подготовки. Во-первых, в 6—8 классах должна быть хорошо отработана техника алгебраических преобразований. Во-вторых, следует обеспечить формирование практической, опытной базы интуиции. Так как неформальное овладение «основным принципом дифференциального исчисления» невозможно без хорошо развитых интуитивных представлениях о непрерывной и гладкой функции, без того, чтобы было воспитано «ощущение» сравнительно большого и сравнительно малого (в абсолютном и относительном смыслах). Достижению этих целей должны способствовать примеры на применение алгебраических преобразований к вычислениям, упражнения на построение графиков функций по точкам, изучение свойств функций элементарными средствами с применением вычислительной техники, приемы приближенного решения уравнений и способы оценивания значения выражения. Именно такую направленность имеет книга Д. К. Фаддеева «Алгебра 6—8»: Просвещение. — 1983).

2. М. И. Башмаков «Требования к школьному учебнику по математике».

Перестройка структуры и содержания школьного математического образования предъявляет новые требования к школьному учебнику. В докладе рассказано об опыте конструирования нового учебника для старших классов общеобразовательных школ и ПТУ.

3. Информация об участии ЛМО в школьных олимпиадах.

ЛМО является членом-учредителем математических олимпиад для ПТУ, проводимых с 1985 г. Учреждено несколько премий для победителей и учителей.

Заседание 25 марта 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

1. В. И. Арнольд (Москва) «Особенности границ пространств дифференциальных уравнений».

Границы областей устойчивости, эллиптичности, гиперболичности, чебышёвскости и т. д. для типичных семейств дифференциальных уравнений имеют стандартные особенности, обладающие своеобразными свойствами (стабилизация, принцип хрупкости хорошего и т. д.). В докладе рассказано об этих особенностях и их связях со стратификациями Шуберта, диаграммами Юнга и упорядочениями Брюа.

Заседание 15 апреля 1986 г.

1. Н. В. Иванов «Геометрическая теория пространств Тайхмюллера».

Работы Тёрстона (W. P. Thurston) и, в первую очередь, его теорема геометризации, полностью изменили облик трехмерной топологии. Менее известно, что в ходе доказательства этой теоремы Тёрстон внес ряд принципиально новых идей в теорию пространств Тайхмюллера. В противоположность доминировавшим ранее методам hard analysis, эти идеи имеют ярко геометрический характер. В основе лежат понятия одномерного слоения с трансверсальной мерой на поверхностях (у этих слоений допускаются особенности стандартного вида) и соответствующее понятие гиперболической геометрии — понятие геодезической ламинации.

Первое их применение — построение естественной границы пространства Тайхмюллера, так называемой границы Тёрстона. Исследование этой границы приводит, во-первых, к полученной Тёрстоном классификации (изотопических классов) диффеоморфизмов поверхностей. На следующем уровне абстракции это позволяет исследовать не только отдельные диффеоморфизмы, но и всю группу изотопических классов диффеоморфизмов данной поверхности — так называемую модулярную группу Тайхмюллера (известную также под именем группы классов преобразований поверхности). На этом пути докладчику удалось доказать, что для подгрупп модулярных групп Тайхмюллера справедливы аналоги ряда центральных теорем теории линейных групп: теоремы Титса о свободных подгруппах, теоремы Маргулиса — Сойфера о максимальных подгруппах, теоремы Платонова о подгруппах Фраттини. Некоторые результаты в этом направлении получили также Дж. Мак-Карти и Д. Лонг.

Одним из самых ярких применений идей Тёрстона является решение проблемы реализации Нильсена, полученное Керкхоффом. Он показал, что каждая конечная группа изотопических классов диффеоморфизмов данной поверхности возникает (очевидным образом) из конечной группы диффеоморфизмов. Доказательство основано на понятии землетрясения, обобщающем классические деформации Фенхеля — Нильсена. Замечательный аналог одного из главных шагов доказательства теоремы геометризации был обнаружен Тёрстоном в теории голоморфных динамических систем. Речь идет о топологической характеризации широкого класса рациональных отображений сферы Римана (так называемых критически конечных отображений). Технически как в этой теории, так и в Теореме геометризации одним из главных моментов доказательства является наличие неподвижной точки у некоторого специального отображения пространства Тайхмюллера. Среди других приложений нужно отметить одно из решений задачи о строгой эргодичности почти всех перекладываний (Х. Мазур) и связь с теорией квадратичных дифференциалов (Х. Мазур и Дж. Хаббард).

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: А. З. Гриншпан, П. Г. Зограф, В. А. Кайманович, Г. В. Кузьмина, А. И. Мартикайнен, И. М. Милин, Ф. А. Смирнов, Б. Ф. Скубенко.

Заседание 29 апреля 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

Круглый стол по информатике и программированию

Выступавшие С. С. Лавров, Г. С. Цейтин, А. О. Слисенко, И. В. Романовский, С. М. Ермаков и др. поделились своими соображениями о перспективах развития и подготовки кадров в новой области.

Лекции математического лектория для студентов при ЛМО

17.10.1985 г. — С. М. Ермаков «Моделирование случайности».

21.11.1985 г. — В. П. Хавин «Новое доказательство закона распределения простых чисел».

13.3.1986 г. — Г. И. Натансон «О вычислениях на микрокалькуляторах».

27.3.1986 г. — В. И. Арнольд «Фундаментальные системы решений линейных уравнений, проективные кривые и диаграммы Юнга».

15.5.1986 г. — А. Г. Хованский «Выпуклые многогранники».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1]

Заседание 30 сентября 1986 г.

Н. Г. Макаров «Метрические свойства гармонической меры».

Обзор последних результатов о хаусдорфовой размерности носителя гармонической меры. Особое внимание уделено вероятностным аспектам теории.

Заседание 14 октября 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

О. А. Ладыженская «Теория аттракторов для уравнений в частных производных».

Рассказано о нахождении минимальных (истинных) глобальных аттракторов для полугрупп, порожденных начально-краевыми задачами для уравнений гидродинамики и квазилинейных параболических и гиперболических уравнений.

Более подробное изложение приведено в работе, опубликованной в ДАН СССР, 1987, т. 294, № 1, с. 33—37.

Заседание 28 октября 1986 г.

О. Я. Виро «Новые результаты четырехмерной топологии».

Две из трех филдцевских премий 1986 г. присуждены за работы по топологии четырехмерных многообразий. Обзор ее недавнего развития, основанного на удивительной связи с теорией калибровочных полей, дан в докладе.

Заседание 11 ноября 1986 г.

М. Ю. Любич «Конформная динамика на сфере Римана».

Теория итераций рациональных функций комплексного переменного сочетает в себе идеи теории динамических систем (грубость, стохастичность, самоподобие) с техникой комплексного анализа (нормальные семейства, пространства Тейхмюллера, квазиконформные деформации). В докладе дан обзор как классических результатов в этой области (Фату, Жюлиа), так и последних достижений (Дуади, Сулливан, Терстон и др.).

Подробный обзор см. в работе автора в УМН, 1986, т. 41 № 4, с. 35—95.

Заседание 25 ноября 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

Впечатления о математическом конгрессе в Беркли, август 1986 г.

С сообщениями выступили участники конгресса В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, А. Б. Александров, Н. Г. Макаров.

---

[1] См. УМН, 1987, т. 42, 2(254), с. 255—262.

Заседание 9 декабря 1986 г.

В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов «Негладкий анализ. Состояние и перспективы».

Негладкий анализ — широкий круг вопросов, относящихся к изучению недифференцируемых функций с помощью их локальной аппроксимации. К негладкому анализу относятся: исчисление аппроксимирующих объектов, исследование экстремальных задач, обобщение теорем классического анализа (теорема о неявной функции и др.). В докладе обсуждаются основные концепции негладкого анализа. Показывается, что в первом приближении теория негладкого анализа 1-го порядка может считаться в настоящее время построенной.

Заседание 23 декабря 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

1. А. М. Переломов (Москва) «Теория квантовой струны и многообразия Калаби — Яо».

В докладе рассказано о математических аспектах новой физической теории и о ее связях с геометрией комплексного многообразия.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны — Полищук Е. М., Фомин С. В.

Заседание 27 января 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых и было посвящено памяти выдающегося советского математика и экономиста Леонида Витальевича Канторовича.

С воспоминаниями о жизни выступили Д. К. Фаддеев, В. П. Ильин, М. К. Гаврурин, И. П. Мысовских, М. Ш. Бирман, А. М. Вершик, ~~а также все желающие кратко рассказать о жизни и~~ научной деятельности Л. В. Канторовича.

Заседание 24 февраля 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

А. А. Суслин «Алгебраическая K-теория полей».

Рассказано о связях между алгебраической K-теорией и другими теориями когомологий, а также о последних достижениях в проблеме вычисления K-функторов.

Заседание 17 марта 1987 г.

1. Ю. Л. Далецкий (Киев) «Стохастическая дифференциальная геометрия».

В докладе рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения на гладком бесконечномерном многообразии и свойства гладкости и абсолютной непрерывности связанных с ними мер.

2. О студенческом конкурсе решения задач, проводимом ЛМО.

Заседание 31 марта 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

Ю. С. Ильяшенко (Москва). Теоремы конечности для предельных циклов.

Полиномиальное векторное поле на вещественной плоскости может иметь лишь конечное число предельных циклов. Долгое время считалось, что эта теорема доказана Дюлаком (1923). Однако в 1981 г. выяснилось, что работа Дюлака ошибочна: Дюлак обращается с асимптотическими рядами как со сходящимися. Предлагается доказательство этой теоремы, полученное докладчиком.

Заседание 14 апреля 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых в рамках Всесоюзного семинара, посвященного 100-летию со дня рождения академика Владимира Ивановича Смирнова, организованного ЛОМИ, ЛГУ и ЛМО.

Вступительное слово ректора ЛГУ С. П. Меркурьева. Доклады: Н. К. Никольский, В. П. Хавин «Работы В. И. Смирнова по комплексному анализу». А. П. Юшкевич «Работы В. И. Смирнова по истории математики». А. В. Кольцов «В. И. Смирнов как историк науки».

С воспоминаниями выступили Д. К. Фаддеев, С. Г. Михлин, О. А. Ладыженская, Н. А. Толстой и др.

Заседание 28 апреля 1987 г.

1. Г. А. Леонов. Математические проблемы теории синхронизации.

Обсуждаются дифференциальные уравнения синхронных электрических машин и радиотехнических схем синхронизации. С математической точки зрения эти вопросы в значительной мере сводятся к оценкам параметров бифуркации в многомерных системах. В докладе излагаются результаты этих исследований.

2. Прием в члены Общества.

Членом общества избран — С. С. Сурин.

Заседание 12 мая 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

1. Я. Г. Синай (Москва) «Локализация Андерсона и операторы с почти периодическими коэффициентами».

Локализация Андерсона состоит в появлении всюду плотного множества собственных чисел и экспоненциального убывания собственных функций. Предлагается общий метод доказательства локализации Андерсона для разностных уравнений Шрёдингера и задач о квантовом хаосе.

2. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1987 г.

Премии присуждены М. Ю. Любичу за цикл работ «Итерации рациональных отображений римановой сферы» и Ю. Г. Сафарову за цикл работ по спектральной асимптотике эллиптических операторов.

* * *

Заседения математического лектория студентов при ЛМО в 1986/87 учебном году.

16.10.1986 г.— А. М. Вершик «Модели случайного роста и клеточные автоматы»:

27.11.1986 г.— А. Т. Фоменко (Москва) «Минимальные поверхности и проблема Плато».

11.12.1986 г.— О. Я. Виро «Прогресс в топологии четырехмерных многообразий».

5.3.1987 г.— И. В. Романовский «Математическая полиграфия».

2.4.1987 г.— Из цикла «Замечательные ученые математико-механического факультета» «В. И. Смирнов. К 100-летию со дня рождения». Выступили В. М. Бабич, В. П. Хавин, В. А. Якубович.