1953 г. ноябрь—декабрь *т. VIII, вып. 6 (58)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

РАБОТА ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

С начала 1953 г. в Ленинграде работает общегородской математический семинар. Заседания семинара происходят два раза в месяц по вторым и четвёртым вторникам в Ленинградском доме учёных, начало заседаний в 19 часов.

Задачей семинара является объединение математиков г. Ленинграда, обмен опытом и проблематикой. За февраль—май 1953 г. проведено восемь заседаний. Ленинградские математики живо интересуются работой семинара и принимают в ней активное участие; на заседаниях семинара присутствует до 200 человек.

Первое заседание семинара состоялось 10 февраля 1953 г. После вступительного слова ректора Ленинградского университета член-корр. АН СССР А. Д. Александрова о задачах семинара академик В. И. Смирнов прочитал доклад на тему «Современные проблемы математической физики»; в конце заседания был избран президиум семинара, в который вошли: В. И. Смирнов (председатель), Ю. В. Линник (зам. председателя), Б. А. Венков, С. М. Лозинский, А. А. Марков, А. А. Иванов, М. Ф. Широхов (секретарь).

На следующих заседаниях семинара были поставлены доклады:

24 февраля 1953 г. доклад Н. П. Еругина «Методы Ляпунова и вопросы устойчивости в большом».

10 марта 1953 г. доклад С. М. Лозинского «Оценка ошибки при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений».

24 марта 1953 г. доклад А. Д. Александрова «Отношение геометрии к физике».

14 апреля 1953 г. доклад О. А. Ладыженской «Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения общего вида» и доклад Б. В. Русанова «Обтекание кругового цилиндра и шара вязкой жидкостью».

28 апреля 1953 г. доклад М. К. Гавурина «О современных вычислительных машинах» и доклад Л. В. Канторовича «Значение современной вычислительной техники для прикладной математики».

12 мая 1953 г. доклад Е. В. Вороновской «Метод Чаплыгина для уравнений первого порядка и его видоизменение с помощью поверхности Чебы-

шева» и доклад В. А. Якубович «Вопросы устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами».

26 мая 1953 г. доклад А. А. Маркова «Теория алгорифмов».

После летних каникул 22 сентября с. г. семинар возобновил свою работу. Первое заседание семинара в новом учебном году было посвящено памяти выдающегося русского математика Е. И. Золотарёва в связи с 75-летием со дня его смерти.

Заседание открыл академик В. И. Смирнов, который в своём вступительном слове рассказал о кратком по времени, но блестящем по результатам пути Е. И. Золотарёва в науке. Затем был заслушан доклад проф. Б. А. Венкова «О работах Е. И. Золотарёва по теории чисел». Докладчик специально указывал на факты и методы, открытые Е. И. Золотарёвым ранее иностранных учёных, которым до недавнего времени незаслуженно приписывалась честь их открытия. Во второй половине заседания был заслушан доклад проф. И. П. Натансона «О работах Е. И. Золотарёва по конструктивной теории функций». Докладчик особо отметил связь работ Е. И. Золотарёва с современной математикой.

Ниже приводится резюме докладов В. И. Смирнова и Н. П. Еругина.

В. И. Смирнов — «Современные проблемы математической физики».

В начале доклада были указаны основные этапы развития математической физики, приведшие к современному состоянию этой отрасли математики. Было отмечено, что математическая физика за последние полстолетия, с одной стороны, обогатилась решением ряда важных и трудных конкретных задач физики, с другой стороны—создана общая теория дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков и систем дифференциальных уравнений, а также даны новые постановки и новые методы решения задач математической физики, связанные прежде всего с функциональным анализом.

В первом разделе были отмечены работы А. М. Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкости, Н. М. Гюнтера по гидродинамике, С. Н. Бернштейна по уравнениям эллиптического типа, В. А. Фока по дифракции и электромагнитному полю, работы по распространению колебаний (С. Л. Соболев, В. И. Смирнов, Г. И. Петрашень) и ряд других работ. Указано на влияние некоторых из этих работ на разработку новых методов исследования.

В направлении общих исследований упоминались работы В. А. Стеклова по теории замкнутости систем ортогональных функций и по оправданию метода Фурье в одномерном случае, а также работы Н. М. Гюнтера, относящиеся к новым постановкам задач математической физики, теории функций от областей и методу усреднения функций.

Далее была дана общая характеристика современного положения математической физики главным образом в направлении работ С. Л. Соболева и И. Г. Петровского.

Отмечалась плодотворность идеи получения интегральных оценок для решений различных задач и использования этих оценок для доказательства единственности, корректности и существования этих решений.

На примере задачи Коши и смешанной задачи для гиперболических уравнений были даны современная постановка этих задач и способы их решения.

Далее было указано современное проведение прямых методов вариационного исчисления для предельных задач в случае уравнений эллиптического типа.

Наконец, были отмечены некоторые новые задачи, которые естественно возникают в ходе развития современной математической физики:

1. Дальнейшее развитие общей теории дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений. Разработка для них постановок различных задач и, в частности, смешанной задачи для уравнений гиперболического типа.

2. Дальнейшее развитие теории уравнений с частными производными смешанного типа. Рассмотрение частных задач для таких уравнений в случае, когда число независимых переменных более двух.

3. Исследование линейных уравнений с частными производными при наличии особенностей в коэффициентах, в частности спектральная теория для уравнения такого вида.

4. Решение предельных задач для уравнений эллиптического типа в случае неограниченных областей. Выяснение условий на бесконечности и спектральная теория для этого случая.

5. Вопросы асимптотики собственных функций для уравнений с частными производными.

6. Решение задачи Коши для гиперболических систем специального вида в форме, удобной для вычислений и качественного исследования.

7. Продолжение качественного исследования эллиптических систем и то же для эллиптических уравнений высших порядков.

8. Предельные задачи для областей специального вида в случае систем уравнений в связи с дальнейшим развитием теории специальных функций.

9. Обратные граничные задачи.

10. Предельные задачи для нелинейных уравнений и, в частности, для уравнений, связанных с вариационными задачами.

11. Распространение колебаний в однородных и неоднородных средах при наличии границ специального вида. Качественное исследование решений таких задач. Проблемы диффракции, сюда относящиеся.

12. Качественное исследование распространения волн в неоднородных средах со специальной неоднородностью в связи с геометрической оптикой этой среды.

Н. П. Еругин «Методы Ляпунова и вопросы устойчивости в целом».

Первый метод Ляпунова позволяет не только обнаружить наличие асимптотической устойчивости невозмущённого движения, но и построить решения в окрестности точки равновесия в виде степенных рядов по начальным значениям неизвестных функций с коэффициентами, зависящими от независимого переменного t.

Эти ряды сходятся равномерно в промежутке $t>0$ при достаточно малых начальных значениях неизвестных функций.

Рассматривая такие разложения в случае установившихся движений, мы приходим к важной для теории устойчивости задаче об определении области начальных значений неизвестных функций, в которой такие разложения Ляпунова сходятся.

Когда имеем только две неизвестные функции x, y и область асимптотической устойчивости (область, в которой начинаются движения, асимптотически приближающиеся к точке равновесия при $t\to\infty$) ограничена предельным циклом, то интересно выяснить, не будет ли в некоторых случаях область сходимости совпадать с этой областью асимптотической устойчивости и какие факторы вообще определяют область сходимости этих рядов. В докладе было также обращено внимание на ещё не разрешённую задачу построения решений в окрестности асимптотически устойчивой точки равновесия, когда имеются и нулевые характеристичные числа системы первого приближения.

Далее в докладе освещались методы решения вопроса об асимптотической устойчивости в целом и проблема о существовании функции Ляпунова, позволяющей установить наличие асимптотической устойчивости в целом.

Затронуты были и другие вопросы.

1954 г. *т. IX, вып. 3 (61)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

Заседание 22 сентября 1953 г.

Посвящено памяти Е. И. Золотарёва.

1. Вступительное слово В. И. Смирнова.

2. Доклад Б. А. Венкова «О работах Е. И. Золотарёва по теории чисел».

3. Доклад И. П. Натансона «О работах Е. И. Золотарёва по конструктивной теории функций».

Заседание 13 октября 1953 г.

1. Доклад С. Г. Михлина «Об интегрировании уравнения Пуассона в бесконечной области».

2. Доклад А. В. Малышева «О целых точках на эллипсоидах».

Рассматривается вопрос о представлении целых чисел m положительными тернарными квадратичными формами $f(x, y, z)$ с целыми коэффициентами

$$m = f(x, y, z). \tag{1}$$

Представления (x, y, z) числа m формой f суть целые точки на эллипсоиде (1). Изучаются асимптотические формулы (при $m \to \infty$) для количества целых точек на эллипсоидах некоторого типа (теорема 2); для количества целых точек на таких эллипсоидах, принадлежащих к данному классу вычетов (теоремы 1, 3); для количества целых точек, находящихся в некоторой области на эллипсоиде (теоремы 4, 5).

В основе всех доказательств лежит следующая лемма из арифметики кватернионов.

Лемма. *Пусть R — примитивный кватернион нечётной нормы r, m — целое число, примитивно представимое суммой трёх квадратов и простое с r; наконец, l — целое число, удовлетворяющее сравнению*

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod r. \tag{2}$$

Обозначим через $t(R, m)$ количество целых примитивных векторов L нормы m, для которых кватернион $l + L$ делится слева на R. Тогда при $m \to \infty$

$$t(R, m) \sim \frac{t(m)}{\sigma_r}; \tag{3}$$

где $t(m)$ — количество целых примитивных векторов L нормы m, а σ_r — количество примитивных, не ассоциированных справа кватернионов нормы r.

С помощью этой леммы доказываем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть r — нечётное число, m — целое число, простое с r, и с условием $\left(\frac{-m}{p}\right)=1$ для всех простых $p \setminus r$. Пусть, далее, x_0, y_0, z_0 — такие целые числа, что*

$$m \equiv x_0^2+y_0^2+z_0^2 \pmod r. \tag{4}$$

Обозначим через $t(r, m; x_0, y_0, z_0)$ количество тех примитивных точек на сфере $x^2+y^2+z^2=m$, для которых

$$(x, y, z) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod r. \tag{5}$$

Тогда при $m \to \infty$

$$t(r, m; x_0, y_0, z_0) \sim \frac{t(m)}{r^2\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}, \quad p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_h^{e_k}=r. \tag{6}$$

Помимо сферы в докладе рассматриваются эллипсоиды (1), где f — форма рода $\mathfrak{G}_{[r,1]}$. Говорят, что квадратичная форма $f(x, y, z)$ инвариантов $[r, 1]$, где r — нечётное число, принадлежит роду $\mathfrak{G}_{[r,1]}$, если $\left(\frac{f}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ для всех простых $p \setminus r$.

Теорема 2. *Пусть r — нечётное число; $f(x, y, z) \in \mathfrak{G}_{[r,1]}$; целое число m просто с r, причём сравнение $m \equiv f(x, y, z) \pmod{8r}$ разрешимо. Обозначим через $t(f, m)$ количество примитивных представлений числа m формой f. Тогда при $m \to \infty$*

$$t(f, m) \sim \begin{cases} \dfrac{12\cdot 2^k h(-m)}{r\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}, & m \equiv 1, 2 \pmod 4, \\ \dfrac{8\cdot 2^k h(-m)}{r\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}, & m \equiv 3 \pmod 8, \end{cases} \tag{7}$$

$$t(f, m)=0, \qquad m \equiv 0 \pmod 4, \equiv 7 \pmod 8,$$

где $h(-m)$ — количество классов положительных собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m; $r=p_1^{e_1}\ldots p_k^{e_k}$.

Теорема 3. *Пусть r и g — нечётные числа; $f \in \mathfrak{G}_{[r,1]}$; m — целое число, удовлетворяющее условиям*

$$\text{о. н. д. } (m, rg)=1, \quad m \equiv f(x_0, y_0, z_0) \pmod{8rg}. \tag{8}$$

Обозначим через $t(f, m, g; x_0, y_0, z_0)$ количество примитивных представлений $m=f(x, y, z)$, для которых $(x, y, z) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod g$. Тогда при $m \to \infty$

$$t(f, m, g; x_0, y_0, z_0) \sim \frac{2^k t(m)}{\sigma_{rg^2}}, \tag{9}$$

Теорема 4 (см. [1]). *Пусть q — некоторое простое число, а целое число m примитивно представимо суммой трёх квадратов, причём $\left(\frac{-m}{q}\right)=1$. Тогда для достаточно больших m в любом конусе раствора λ (где $\lambda>0$ не зависит от m), вершина которого лежит в точке O, найдётся*

$$> \varkappa_{q,\lambda}\, t(m) \tag{10}$$

целых примитивных точек сферы $x^2+y^2+z^2=m$.

Теорема 5. *Пусть* $f \in \mathfrak{G}_{[r,1]}$ *и для целого числа* m, *простого с нечётным числом* r, *сравнение* $m \equiv f(x, y, z) \pmod{8r}$ *разрешимо. Тогда для достаточно больших* m *в любом конусе раствора* λ (*где* $\lambda > 0$ *не зависит от* m) *найдётся*

$$> \varkappa_{r,\lambda} h(-m) \qquad (11)$$

целых примитивных точек эллипсоида $f(x, y, z) = m$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник и А. В. Малышев, О целых точках на сфере, ДАН СССР 89 (1953), 209—212.

Заседание 27 октября 1953 г.

1. Доклад Б. Н. Делоне (Москва) «О росте дискриминантов полей алгебраических чисел данной степени».

2. Доклад В. И. Смирнова «О сопряжённых функциях».

Заседание 10 ноября 1953 г.

1. Доклад А. Д. Александрова «О международном съезде геометров».

2. Доклад П. С. Новикова (Москва) «Проблема тождества в теории групп».

Заседание 24 ноября 1953 г.

1. Доклад Ю. В. Линника и А. П. Хусу «Математико-статистическое описание неровностей профиля поверхности при шлифовании».

Докладчики делали попытку представления кривой профиля шлифованной поверхности как выборочной кривой некоторого нормального стационарного процесса с корреляционной функцией, приближённо представимой в виде

$$B(\tau) = B(0) \cdot e^{-\alpha|\tau|}.$$

Описание неровностей делалось при помощи параметров $B(0)$ и α; ординаты отсчитывались от средней линии профиля, найденной по методу наименьших квадратов, что вводило ещё два параметра. Подробно обработаны пять профилей. Делались попытки для любого заданного уровня предсказывать суммарную длину $S(u)$ кусков, вырезаемых профилем на уровне, и суммарную площадь (Qu) гребешков, возвышающихся над уровнем. Эти величины существенны при изучении трения поверхностей. Предсказания хорошо согласуются с конкретными наблюдениями.

2. Доклад П. Н. Реморова «Обзор исследований по теореме Ферма и сходным с ней задачам».

Заседание 8 декабря 1953 г.

1. Доклад Е. С. Ляпина «О системах операторов с неподвижными точками».

Изоморфное отображение полугруппы A в полугруппу всех операторов некоторого множества M назовём представлением A операторами множества M.

Будем говорить, что полугруппа A принадлежит классу P, если при любом представлении A операторами каждый оператор представления имеет неподвижную точку. Оказывается, что для принадлежности A к классу P необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент A имел правый нуль. Класс P содержит, например, полугруппу всех операторов сближения полного метрического пространства и некоторые другие важные полугруппы операторов.

Произвольную полугруппу операторов A множества M можно всегда пополнить операторами M так, чтобы имело место одно из двух: 1) пополненная полугруппа операторов A' принадлежит P; тогда всякий оператор из A имеет в M неподвижную точку; 2) A' не принадлежит P; тогда не все операторы A имеют неподвижные точки.

Для класса P строится базисный класс P', т. е. класс, удовлетворяющий условиям:

1) всякий элемент любой полугруппы из P содержится в некоторой подполугруппе из P';

2) если всякий элемент полугруппы A содержится в некоторой полугруппе из P', то A принадлежит P;

3) класс P' — «наименьший», удовлетворяющий этим условиям.

2. Доклад Ю. Г. Решетняка «Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны».

Заседание 22 декабря 1953 г.

1. Доклад О. А. Олейник (Москва) «Об уравнениях в частных производных с малым параметром при старших производных».

2. Доклад Х. Л. Смолицкого «О приближённом разложении многочленов на множители».

1954 г. т. IX, вып. 4 (62)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

Заседание 9 марта 1954 г.

1. Г. Ю. Джанелидзе «Принцип Сен-Венана в теории упругости и связанные с ним задачи».

1. Сформулированный в 1855 г. Сен-Венаном принцип «Способ приложения и распределения сил по концам призмы безразличен для эффектов, вызванных на остальной длине, так что всегда возможно с достаточной степенью приближения заменить силы, которые были приложены, статически эквивалентными силами, имеющими тот же полный момент и ту же равнодействующую»—является одним из основных положений современной теории упругости.

2. Существующие энергетические доказательства принципа Сен-Венана (Саусвелла, Занабони и др.) относятся лишь к факту убывания в интегральном смысле напряжений и деформаций, вызванных действием системы сил, статически эквивалентных нулю. Эти доказательства не позволяют дать оценку порядка убывания напряжений и деформаций, которая может быть получена лишь для конкретных классов задач.

Имеющиеся решения показывают, что в случае неограниченных тел порядок затухания степенной, а в случае ограниченных упругих тел—экспоненциальный.

3. Рассмотрение действия системы сил, распределённой в малом объёме безграничной среды, показывает, что перемещение слагается из перемещения от главного вектора и перемещений от некоторой системы тензоров (полимоментов). В состав перемещения от первого тензора входит перемещение от главного момента системы сил и тензора бисил.

Каждому полимоменту отвечает свой характер затухания, поэтому статическая эквивалентность двух систем сил не всегда обеспечивает большую быстроту затухания, чем простое равенство главных векторов.

4. Обобщение принципа Сен-Венана на другие задачи математической физики приводит к следующей постановке задачи: на части границы изменяются граничные условия, но сохраняются некоторые интегральные величины; как меняется при этом решение (в области, достаточно удалённой от места, где были изменены граничные условия)?

Упрощение исходной системы уравнений может существенно изменить характер затухания «интегрально-эквивалентных» решений.

2. Были произведены довыборы президиума семинара. Членом президиума семинара избран Г. Ю. Джанелидзе.

Заседание 23 марта 1954 г.

Н. А. Шанин «О конструктивном определении некоторых понятий анализа».

Доклад вызвал дискуссию, в которой приняли участие А. А. Марков, Л. В. Канторович и др.

Заседание 13 апреля 1954 г.

1. Б. А. Венков «Об одном классе евклидовых многогранников».

1. Б. А. Венков «Об одном классе евклидовых многогранников».

В первой части доклада был сделан краткий обзор работ по правильному делению евклидова пространства. Пусть R^n—n-мерное евклидово пространство. Выпуклый, конечный, n-мерный многогранник Q в R^n называется *параллелоэдром*, если существует система параллельных Q многогранников Q, Q', Q'',..., покрывающих R^n и не имеющих общих внутренних точек. Если в любом месте R^n соприкосновение Q, Q', Q'',... происходит по целым граням (любого числа измерений), то Q называется *нормальным*, в противном случае—*ненормальным* параллелоэдром. Нахождение всех геометрически различных типов параллелоэдров для данного n (и вообще исследование их свойств) и представляет задачу о правильном делении евклидова пространства. Для $n=3$ эта задача была решена (не вполне строго) Е. С. Фёдоровым (1885 г.). Г. Минковский (1896 г.) доказал для любого n существование центра (т. е. центра симметрии) у параллелоэдра. Фундаментальные исследования по теории параллелоэдров принадлежат Г. Ф. Вороному (1908—1909 гг.); он рассматривает нормальные параллелоэдры, притом такие, которые определённым образом связаны с положительными квадратичными формами от n переменных (и до сих пор неизвестно, все ли нормальные параллелоэдры принадлежат к этому классу). Алгорифм Вороного, протекающий в пространстве коэффициентов положительной квадратичной формы, действительно даёт все типы параллелоэдров рассматриваемого класса, однако их геометрические свойства в пространстве R^n остаются скрытыми. В позднейшее время образовалось новое направление в рассматриваемой теории (Б. Н. Делоне [1], 1929, А. Д. Александров [2], 1934), задачей которого является изучение параллелоэдров в самом пространстве R^n; в этих работах получены все типы нормальных (Б. Н. Делоне) и ненормальных (А. Д. Александров) четырёхмерных параллелоэдров ($n=4$), причём имеются некоторые общие соображения для любого n. К этому направлению примыкает недавно опубликованная работа докладчика (Б. А. Венков [3]). Из работ Г. Минковского, Б. Н. Делоне, А. Д. Александрова можно вывести необходимое условие того, чтобы многогранник был параллелоэдром.

Теорема 1. *Если Q—нормальный или ненормальный параллелоэдр в R^n, то:* 1) *Q имеет центр,* 2) *каждая $(n-1)$-мерная грань Q имеет центр,* 3) *проекция Q параллельно любой его $(n-2)$-мерной грани g'_{n-2} в дополнительную к g'_{n-2} плоскость R^2 есть двумерный параллелоэдр (т. е. либо параллелограмм, либо шестиугольник с центром), вершины которого суть проекции граней g_{n-2} многогранника Q, лежащих в плоскостях R^{n-2}, параллельных плоскости рассматриваемой грани g'_{n-2}.*

Во второй части доклада было изложено краткое содержание работы [3]. Пусть P—выпуклый конечный n-мерный многогранник в R^n, обладающий свойствами 1), 2) теоремы 1, и g_{n-1}—любая его $(n-1)$-мерная грань. Можно приложить к P параллельный ему многогранник P', соприкасающийся с P по целой грани g_{n-1} (многогранники P, P' назовём смежными). Фиксируя положение P в R^n, приложим к P все смежные с ним многогранники, к каждому из полученных—все смежные с ними и т. д.; совокупность полученных многогранников назовём *поверхностью* M. Последовательность многогранников из M, в которой каждые два рядом стоящих члена смежны, назовём *цепью*. Цепь назовём цепью *типа* k (k—фиксированное, $0 \leqslant k \leqslant n-2$), если все её многогранники имеют общую k-мерную грань. Поверхность M (или цепь в ней) назовём накрывающейся, если в M (или в цепи) существуют два (различных по положению в R^n) многогранника, имеющих общую внутреннюю точку. Основным результатом работы [3] является доказательство теоремы 2.

Теорема 2. *Если M—накрывающаяся поверхность, то в ней существуют накрывающиеся цепи типа $n-2$.*

Из теоремы 2 выводится, что необходимое условие того, чтобы многогранник был параллелоэдром (указанное в теореме 1), является и достаточным; точнее: *если выпуклый, конечный, n-мерный многогранник Q в R^n удовлетворяет условиям* 1), 2), 3) *теоремы*

1, то *Q есть нормальный параллелоэдр*. Отсюда, наконец, получается следствие: *всякий ненормальный параллелоэдр в R^n есть вместе с тем нормальный параллелоэдр.*

А. Д. Александров [4] распространил теорему 2 на пространство Лобачевского и сферическое пространство, а также на другие возможные случаи прикладывания многогранников.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Delaunay, Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions, Изв. АН СССР № 1 (1929), 79—110, № 2 (1929), 147—164.

[2] А. Д. Александров, Вывод четырёхмерных ненормальных параллелоэдров, Изв. АН СССР № 6 (1934), 803—817.

[3] Б. А. Венков, Об одном классе евклидовых многогранников, Вестн. Ленингр. университета № 2 (1954), 11—31.

[4] А. Д. Александров, О заполнении пространства многогранниками, Вестн. Ленингр. университета № 2 (1954), 33—43.

2. О. А. Ладыженская «О решении основной задачи гидродинамики вязкой жидкости».

Содержание доклада опубликовано в ДАН 95, № 6, 1954 г. — статья А. А. Киселёва и О. А. Ладыженской «О решении линеаризированных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости».

Заседание 27 апреля 1954 г.

М. В. Пентковский «Номография» (обзорный доллад).

1. Номограммы—специальные изображения функциональных зависимостей. Назначение номограмм.

2. Номограммы различных типов: номограммы из выравненных точек; сетчатые номограммы; транспарантные номограммы.

3. Погрешности вычислений по номограммам. Точное и приближённое номографирование.

4. Современные задачи практической и теоретической номографии: преобразование номограмм, проблема анаморфозы, методы приближённого номографирования.

5. Первоначальный период развития номографии; Окань и его школа. Современное состояние номографии за рубежом.

6. Советская номографическая школа; основные направления в работах советских номографов.

Заседание 11 мая 1954 г.

1. Ю. В. Линник «Цепи Маркова и целые точки на сфере». Содержание доклада публикуется в ДАН 95, № 7, 1954 г.

2. А. А. Киселёв «О решении уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости».

1. Сначала была дана библиография и краткий разбор основных работ, посвящённых решению общих, нелинеаризированных уравнений Навье-Стокса для случая нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости.

Доклад посвящён решению указанной только что задачи для случая плоских течений $\vec{v}=(v_1(x_1,\ x_2,\ t),\ v_2(x_1,\ x_2,\ t))$ в ограниченной области $\Omega\times[0,\ T]$. Кроме того, при условии малости некоторого выражения, которое естественно назвать обобщённым числом Рейнольдса, устанавливается существование решения для всех моментов времени и его затухание при $t\to\infty$.

2. Указанная в п. 1 задача сводится, известным образом, к решению уравнения

$$L\psi\equiv\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}-\nu\Delta^2\psi+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2}=f \qquad (1)$$

(ν — коэффициент вязкости) в конечной области Ω плоскости (x_1, x_2) при начальном условии

$$\psi\,|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2) \tag{2}$$

и граничных условиях

$$\psi\,\Big|_S = \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S = 0. \tag{3}$$

Прежде всего обобщим понятие решения этой задачи. Назовём непрерывную функцию $\psi(x_1, x_2, t)$ *обобщённым решением задачи* (1), (2), (3) в цилиндре $Q = \Omega \times [0, T]$, если а) она и её обобщённая производная по t имеют квадратично-суммируемые по Q обобщённые производные по x_1 и x_2 до второго порядка включительно; б) ψ удовлетворяет условиям (2) и (3); в) ψ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left\{ \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \nu\Delta\psi\,\Delta\Phi + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Delta\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Delta\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + f\Phi \right\} dQ = 0 \tag{4}$$

для любой функции Φ, дважды непрерывно дифференцируемой по x_1 и x_2 и удовлетворяющей условиям (3). Мы остановимся здесь на двух случаях: а) когда $\psi_0 \equiv 0$ и б) когда $f \equiv 0$ и начальные возмущения невелики.

Общий случай исследуется аналогично первому, если ввести в рассмотрение функцию $v = \psi - \psi_0$.

Прежде всего доказывается, что обобщённое решение рассматриваемой здесь задачи единственно, по крайней мере в цилиндре $Q = \Omega \times [0, t_1]$ некоторой высоты t_1. Во втором же случае оно единственно в цилиндре любой высоты.

Для определения этих обобщённых решений мы применяем метод конечных разностей. Именно, пространство x_1, x_2, t разобьём плоскостями $x_i = k_i h$, $t = m\Delta t$, k_i, $m = 0, \pm 1, \ldots$ Обозначим область, составленную из всех элементарных квадратов, принадлежащих Ω, через Ω_h, а границу Ω_h обозначим через S_h. Уравнение (1) заменим разностным следующим образом:

$$L_h\psi = \Delta_h\psi_{\bar t} - \nu\Delta_h^2 s\psi + \frac{1}{2}s\psi_{x_2}A_{\bar x_1} + \frac{1}{2}s\psi_{\bar x_2}A_{\bar x_1}^{-x_2} - \frac{1}{2}s\psi_{x_1}A_{\bar x_2} - \frac{1}{2}s\psi_{\bar x_1}A_{\bar x_2}^{-x_1} = f, \tag{5}$$

где

$$\Delta_h\psi = \sum_{i=1}^{2}\psi_{x_i\bar x_i}, \qquad A = \Delta_h s\psi^{-t}.$$

Обозначения, а также теоремы вложения в разностях и ряд других вспомогательных теорем о конечных разностях мы заимствуем из книги О. А. Ладыженской [1].

Определим функцию ψ_h (в дальнейшем мы её будем обозначать пока просто ψ) из следующих условий: она равна нулю на S_h и вне Ω_h для всех $t = k\Delta t$, $k = -1, 0, 1, \ldots$; равна ψ_0 на Ω_h при $t = -\Delta t$; 0; удовлетворяет алгебраической системе (5) для всех точек решётки, принадлежащих $\Omega_h - S_h$ при $t = k\Delta t$, $k = 0, 1, \ldots$ Мы показываем, что ψ_h однозначно определяется из перечисленных условий и что в пределе при h и $\Delta t \to 0$ ψ_h дают искомое решение. Остановимся несколько подробнее на каждом из случаев а) и б).

а) Пусть f и её обобщённая производная по t квадратично суммируемы по $Q = \Omega \times [0, T]$, где T — какое-либо положительное число (для упрощения дальнейших рассуждений будем считать здесь f и $\frac{\partial f}{\partial t}$ непрерывными). Положим $\psi_h = 0$ для $t = -\Delta t$; 0. Для определения функции ψ_h на каждом шаге по $t = k\Delta t$, $k = 1, 2, \ldots$, мы имеем *линейную* алгебраическую систему (хотя рассмотренная в целом, сразу для всех t, она нелинейна). Однозначная разрешимость её выводится из тождества

$$h^2\sum_{\Omega_h} - L_h\psi s\psi = h^2\sum_{\Omega_h}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\psi_{x_i})_t^2 + \nu(\Delta_h s\psi)^2\right\} = h^2\sum_{\Omega_h}(-f\cdot s\psi) \tag{6}$$

и вытекающего из него неравенства

$$h^2 \sum_{\Omega_h} \left\{ (s\psi)^2 + \sum_{i=1}^{2} (\psi_{x_i}^2) + (\Delta_h s\psi)^2 \right\} \leqslant C_1 h^2 \sum_{\Omega_h} f^2, \tag{7}$$

имеющих место при *любой* функции A, заданной на решётке. Сходимость разностного процесса (равномерную сходимость ψ_h к искомому решению ψ, а также сходимость разностных отношений ψ_h к соответствующим производным ψ в различных метриках) мы устанавливаем, исходя из (6) и (7), а также из нижеприводимого неравенства.

Именно, составляем сумму

$$\Delta t \sum_{k=0}^{p-1} h^2 \sum_{\Omega_h} (-f_t s\psi_t) = \Delta t \sum_{k=0}^{p-1} h^2 \sum_{\Omega_h} -(L_h\psi)_t \, s\psi_t.$$

После ряда преобразований и оценок типа теорем вложения в разностях мы получим отсюда неравенство

$$F_1^2(p) + [2\nu - C_2 \max_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \varphi(k)] \, \Delta t \sum_{k=0}^{p-1} F^2(k) \leqslant C_3 \Delta t \sum_{k=0}^{p-1} h^2 \sum_{\Omega_h} f_t^2 + F_1^2(0) \equiv A_p^2, \tag{8}$$

где

$$F_1^2(p) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{2} (\psi_{x_i t})^2 \Big|_{t=p\Delta t},$$

$$F^2(p) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i,\,s=1}^{2} (s\psi_{x_i x_j t})^2 \Big|_{t=p\Delta t},$$

$$\varphi^2(p) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i,\,j=1}^{2} (s\psi_{x_i x_j})^2 \Big|_{t=p\Delta t} \equiv h^2 \sum_{\Omega_h} (\Delta_h s\psi)^2.$$

Постоянные C_k определяются лишь размерами области Ω. Из (8) и (7) можно вывести, что во всяком случае для всех $p\Delta t$, не превосходящих некоторое число $t_1 > 0$ (величина t_1 зависит лишь от C_1, C_2, C_3) и величины $\Delta t \sum_{k=0}^{p} h^2 \sum_{\Omega_h}^{1} (f^2 + f_t^2)$, выражение $[2\nu - C_2 \max_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \varphi(k)]$ будет больше некоторого числа $C_4 > 0$, и потому из (8) следует, что

$$F_1(p) \leqslant A_p,$$

$$\Delta t \sum_{k=0}^{p-1} F^2(k) \leqslant \frac{A_p^2}{C_4}. \tag{9}$$

Величины A_p равномерно для всех h и Δt ограничены, если $p\Delta t \leqslant T$. Поэтому из (9) мы можем извлечь все нужные нам следствия для возможности предельного перехода по $h \to 0$ и $\Delta t \to 0$ и получения искомого решения ψ.

Переходим теперь к случаю б).

б) Будем считать, что $f \equiv 0$ и

$$\frac{C_5}{\nu^3} B_1 B_2 \sqrt{1 + \frac{C_6}{\nu^{3/2}} \sqrt{B_1 B_2}} < 1, \tag{10}$$

где C_5 и C_6—постоянные, определяемые лишь размерами области, а

$$B_1 = \left\{ \int_{\Omega} \left(\nu\Delta^2\psi_0 - \frac{\partial\psi_0}{\partial x_2} \frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_0}{\partial x_1} \frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x_2} \right)^2 d\Omega \right\}^{1/2},$$

$$B_2 = \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{grad}^2 \psi_0 \, d\Omega \right\}^{1/2}.$$

Ограничение (10) мы и назвали выше условием малости обобщённого числа Рейнольдса.

Мы устанавливаем, что в этом случае обобщённое решение задачи определяется (с использованием указанной выше схемы) для любого $t \geqslant 0$. Кроме того, для этого решения справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad}^2 \psi \, d\Omega \Big|_{t=0}^{t=t} + 2\nu \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} (\Delta\psi)^2 \, d\Omega \, dt = 0 \qquad (11)$$

и существует интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,\, j=1}^{2} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x_i \partial x_j \partial t}\right)^2 \partial\Omega \, dt. \qquad (12)$$

Последнее выводим из неравенства, аналогичного (8). Из (11) и (12) можем заключить, что *при* $t \to \infty$ *решение* ψ *стремится к нулю равномерно относительно* $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Всё вышесказанное относилось к получению обобщённого решения ψ. В силу самого определения ψ есть непрерывная в $\overline{Q}$ функция. Дальнейшее исследование её дифференциальных свойств при различных предположениях гладкости относительно данных функций f и ψ_0 может быть (во всяком случае для внутренних точек области Q) выполнено по плану аналогичных исследований для линейных уравнений, проведённых О. А. Ладыженской (см. [1], гл. III и IV).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболических уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1953.

Заседание 25 мая 1954 г.

1. Д. К. Фадеев и З. И. Боревич «К теории гомологий в группах».

Доложены результаты докладчиков по теории гомологий в группах, опубликованные в ряде статей (1947—1954 гг.) Сформулированы проблемы, представляющие интерес для дальнейшей разработки.

2. Е. В. Вороновская «Полиномы наименьшего отклонения в свете функционального анализа».

1. Конечный отрезок действительных чисел $(\mu_i)_0^n$ определяет линейный функционал на множестве $\{P_n(x)\}$ полиномов n-й степени:

$$F(P) = \sum_0^n p_i \mu_i = P_n(\overline{\mu}).$$

Норма N этого функционала достигается некоторым полиномом $Q_n(x)$; если положить $\max\limits_{[0,\,1]} |Q_n(x)| = 1$, то $F(Q) = +N$. Полином $Q_n(x)$ называется экстремальным полиномом отрезка $(\mu_i)_0^n$.

2. Отрезок $(\mu_i)_0^n$ назван не абсолютно монотонным, если $Q_n(x) \neq \pm 1$, т. е. если $N > |\mu_0|$. Вся последующая теория относится только к не абсолютно монотонным отрезкам.

3. Каждому отрезку $(\mu_i)_0^n$ соответствует вполне определённый, *единственный* набор чисел $(\sigma_i)_1^s$, где $0 \leqslant \sigma_1 < \ldots < \sigma_s \leqslant 1$, такой, что $\mu_k = \sum\limits_{i=1}^{s} \sigma_i^k \delta_i$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, причём если $Q_n(x)$ — экстремальный полином отрезка, то $Q_n(\sigma_i) = \pm 1$ и $\operatorname{sgn} \delta_i = Q_n(\sigma_i)$. Число s узлов σ_i подчинено условию $2 < s$, и среди чисел δ_i всегда имеются числа разных знаков. Если каждому σ_i отнести знак соответствующего ему δ_i, то $(\overset{\pm}{\sigma_i})_1^s$ образует *истинное* распределение (узлов) отрезка $(\mu_i)_0^n$

4. Если число s истинных узлов отрезка $(\mu_i)_0^n$ подчинено неравенству $s > \frac{n}{2}+1$, то экстремальный полином отрезка $Q_n(x)$ — *единственный*.

5. Каждому полиному $Q_n(x)$ с $\max|Q_n(x)|=1$ также соответствует вполне определённое распределение чисел (узлов) $(\overset{\pm}{\sigma_i})_1^s$, где σ_i — все точки интервала $[0, 1]$, в которых $Q_n(x)=\pm 1$. Если $s > \frac{n}{2}+1$, то $Q_n(x)$ называется полиномом II класса.

6. Если $\{Q_n(x)\}$ — множество всех полиномов II класса, то его полиномы можно классифицировать, введя понятие о паспорте полинома: $[n, s, p]$, где n — степень полинома, s — число его узлов на $[0, 1]$, p — число повторений знака в распределении $\overset{\pm}{\sigma_1}, \overset{\pm}{\sigma_2}, \ldots, \overset{\pm}{\sigma_s}$, т. е. число тех интервалов между узлами, границам которых отнесены одинаковые знаки. Единственные полиномы паспорта $[n, n+1, p]$ суть $\pm T_n(x) = \pm\cos n \arccos(2x-1)$. Для них $p=0$.

7. Если в отрезке $(\mu_i)_0^n$ один из параметров μ_k $(k>0)$ переменный, пусть $k=n$ и $\mu_n=\theta$, то существует вполне определённый промежуток (μ_n', μ_n'') со следующими свойствами: если $\theta \geqslant \mu_n''$ или $\theta \leqslant \mu_n'$, то экстремальный полином отрезка есть один из полиномов $\pm T_n(x)$, если $\mu_n' < \theta < \mu_n''$, то экстремальный полином $Q_n(x) \neq \pm T_n(x)$, причём каждым двум значениям θ из упомянутого интервала соответствуют два различных экстремальных полинома. Интервал (μ_n', μ_n'') называют *критическим интервалом* параметра μ_n. Если, к тому же, отрезок $(\mu_i)_0^n$ при любом θ остаётся отрезком II класса, то каждому значению θ соответствует единственный экстремальный полином $Q_n(x, \theta)$.

8. Норма отрезка $(\mu_i)_0^n$, содержащего переменный параметр θ, $N(\theta)$ — есть непрерывная функция от θ; пусть $\theta=\mu_n$; тогда $N(\theta)$ имеет одну точку минимума:

$$\theta=\mu_n^*, \quad \text{где} \quad \mu_n' \leqslant \mu_n^* \leqslant \mu_n''.$$

Если имеем отрезок II класса, то экстремальный полином отрезка $Q_n(x)=\sum_{k=0} q_k(\theta)\, x^k$ таков, что все функции $q_k(\theta)$ непрерывны, а $q_n(\theta)$ монотонно возрастает в критическом интервале, обращаясь в нуль в точке $\theta=\mu_n^*$.

9. Задача В. Маркова (1892 г.) тождественна задаче об отыскании экстремального полинома $Q_n(x)$ заданного отрезка $(\mu_i)_0^n$.

10. Задача Пшеборского (1913 г.) об отыскании полинома, наименее отклоняющегося от нуля при наличии двух линейных зависимостей между коэффициентами полинома, приводится к упомянутой задаче Маркова, т. е. две данные зависимости могут быть заменены одной.

11. Взаимно однозначное соответствие, установленное в п. 7 между отрезком с переменным параметром и соответствующим экстремальным полиномом $Q_n(x, \theta)$, даёт возможность определить, изучить и аналитически построить семейство полиномов с помощью отрезка.

12. Простейший пример действия этого метода получается в случае приложения его к полиномам паспорта $[n, n, 0]$. *Всё* семейство этих полиномов $Q_n(x, \theta)$ *определяется* как семейство экстремальных полиномов пары отрезков $(\mu_i)_0^n$ и $(-\mu_i)_0^n$ вида

$$o_0, o_1, \ldots, o_{n-2}, \mp 1_{n-1}, \theta,$$

если θ пробегает в каждом отрезке все значения соответствующего критического интервала.

13. Семейство $Q_n(x, \theta)$ полностью совпадает с семейством полиномов Е. И. Золотарёва (1877 г.).

14. Коэффициенты $q_k(\theta)$ полиномов $Q_n(x, \theta)$ могут быть вычислены как интегралы системы дифференциальных уравнений 1-го порядка.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Математическая секция Ленинградского дома учёных)

Заседание 14 сентября 1954 г.

Н. А. Лебедев «Обзор экстремальных задач теории функций комплексного переменного».

Заседание 28 сентября 1954 г.

1. С. Б. Стечкин (Москва) «Абсолютная сходимость рядов Фурье и коэффициенты Фурье непрерывных функций».

2. С. М. Лозинский «Нелокальные теоремы существования обратных и неявных функций».

1. Пусть E^n есть n-мерное эвклидово пространство, f—функция из E^n в E^n. Рассмотрим уравнение

$$f(x)=\xi. \tag{1}$$

Классическая теорема о существовании обратной функции $x=\varphi(\xi)$ носит локальный характер: в ней утверждается, что обратная функция существует в некоторой области, но размеры этой области не указываются и без дополнительных предположений не могут быть указаны.

2. Вопрос о размерах области существования обратной функции тесно связан с вопросом о существовании решения уравнения

$$f(x)=0. \tag{2}$$

3. Теоремы, гарантирующие определённые размеры области существования обратной функции, были найдены Гурса, В. А. Стекловым и Л. В. Канторовичем. Результаты Л. В. Канторовича значительно сильнее результатов его предшественников и получаются как следствие из его же теорем о существовании решения уравнения (2) и о вычислении этого решения по методу Ньютона.

4. Однако теоремы Л. В. Канторовича для всякой нелинейной f гарантируют лишь ограниченную область существования обратной функции, в то время как для всякой f, «достаточно близкой» к «невырожденной» линейной, а также для известного класса «сильно нелинейных» функций f обратная функция существует во всём пространстве.

5. Удалось найти теоремы о существовании обратной функции, обобщающие теоремы Л. В. Канторовича. Эти теоремы во всех случаях гарантируют область существования обратной функции, содержащую область, гарантируемую теоремами Л. В. Канторовича; при этом, если f «достаточно близка» к «невырожденной»

линейной функции, а также для некоторого класса «сильно нелинейных» f, гарантируется существование обратной функции во всём пространстве.

6. Получены достаточные условия существования и единственности корня уравнения (2), обобщающие соответственные условия Л. В. Канторовича, однако вопрос о сходимости метода Ньютона нами не рассматривается.

7. Указанные теоремы можно распространить на случай, когда E^n заменяется абстрактным пространством Банаха, причём эти обобщения снова содержат соответственные теоремы Л. В. Канторовича.

8. Из теорем о существовании обратных функций могут быть выведены соответственные теоремы существования неявных функций.

Заседание 12 октября 1954 г.

Б. З. Вулих «Полуупорядоченные пространства и некоторые их применения к теории операторов».

Доклад в основном имеет обзорный характер. В первой части доклада даётся краткий обзор основных идей теории линейных полуупорядоченных пространств (K-пространств). Во второй части даётся обзор нескольких работ различных авторов по исследованию связей между теорией K-пространств и теорией самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.

Заседание 26 октября 1954 г.

1. Н. П. Еругин «К теории неявных функций».

В докладе рассматривается вопрос об области сходимости рядов, представляющих неявные функции, и об области непрерывного продолжения неявных функций.

Пусть дано уравнение

$$\Phi(x, y) = P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) + \ldots, \tag{1}$$

где $P_k(x, y)$ $(k = m, m+1, \ldots)$ суть однородные полиномы степени k с постоянными вещественными коэффициентами, и ряд (1) сходится в области D в окрестности начала координат. Изучается вопрос о том, когда уравнение (1) определяет функцию $y = y(x)$, обладающую свойством

$$y(x_1),\ y(x_2),\ \ldots \to 0 \quad \text{при} \quad x_1,\ x_2,\ \ldots \to 0, \tag{2}$$

где последовательность $x_1, x_2, \ldots \to 0$ лежит на кривой L, входящей в начало координат $x = 0$. Если речь идёт о вещественном решении, то последовательность $x_1, x_2, \ldots$ лежит на вещественной оси. Эта постановка вопроса немного отличается от привычной, так как обыкновенно интересуются решением, обладающим свойством

$$y(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{3}$$

Находится последовательность условий в виде алгебраических равенств, содержащих конечное число коэффициентов ряда (1), при выполнении хотя бы одного из которых существуют и фактически находятся все вещественные решения, обладающие указанным свойством.

Если ни одно из этих условий не выполнено, то имеются комплексные решения такого рода и они также могут быть найдены. Все эти решения представимы в виде сходящихся рядов по положительным степеням величины $x^{\frac{1}{n}}$, где n — целое положительное число. Эти ряды доставляют вещественные решения (если они есть) либо при $x \geqslant 0$, либо при $x \leqslant 0$, либо при $x \gtreqless 0$; существует константа K_n, выражаемая конечным числом алгебраических операций через коэффициенты ряда (1), знак которой в случае чётного n и определяет, какой именно из этих случаев имеет место. При нечётном n решение всегда определено при $x \gtreqless 0$. Если окажется, что $n > 1$, то точка $x = 0$ для рассматриваемого решения будет алгебраической особой точкой. Кроме того, мы видим, что решение, обладающее свойством (2), обладает всегда и свойством (3).

Известно, что если $\frac{\partial\Phi(0, 0)}{\partial y} \neq 0$, то обязательно $n=1$, т. е. $x=0$; в этом случае не будет особой точкой. Таким образом, всякая функция, определяемая равенством (1), обладает одним из свойств

а) $y(x) \to 0$ при $x \to 0$,

б) $|y(x)| \geqslant \delta > 0$ при $x \to 0$.

Всё это позволяет доказать следующую теорему.

Пусть уравнение (1) определяет в окрестности $x=0$ неявную функцию

$$y=y(x). \tag{4}$$

Тогда эта функция не имеет в области D или даже во всей области голоморфности функции $\Phi(x, y)$ таких особых точек $\overset{*}{x}$, что при $x \to \overset{*}{x}$ функция $y(x)$ не имеет предела и бесконечное число значений $y(x)$ при как угодно близких значениях x к $\overset{*}{x}$ принадлежит конечной замкнутой области D_1, погружённой в область D.

Другими словами, при аналитическом продолжении неявной функции $y=y(x)$, определяемой уравнением (1), для всякой точки $x=\overset{*}{x}$ из области D имеем либо

$$y(x) \to \overset{*}{y} \quad \text{при} \quad x \to \overset{*}{x}, \tag{5}$$

либо

$$y(x) \;\to\; \text{гр. области } D \quad \text{при} \quad x \to \overset{*}{x}. \tag{6}$$

В (6) $y(x)$ может приближаться к границе области и не стремиться к определённому комплексному числу.

В вещественной области всегда имеем (5), где $\overset{*}{y}$ — или из области D, или на границе области D. Если имеем (5), где $\overset{*}{y}$ — из области D, то $\overset{*}{x}$ может быть особой точкой лишь в том случае, когда кроме

$$\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0 \tag{7}$$

имеем ещё:

$$\frac{\partial\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial y}=0. \tag{8}$$

Таким образом, точка $\overset{*}{x}$ из области D может быть особой лишь в том случае, когда либо имеем (7) и (8), либо $\overset{*}{y}$ лежит на границе области голоморфности функции $\Phi(x, y)$.

Если ряд $\Phi(x, y)$ в равенстве (1) целый, то неявная функция $y=y(x)$, определяемая равенством (1), обладает свойством: при $x \to \overset{*}{x}$ (любое комплексное число) имеем или $y(x) \to \overset{*}{y}$, или $|y(x)| \to \infty$.

Если имеем (5), точка $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ принадлежит области голоморфности функции $\Phi(x, y)$ и $\overset{*}{x}$ — особая точка, то $\overset{*}{x}$ — алгебраическая особая точка. Ряд Тейлора $y= =b+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-a)^k=\varphi(x-a)$, представляющий неявную функцию, определяемую равенством (1), в окрестности точки $x=a$, наверное, сходится в круге радиуса R, равного расстоянию от a до ближайшей из точек $\overset{*}{x}$, определяемых равенствами (7) и (8).

Если уравнения (7) и (8) не имеют решения $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ в области D, то либо ряд $y=\varphi(x-a)$ сходится при всех x из области D, либо при $x \to \overset{*}{x} \in D$ имеем $y(x) \to$ гр. обл. D. Но точки, удовлетворяющие системе уравнений (7) и (8), не обязательно доставляют особые точки функции $y=\varphi(x-a)$.

Если для этой функции в точке $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ имеем равенства (7), (8), то значение $\overset{*}{x}$ будет особенным, если ещё имеем $\Phi'_x(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) \neq 0$.

Если же имеем $\Phi'_x(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0$, то точка $\overset{*}{x}$ может оказаться неособенной. Например, если в точке $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ имеем

$$\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0, \quad \Phi'_x(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0, \quad \Phi'_y(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0$$

и корни уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial x\,\partial y}\alpha + \frac{\partial^2\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial y^2}\alpha^2 = 0$$

α_1, α_2 суть различные, то точка $\overset{*}{x}$ не будет особенной для функции $y = \varphi(x-a)$. Мы имеем всегда конечное число условий, определяющих, будет или нет точка $\overset{*}{x}$ особенной для функции $y = \varphi(x-a)$. Эти условия состоят в том, что наряду с уравнениями (7) и (8) должны выполняться ещё некоторые равенства, легко составляемые при помощи частных производных от функции $\Phi(x, y)$.

Следует, однако, обратить внимание на то, что в особой точке $\overset{*}{x}$ функция $y = y(x)$ не перестаёт существовать и сохраняет непрерывность. Функция $y = y(x)$ непрерывно продолжима до тех пор, пока $y(x)$ остаётся в области голоморфности функции $\Phi(x, y)$. Таким образом, если $\Phi(x, y)$ вещественная и мы имеем вещественную неявную функцию $y = y(x)$, определённую в окрестности начала координат равенством (1), то это решение непрерывно продолжимо в области вещественных x до тех пор, пока $y(x)$ остаётся в области D и на пути x не встречается такого рода особая точка $\overset{*}{x}$, в окрестности которой вещественная функция $y = y(x)$ определяется лишь с одной стороны от $\overset{*}{x}$. Выше указано, что такие точки x находятся, если они существуют.

Если уравнения (7) и (8) определяют только комплексные значения $\overset{*}{x}$, то вещественная функция $y = y(x)$, определяемая равенством (1), определена и непрерывна при всех x, пока $y(x)$ остаётся в области D. Беря в этом случае $y = y_0$ на границе области D, мы получим x_0 из уравнения $\Phi(x_0, y_0) = 0$, до которого вещественная функция $y(x)$ непрерывно продолжима (хотя, может быть, и не представима рядом Тейлора).

Такие же рассуждения можно провести для систем уравнений, т. е. можно и для систем уравнений установить область сходимости рядов, представляющих неявные функции и область их непрерывного продолжения.

Можно рассуждения об определении области непрерывности неявной функции распространить и на те случаи, когда неявные функции задаются не при помощи голоморфных функций, а лишь при помощи непрерывных функций, имеющих необходимое число частных производных.

2. Ю. Г. Решетняк «Новые способы исследования линейных неравенств».

Заседание 9 ноября 1954 г.

1. О. А. Ладыженская «Применение функционального анализа для доказательства существования решений краевых задач для уравнений с частными производными трёх основных типов».

Доклад посвящён вопросу о разрешимости некоторых типов нестационарных операторных уравнений при определённых начальных условиях. Краевые задачи и задача Коши для уравнений и систем параболического и гиперболического типов, для уравнения Шредингера, а также для систем уравнений Максвелла, Дирака и ряда других уравнений могут быть рассмотрены как частные случаи изученных нами операторных уравнений. Основная идея доказательства разрешимости этих операторных уравнений опубликована в [1], где она приведена на примере двух их типичных представителей: краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. Укажем здесь изученные нами операторные уравнения.

Пусть H есть полное сепарабельное гильбертово пространство. Обозначаем через H_1 линейное множество всех измеримых на отрезке $[0, l]$ функций $u(t)$ со значениями из H, для которых $\int\limits_0^l \|u(t)\|^2 dt < \infty$, где $\|u(t)\|$ есть норма $u(t)$ в H. Множество H_1 будет полным гильбертовым пространством, если скалярное произведение для его элементов u и v определено равенством $(u, v)_{H_1} = \int\limits_0^l (u(t), v(t))\, dt$, где $(u(t), v(t))$ есть скалярное произведение в H.

Доказывается разрешимость следующих задач:

I. Найти функцию $u(t)$ из H_1, удовлетворяющую уравнению

$$Su \equiv u_t + S_1(t)\,u + B(t)\,S_1(t)\,u + S_2(t)\,u = f$$

и условию $u(0) = \varphi_0$. Здесь $S_k(t)$ — заданные линейные операторы в H, зависящие от параметра $t \in [0, l]$, так что $v_k(t) = S_k(t)\,x$ $(k = 1, 2)$ принадлежат H_1, если $x \in D(S_1)$; f и φ_0 — заданные элементы H_1 и H соответственно. Оператор $S_1(t)$ является самосопряжённым и положительно определённым, причём область определения его $D(S_1)$ плотна в H и не зависит от t. Оператор $S_2(t)$ в определённом смысле подчинён $S_1(t)$, а $B(t)$ является ограниченным и кососимметрическим.

II. Найти функцию $u(t) \in H_1$, удовлетворяющую уравнению

$$Su \equiv u_{tt} + S_1(t)\,u + B(t)\,S_1(t)\,u + S_2(t)\,u = f$$

и условиям

$$u(0) = \varphi_0 \quad \text{и} \quad u_t(0) = \varphi_1.$$

Здесь заданные операторы и функции подчинены примерно тем же ограничениям, что и в n° I.

III. Найти функцию $u(t) \in H_1$, удовлетворяющую уравнению Шредингера

$$Su \equiv u_t - iS_1(t)\,u = f$$

и условию

$$u(0) = \varphi_0.$$

Относительно $S_1(t)$ предполагаем то же, что и в n° I.

Мы сформулировали в резюме доклада лишь основные ограничения на входящие в уравнения операторы, не указывая точно, как влияют дифференцируемость операторов $S_k(t)$ и элементов f и φ_0 по t и принадлежность f и φ_0 к тому или иному линейному множеству в H_1 и H на свойства решений, а следовательно, и на то, в каком смысле решение удовлетворяет всем требованиям задачи.

Далее было показано, как краевые задачи и задача Коши для уравнений и систем гиперболического и параболического типов могут быть рассмотрены как частные случаи изученных в n° I—III задач.

Наконец, был сформулирован метод приближённого вычисления решения этих задач, сходимость которого следует из указанных выше теорем существования.

2. Д. М. Эйдус «О собственных функциях уравнения Гельмгольца».

1. Пусть Ω — конечная односвязная область в m-мерном пространстве, ограниченная поверхностью S, удовлетворяющей условиям Ляпунова. Рассмотрим интегральный оператор A_λ в пространстве $L_2(S)$, определяемый равенством

$$A_\lambda f = \int\limits_S \frac{J_k(\lambda r_{xy})}{r_{xy}^k}\, f(y)\, dS_y,$$

где $\lambda > 0$, $k = \frac{m-2}{2}$, r_{xy} — расстояние между точками x и y, лежащими на S.

Теорема. *Пусть при некотором $\lambda > 0$ уравнение $A_\lambda f = 0$ имеет нетривиальное решение f. Тогда число λ^2 является собственным значением для уравнения*

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

в Ω при краевом условии

$$u|_S = 0, \tag{2}$$

причём существует такая собственная функция и соответствующая собственному значению λ^2, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f.$$

2. Пусть теперь число $\lambda^2 > 0$ не является собственным значением уравнения (1) при краевом условии (2). Рассмотрим задачу о решении уравнения (1) при краевом условии

$$u|_S = \varphi,$$

где φ — заданная на S непрерывная функция. Пусть μ_i — система собственных значений, а θ_i — соответствующая система собственных функций оператора A_λ. С помощью сформулированной в n⁰ 1 теоремы доказывается, что решение $u(x)$ поставленной краевой задачи имеет вид

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \theta_i)}{\mu_i} \int\limits_S \frac{J_k(\lambda r_{xy})}{r_{xy}^k} \cdot \theta_i(y)\, dS_y, \tag{3}$$

где ряд (3) сходится в $L_2(\Omega)$.

Заседание 27 ноября 1954 г.

1. Г. Ю. Джанелидзе «Общая задача о динамической устойчивости упругих систем».

1. Суть проблемы динамической устойчивости состоит в изучении движений упругих систем, вызванных действием переменных во времени внешних нагрузок, причём последние считаются приложенными так, что равноценные по направлению и месту приложения неизменные во времени нагрузки могут вызвать статическую потерю устойчивости.

2. В настоящее время уже решены многие частные задачи динамической устойчивости (см. обзор [1]), однако общие вопросы изучены сравнительно мало и лишь в работе Меттлера [2] сформулирована возможная постановка общей задачи динамической устойчивости.

3. Для пояснения предлагаемой постановки задачи рассматривается задача Н. М. Беляева о динамической устойчивости тонкого прямолинейного стержня, опёртого по концам и сжатого синусоидально изменяющимися со временем силами.

Основные уравнения теорий тонких стержней (при учёте главных нелинейных членов; см. [3]) в рассматриваемом случае приводят к следующей системе дифференциальных уравнений продольно-поперечных колебаний стержня:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - E\Omega\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial s} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(E\Omega\frac{\partial w}{\partial s}\right) - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(EI\frac{\partial^2 I}{\partial s^2}\right) = 0. \tag{2}$$

Здесь s — дуга, отсчитываемая вдоль стержня, v — прогиб стержня, w — продольное смещение, ρ — линейная плотность, $E\Omega$ — жёсткость на растяжение, EI — жёсткость на изгиб.

Граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} s=0 \\ s=l \end{array}\right\} v=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}=0, \qquad E\Omega\frac{\partial w}{\partial s}=-P\cos\omega t. \tag{3}$$

За исходное движение принимаются установившиеся продольные колебания, определяемые следующим решением системы (1)—(2) при граничных условиях (3):

$$v_0(s, t)=0, \ w_0(s, t)=\frac{P}{E\Omega k}\frac{\sin\frac{k}{2}(l-2s)}{\cos\frac{kl}{2}}\cos\omega t. \tag{4}$$

Для исследования устойчивости продольных колебаний (4) составляются уравнения в вариациях, соответствующие системе (1)—(2). Значения входящих в них производных берутся для исходного движения, что приводит к системе

$$\left.\begin{array}{r} EY\dfrac{\partial^4\delta v}{\partial s^4}+\rho\dfrac{\partial^2\delta v}{\partial t^2}+P\dfrac{\cos\frac{k}{2}(l-2s)}{\cos\frac{kl}{2}}\cos\omega t\dfrac{\partial^2\delta v}{\partial s^2}+ \\ +\dfrac{P\omega^2\rho}{E\Omega k}\dfrac{\sin\frac{k}{2}(l-2s)}{\cos\frac{kl}{2}}\cos\omega t\dfrac{\partial\delta v}{\partial s}=0, \\ E\Omega\dfrac{\partial^2\delta w}{\partial s^2}-\rho\dfrac{\partial^2\delta w}{\partial t^2}+\dfrac{PkI}{\Omega}\dfrac{\sin\frac{k}{2}(l-2s)}{\cos\frac{kl}{2}}\cos\omega t\dfrac{\partial^3\delta v}{\partial s^3}=0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Уравнение Н. М. Беляева вытекает из первого соотношения (5) при $k\to 0$ (т. е. в предположении неограниченного возрастания жёсткости на растяжение).

4. Приближённое решение уравнений (5) по методу Б. Г. Галёркина приводит к формулам, уточняющим результаты Н. М. Беляева.

5. Аналогичный ход рассуждений позволяет рассмотреть и другие задачи динамической устойчивости (устойчивость плоской формы изгиба, устойчивость плит и т. п).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Бейлин и Г. Ю. Джанелидзе, Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем, ПММ 16, вып. 5 (1952).

[2] E. Mettler, Eine Theorie der Stabilitet der elastischen Bewegung, Ingeneur—Archiv, т. XVI, вып. 2 (1947).

[3] М. М. Кобальский, Взаимосвязанные колебания тонких стержней и тонких пластинок под действием периодических сил, Автореферат кандидатской диссертации, Киев, 1951.

2. А. В. Малышев «Предельный случай теоремы Минковского о линейных формах».

Заседание 14 декабря 1954 г.

1. Б. А. Рымаренко «О некоторых экстремальных задачах теории монотонных полиномов».

В теории монотонных полиномов, наименее уклоняющихся от нуля на некотором отрезке (или имеющих наименьшую осцилляцию на этом отрезке), являющейся частью общей теории приближения функций посредством полиномов, существенную роль играет вопрос о форме экстремальных полиномов.

Ещё П. Л. Чебышев [1] показал, что производная экстремального, монотонно возрастающего на $[-1, +1]$ полинома $y_{2m+1}(x)=x^{2m+1}+\sum_{k=0}^{2m} p_k x^k$ равна точному квадрату некоторого другого полинома, все корни которого лежат в этом промежутке.

Академик С. Н. Бернштейн ([2], т. I, № 39 и т. II, № 100) продолжил исследования П. Л. Чебышева, а также ввёл в науку понятие о кратно монотонных и циклически монотонных полиномах, создав новые методы в этой теории и решив ряд основных её задач.

Следуя их идеям, можно показать справедливость двух довольно общих теорем, определяющих форму экстремальных полиномов.

Рассматриваются полиномы $y(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ с вещественными коэффициентами степени не более n, монотонно возрастающие на $[-1, +1]$ (класс таких полиномов назовём — T_n) или на всей вещественной оси (класс этих полиномов — B_n), коэффициенты которых подчинены допустимым (т. е. не противоречащим монотонности и совместным) связям:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \alpha_{k,\,i}=A_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ s\leqslant n) \tag{1}$$

($\alpha_{k,\,i}$ и A_i — данные вещественные числа, причём хотя одно $A_i\neq 0$).

Теорема 1. *Пусть полиномы $y_n(x)\in T_n$, коэффициенты которых подчинены одной связи* (1) (*причём предположим, что $y_n(-1)=0$, если $\alpha_{0,\,1}\neq 0$*). *Тогда среди полиномов, экстремальных на $[-1, +1]$, существует полином вида*

$$y_n^*(x)=\int_{-1}^{x}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}u_m^2(x)\,dx,$$

где $u_m(x)$ — некоторый полином степени $\leqslant m$ $(n-1=2m+\alpha+\beta)$, все корни которого лежат в промежутке $[-1, +1]$, а α и β — числа, равные нулю или единице.

Теорема 2. *Пусть полином $y_n(x)\in B_n$ и его коэффициенты подчинены двум связям* (1) (*причём предполагается, что $y_n(-1)=0$, если $\begin{vmatrix}\alpha_{0,\,1} & A_1\\ \alpha_{0,\,2} & A_2\end{vmatrix}=0$, а хотя одно из чисел $\alpha_{0,\,i}\neq 0$*). *Тогда среди экстремальных на $[-1, +1]$ полиномов существует полином вида*

$$y_n^*(x)=\int_{-1}^{x}u_m^2(x)\,dx,$$

где $u_m(x)$ — некоторый полином степени $\leqslant m$ $(n-1=2m)$ с вещественными коэффициентами.

В этих теоремах, аналогичных теореме С. Н. Бернштейна ([2], т. I, № 44) о неотрицательных тригонометрических многочленах, единственность экстремальных полиномов не утверждается. С их помощью оказывается возможным решить некоторые новые экстремальные задачи (две из которых приводятся ниже), а также упростить решение других задач этой теории [3] (задачи II и III), в которых использовалась ранее теорема А. А. Маркова — Люкача о неотрицательных полиномах.

Задача 1. Пусть $y_{2m+1}(x)\in T_{2m+1}$ и $\alpha y'_{2m+1}(1)+\beta y''_{2m+1}(1)=A$, где α, β и $A\neq 0$ — данные вещественные числа. Найти наименьшую на $[-1, +1]$ осцилляцию Ly^*_{2m+1} этих полиномов.

Задача 2. Пусть $y_{2m+1}(x)=x^{2m+1}+\sum_{k=0}^{2m} p_k x^k\in B_{2m+1}$ и

$$\frac{y''_{2m+1}(\eta)}{y'_{2m+1}(\eta)}=A,$$

где η — данное вещественное число. Найти, при каком вещественном A наименьшая на $[-1, +1]$ осцилляция Ly^*_{2m+1} этих полиномов достигает минимальной величины; найти также

$$\mathscr{L} = \inf_A Ly^*_{2m+1}.$$

Ответ на поставленные задачи таков:

$$\text{I. } Ly^*_{2m+1} = \frac{48A}{m(m+1)^2(m+2)\beta^2} \times$$
$$\times \left[\sqrt{\frac{\beta^2}{3} + \frac{\alpha\beta}{m(m+2)} + \frac{\alpha^2}{m^2(m+2)^2}} - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{m(m+2)} \right) \right],$$

$$\text{II. } A = \frac{\widehat{P}'_m(\eta)}{\widehat{P}_m(\eta)}, \qquad \mathscr{L} = 2^{2m+1}\frac{(m!)^4}{[(2m)!]^3},$$

если η не является корнем полинома Лежандра $\widehat{P}_m(x)$ степени m; если же $\widehat{P}_m(\eta) = 0$, то задача не имеет решения. (Аппаратом для получения указанных решений служат ортогональные полиномы Лежандра и Якоби.)

Отметим, что если для $y_n(x) \in T_n$ число связей (1) более одной, а для $y_n(x) \in B_n$ более двух, то указанные теоремы могут не иметь места (см. [4] и [3] — задача I).

Для кратно монотонных полиномов можно получить теоремы, аналогичные указанным выше, причём для решения экстремальных задач аппаратом здесь также служат полиномы Якоби.

В классе циклически монотонных порядка p полиномов $y_n(x) \in U_p$ теоремой, аналогичной указанным выше, служит лемма 2 С. Н. Бернштейна ([2], т. II, № 100), а аппаратом для решения экстремальных задач уже являются не ортогональные полиномы, а S и C — полиномы Эйлера—Бернштейна.

Так, например, применяя упомянутую лемму С. Н. Бернштейна к задаче, аналогичной известной задаче Е. И. Золотарёва [5], найти на $[0, 1]$ наименьшее уклонение от нуля полинома

$$y_n(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k x^k \in Ц_{n-1},$$

где σ — данное вещественное число (примем $\sigma \leqslant 0$ или $\sigma \geqslant n$), получим:

$$Ly^*_n = \begin{cases} |E_n + (n-\sigma)E^*_{n-1}|, & \text{если } n = 2m, \\ |E^*_n - \sigma E_{n-1}|, & \text{если } n = 2m+1, \end{cases}$$

или

$$Ly^*_n = \begin{cases} |E_n + \sigma E^*_{n-1}|, & \text{если } n = 2m, \\ |E^*_n + (\sigma - n)E_{n-1}|, & \text{если } n = 2m+1, \end{cases}$$

где E_n и E^*_n — числа, подобные числам Эйлера.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Л. Чебышев, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля, Полн. собр. соч., т. III, М.—Л., Изд. АН, 1948.

[2] С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, М., Изд. Академии наук, 1952—1954.

[3] Б. А. Рымаренко, О полиномах, монотонных на всей вещественной оси, ДАН 71, № 6 (1950).

[4] С. Н. Бернштейн, В. Ф. Бржечка и Б. А. Рымаренко, Сообщ. Харьков. матем. об-ва, серия 4, III (1929).

[5] Б. А. Рымаренко, О наименьшем уклонении от нуля циклически монотонного полинома при задании двух его старших коэффициентов, ДАН 83, № 2 (1952).

2. Г. Ш. Рубинштейн «Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и некоторые её приложения».

Пусть в вещественном n-мерном пространстве R^n заданы конечное множество точек $A=\{a_i=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})\}_{i=1,\ldots,m}$ и точки $c=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $d=(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Под задачей о крайней точке пересечения оси $B=\{b=c+\lambda d\}_{\lambda\in(-\infty,\infty)}$ с многогранником M — выпуклой оболочкой множества A понимается:

1. Установить, имеют ли B и M общие точки.

2. Если $B\cap M\neq\wedge$ ($\wedge$ — знак пустого множества), то а) определить $\lambda_0=\max_{c+\lambda d\in M}\lambda$; б) указать вершины симплекса $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\in A$, внутри которого расположена точка $b_0=c+\lambda_0 d$; в) найти гиперплоскость H_0, строго отделяющую луч $Л(b_0, b_0+d)=\{b=b_0+\lambda d\}_{\lambda>0}$ от многогранника M (M расположен по одну сторону от H_0, $Л(b_0, b_0+d)$ — по другую, причём $H_0\cap Л(b_0, b_0+d)=\wedge$).

3. Если $B\cap M=\wedge$, то найти гиперплоскость H_0, строго отделяющую ось B от многогранника M.

Для решения этой задачи используется метод *разрешающих множителей* (*индексов*), разработанный Л. В. Канторовичем [1]; однако для вычисления разрешающих множителей применён другой процесс последовательных приближений, использующий идеи метода наискорейшего спуска [2]. Использованный процесс является двойственным аналогом процесса последовательных приближений, применённого С. И. Зуховицким для решения задачи наилучшего (в смысле П. Л. Чебышева) приближения конечной системы несовместных линейных уравнений ([3], [4]).

К поставленной геометрической задаче приводится исследование различных вопросов.

I. Пусть дана система линейных неравенств

$$\alpha_{i1}\xi_1+\ldots+\alpha_{i,n-1}\xi_{n-1}\leqslant\alpha_{in}\quad(i=1,\ldots,m).\tag{1}$$

Примем $A=a_i=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})_{i=1,\ldots,m}$, $c=\theta$, $d=(0, \ldots, 0, -1)$ и рассмотрим соответствующую задачу о крайней точке пересечения оси B с многогранником M. Имеют место следующие утверждения:

1. Если $B\cap M\neq\wedge$, то

а) При некоторых правых частях система (1) разрешима, при других — несовместна; первое имеет место, если $\lambda_0\leqslant 0$, второе, — если $\lambda_0>0$; при этом $\lambda_0=\min_{x=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})}\max_i(\alpha_{i1}\xi_1+\ldots+\alpha_{i,n-1}\xi_{n-1}-\alpha_{in})$. Для совместной системы $|\lambda_0|$ характеризует *устойчивость* её *разрешимости*, для несовместной системы λ_0 — *минимальное уклонение*.

б) Если гиперплоскость H_0 имеет уравнение $\xi_1^0\alpha_1+\ldots+\xi_{n-1}^0\alpha_{n-1}-\alpha_n=\lambda_0$, то $x_0=(\xi_1^0, \ldots, \xi_{n-1}^0)$ является *наилучшим решением* системы, если $\lambda_0\leqslant 0$, и *наилучшим приближением*, если $\lambda_0>0$. Совокупность наилучших решений или приближений системы (1) является выпуклым множеством в $(n-1)$-мерном пространстве; это множество называется *многогранником наилучших решений* или *приближений*.

в) Если $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ — вершины симплекса, внутри которого расположена точка b_0, то подсистема

$$\alpha_{i1}\xi_1+\ldots+\alpha_{in-1}\xi_{n-1}\leqslant\alpha_{in}\quad(i=i_1, \ldots, i_k)\tag{2}$$

является *чебышевской* (системы (1) и (2) либо обе разрешимы, либо обе несовместны; в первом случае они имеют одинаковую устойчивость разрешимости, во втором — равные минимальные уклонения; многогранник наилучших решений или приближений системы (1) содержится в соответствующем многограннике (2); никакая собственная подсистема системы (2) не обладает перечисленными свойствами). Многогранник наилучших решений или приближений системы (2) имеет размерность $n-k$, поэтому размерность соответствующего многогранника системы (1) не превосходит $n-k$.

г) Для того чтобы многогранник наилучших решений или приближений системы (1) при любых правых частях был не более чем r-мерным, необходимо и достаточно, чтобы в $(n-1)$-мерном пространстве точек $a'=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ точка θ лежала вне каждого $(k-1)$-мерного симплекса с вершинами из $A'=\{a'_i=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{i,n-1})\}_{i=1,\ldots,m}$ при всех $k<n-r$.

2. Если $B\cap M=\wedge$, то система (1) разрешима при любых правых частях. При этом, если H_0 имеет уравнение $\xi_1^0\alpha_1+\ldots+\xi_{n-1}^0\alpha_{n-1}=\beta$, то $x=z+\varepsilon x_0=(\zeta_1+\varepsilon\xi_1^0, \ldots, \zeta_{n-1}+\varepsilon\xi_{n-1}^0)$ является решением системы (1) при любых z и ε, удовлетворяющих условиям

$$\varepsilon\beta\leqslant 0, \quad -\varepsilon\beta\geqslant \max_i(\zeta_1\alpha_{i1}+\ldots+\zeta_{n-1}\alpha_{i,n-1}-\alpha_{in}).$$

II. В случае системы линейных уравнений

$$\alpha_{i1}\xi_1+\ldots+\alpha_{i,\,n-1}\xi_{n-1}=\alpha_{in} \quad (i=1, \ldots, m) \tag{3}$$

имеет место следующее: для того чтобы многогранник наилучших решений или приближений системы (3) при любых правых частях был не более чем r-мерным, необходимо и достаточно, чтобы каждые $k-1$ точек из множества $A'=\{a'_i=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in-1})\}_{i=1,\ldots,m}$ при $k<n-r$ были линейно независимыми.

Последнее утверждение (как, впрочем, и пункт г) из I) остаётся справедливым и в случае бесконечной системы, если соответствующее множество A' ограничено и замкнуто. Это даёт возможность, учитывая замеченную М. Г. Крейном связь последнего вопроса с проблемой А. Хаара [5], дать обобщение классического результата А. Хаара.

Пусть C — пространство непрерывных функций, определённых на компакте Q, $L\subset C$ — n-мерное пространство. *Для того чтобы для каждой функции $f\in C$ многогранник наилучших приближений $P\subset L$ был не более чем r-мерным, необходимо и достаточно, чтобы каждые $r+1$ линейно независимых функций из L имели в Q не более $n-r-1$ общих корней.*

III. В задаче рационального раскроя [1] (а также при решении конечной игры двух игроков с нулевой суммой в нормальной форме [6]) требуется по данной матрице $\|\alpha_{ij}\|_{i=1,\ldots,m,\,j=1,\ldots,n}$ определить $\max_{x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)}\min_j\sum\alpha_{ij}\xi_i$ при условии $\xi_i\geqslant 0$, $\sum\xi_i=1$, а также найти вектор x, на котором этот максимум реализуется. Вопрос сводится к задаче о пересечении некоторого многогранника M, лежащего в первом гипероктанте R^n, с осью, определяемой точками $c=0$ и $d=(1, \ldots, 1)$.

IV. Задача о $\max_{x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)}\sum\alpha_{nj}\xi_j$ при $\sum\alpha_{ij}\xi_j=\gamma_i$ $(i=1, \ldots, n-1)$, $\xi_j\geqslant 0$, $\sum\xi_j=1$ также сводится к задаче о пересечении некоторого многогранника $M\subset R^n$ с осью, определяемой точками $c=(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, 0)$ и $d=(0, \ldots, 0, 1)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Математические методы в организации и планировании производства, изд. Ленинградского университета, 1939.

[2] Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, УМН III, вып. 6 (28) (1948).

[3] С. И. Зуховицкий, Матем. сб. 33 (75), № 2 (1953).

[4] С. И. Зуховицкий, Алгорифм для решения чебышевской задачи приближения в случае конечной системы несовместных линейных уравнений, ДАН 79, № 4 (1951).

[5] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

[6] J. Neumann, O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1947.

Заседание 28 декабря 1954 г.

1. Г. С. Цейтин «О теореме Коши в конструктивном анализе».

В докладе рассматривается вопрос об истинности конструктивных аналогов следующих утверждений, верных в классическом анализе:

1) всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых промежутков имеет общую точку;

2) первая теорема Коши (об обращении в нуль внутри промежутка непрерывной функции, принимающей на его концах значения разных знаков);

3) вторая теорема Коши (о том, что функция, непрерывная в замкнутом промежутке, принимает там все значения, промежуточные между её значениями на концах);

4) теорема Ролля;

5) теорема Лагранжа (формула конечных приращений).

Для построения конструктивных аналогов этих утверждений нужно заменить встречающиеся здесь понятия классического анализа соответствующими понятиями конструктивного анализа и к полученным утверждениям применить конструктивное истолкование суждений, разработанное А. Н. Колмогоровым [1] в уточнении С. К. Клина [2]. Вместо рекурсивных функций мы будем часто говорить о нормальных алгорифмах [3].

Понятие вещественного числа мы заменим понятием конструктивного вещественного числа, которое совпадает с понятием вычислимого (berechenbar) числа в работе [4] Э. Шпекера. Мы будем пользоваться понятием конструктивной функции, введённым А. А. Марковым [5]. Конструктивной функцией, определённой в данном промежутке, называем алгорифм, перерабатывающий всякую запись (или гёделевский номер) вещественного числа из этого промежутка в запись некоторого вещественного числа, причём записи равных вещественных чисел перерабатываются снова в записи равных вещественных чисел. Понятия равномерно непрерывной конструктивной функции и производной от конструктивной функции определяются очевидным образом. Мы будем в формулировках теорем классического анализа понятие функции, непрерывной в данном промежутке, заменять понятием равномерно непрерывной в данном промежутке конструктивной функции. Наконец, понятие последовательности вложенных замкнутых промежутков будем заменять понятием конструктивной последовательности вложенных промежутков, под которой будем понимать алгорифм, дающий по каждому натуральному числу запись промежутка, причём выполнены условия вложенности промежутков.

Подвергая теперь полученные суждения конструктивному истолкованию, заметим, что они все имеют вид: для всякого X существует Y, находящийся к этому X в отношении A ($\forall X \exists Y A$). В конструктивном истолковании это будет означать, что существует алгорифм, применимый ко всякому X и перерабатывающий его в соответствующий Y. Поэтому, для того чтобы опровергнуть такое утверждение, достаточно доказать невозможность требуемого алгорифма, в то время как опровергающего примера—значения X, для которого соответствующего Y не существует, может не быть вовсе ($\neg \forall X \exists Y A$, но $\neg \exists X \neg \exists Y A$). Как раз такое положение и имеет место для всех наших суждений. *Аналоги указанных теорем классического анализа оказываются ложными, но верны их «двойные отрицания».*

В частности, по поводу 1) теоремы Коши могут быть сформулированы следующие утверждения (промежуток можно считать фиксированным):

а) Не существует алгорифма, перерабатывающего всякую запись равномерно непрерывной в данном промежутке конструктивной функции, принимающей на его концах значения разных знаков, в запись вещественного числа из этого промежутка, при котором эта функция обращается в нуль.

б) Не существует функции, равномерно непрерывной в данном промежутке и принимающей на его концах значения разных знаков, которая нигде в промежутке не обращалась бы в нуль. (Как мне было сообщено А. А. Марковым, ещё раньше было доказано утверждение, более сильное, чем утверждение б).)

Утверждение о неверности конструктивного аналога 2) теоремы Коши может быть усилено следующим образом: существует такая равномерно непрерывная в промежутке конструктивная функция $f(x)$, что невозможен алгорифм, перерабатывающий всякую запись вещественного числа y, промежуточного между значениями $f(x)$ на концах промежутка, в запись числа x из этого промежутка такого, что $f(x)=y$. Именно достаточно рассмотреть функцию $f(x)=|x-1|-|x|+2x-1$ в промежутке $[-1, 2]$. Такое же усиление возможно и для утверждения о неверности конструктивного аналога теоремы Лагранжа. Там нужно брать функцию $F(x)=(|x-1|+|x|-1)^2$. Может быть также усилено утверждение о неверности конструктивного аналога теоремы о вложенных промежутках: достаточно ограничиться последовательностями промежутков с рациональными концами и с длинами, не меньшими фиксированного числа.

Доказательства этих теорем основаны на существовании такой частично-рекурсивной функции, принимающей значения не больше единицы, которую невозможно продолжить до общей рекурсивной функции (такой функцией будет, например, $\alpha(x)=\min(1, \varphi(x, x))$, где $\varphi(m, n)$ есть универсальная частично-рекурсивная функция (см. [6], стр. 196); этой функции $\alpha(x)$ будет эквивалентен некоторый нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$). Используется следующая лемма, вытекающая из этого утверждения: невозможен алгорифм, применимый ко всякой записи вещественного числа x при $|x| \geqq 1$, дающий в результате нуль, если $x>0$, и единицу, если $x<0$. (Эта лемма получается, если каждому натуральному числу l сопоставить вещественное число так, что его n-е рациональное приближение определяется работой алгорифма $\mathfrak{A}$ над l в течение не более чем n первых шагов.)

Утверждения о невозможности опровержения на примере конструктивных аналогов указанных теорем доказываются с применением принципа 7.2 работы [5] («ленинградский принцип», как его называют). Идея этих доказательств состоит в следующем. Пусть требуемой точки не существует. Затем делят отрезок пополам и, используя то, что его середина не является такой точкой, выбирают определённым образом одну из половин, затем эту половину снова делят пополам и т. д. Полученная последовательность стягивающихся вложенных промежутков определяет некоторую точку, которая, как оказывается, уже не может не удовлетворять требуемым условиям, что приводит к противоречию.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. N. Kolmogoroff, Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Math. Zeitschr. 35 (1932), 58—65.

[2] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, The Journ. of Symb. Log. 10 (1945), 109—123.

[3] В. К. Детловс, Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, ДАН 90 (1953), 723—725.

[4] E. Specker, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, The Journ. of Symb. Log. 14 (1949), 145—158.

[5] А. А. Марков, О непрерывности конструктивных функций, УМН IX, вып. 3 (1954), 226—230.

[6] Р. Петер (Rózsa Péter), Рекурсивные функции, М., ИЛ, 1954.

2. И. Д. Заславский «Опровержение некоторых теорем классического анализа в конструктивном анализе».

1. Перечислим основные понятия конструктивного анализа, употребляемые в настоящем резюме. Под *конструктивным вещественным числом* мы будем понимать вычислимое (berechenbar) число по Шпекеру [1], заменяя в определении такого числа слова «общерекурсивная функция» на «нормальный алгорифм [2], применимый ко всем натуральным числам». (Равносильность этих понятий доказана в [3].) *Конструктивную функцию* (вещественного переменного) мы будем понимать в смысле определения, данного А. А. Марковым [4]. Другие понятия, которые мы будем употреблять, представляют собой перевод обычных понятий классического анализа на «конструктивный язык» при помощи правил конструктивного истолкования суждений, установленных А. Н. Колмогоровым [5] и С. Клином [6]. Например, понятие непрерывной функции в переводе на «конструктивный язык» звучит так: конструктивная функция $f(x)$ называется непрерывной в некотором промежутке, если существует нормальный алгорифм (или частично-рекурсивная функция) $\delta(x_0, \varepsilon)$, перерабатывающий запись конструктивного вещественного числа x_0 (или соответственно гёделевский номер общерекурсивной функции, задающей x_0) из данного промежутка и любое рациональное число $\varepsilon>0$ (соответственно его номер при нумерации всех рациональных чисел) в рациональное число $\delta>0$ (соответственно его номер) такое, что как только $|x-x_0|<\delta(x_0, \varepsilon)$ и x принадлежит данному промежутку, так сейчас же

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Аналогичным образом вводятся конструктивные понятия: равномерно непрерывной функции, дифференцируемой функции, также понятие конструктивной последовательности каких-либо объектов и понятие предела последовательности конструктивных вещественных чисел.

Как показывается в нижеследующих теоремах, свойства этих понятий конструктивного анализа во многом отличны от свойств соответствующих им понятий классического анализа.

Теорема 1. *Существует последовательность Φ_m непустых конечных наборов попарно не пересекающихся сегментов с рациональными концами*

$$[a_1^{(m)}, b_1^{(m)}],\quad [a_2^{(m)}, b_2^{(m)}],\ \ldots,\ [a_{k_m}^{(m)}, b_{k_m}^{(m)}]$$

такая, что 1) $\Phi_m \subset [0, 1]$ при всех m, 2) $\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots \supset \Phi_m \supset \ldots$, 3) *не существует конструктивного вещественного числа, входящего во все* Φ_m.

Если мы рассмотрим, кроме Φ_m, также и наборы интервалов $G_m = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - \Phi_m$, то последовательность G_m, очевидно, будет обладать следующим свойством: вся последовательность G_m покрывает $[0, 1]$, но никакая конечная совокупность G_m не покрывает $[0, 1]$. При этом можно построить Φ_m и G_m так, что покрытие $[0, 1]$ будет конструктивным, т. е. будет существовать алгорифм $m(x)$, выдающий по записи любого вещественного числа $x \in [0, 1]$ такое натуральное число m, что x входит в G_m.

Исходя из теоремы 1, доказываются следующие утверждения:

Теорема 2. *Существует конструктивная функция $f(x)$, непрерывная на $[0, 1]$, и не ограниченная на нём.*

Теорема 3. *Существует конструктивная функция $f(x)$, равномерно непрерывная на $[0, 1]$, принимающая все значения $0 \leqslant f(x) < 1$ и не принимающая значения $f(x)=1$.*

Теорема 4. *Существует конструктивная функция $f(x)$, непрерывная на $[0, 1]$ и не имеющая на нём точной верхней границы* [1]).

Теорема 5. *Существует конструктивная функция $f(x)$, непрерывная и ограниченная на $[0, 1]$, но не равномерно непрерывная на нём.*

Таким образом, в конструктивном анализе оказываются неверными: теорема об убывающей последовательности замкнутых множеств, теорема Гейне-Бореля, обе теоремы Вейерштрасса, теорема Кантора.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Specker, Nicht konstruktiv beweislare Sätze der Analysis, The Journ. of Symb. Log. 14 (1949), 145—158.

[2] А. А. Марков, Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та им. Стеклова 38 (1951), 176—189.

[3] В. К. Детловс, Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, ДАН 90 (1953), 723—725.

[4] А. А. Марков, О непрерывности конструктивных функций, УМН IX, вып. 3 (1954), 226—230.

[5] А. Н. Колмогоров, Zur Deutung der intuizionistischen Logik, Math. Zeitschr. 35 (1932), 58—65.

[6] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, The Journ. of Symb. Log. 10 (1945), 109—123.

[7] Р. Петер, Рекурсивные функции, М., ИЛ, 1954.

[8] S. C. Kleene, Recursive predicates and quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943), 41—73.

---

[1]) То-есть не существует конструктивного вещественного числа y_0, являющегося верхней границей $f(x)$ (т. е. $f(x) \leqslant y_0$ при всех $x \in [0, 1]$) и такого, что никакое число $y < y_0$ не может являться верхней границей $f(x)$.