1956 г. январь—февраль *т. XI, вып. 1 (67)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Математическая секция Ленинградского дома учёных)

Заседание 8 февраля 1955 г.

1. В. И. Крылов «О сходимости интерполирования в классах дифференцируемых функций».

2. Д. С. Горшков «Неквадратичные комплексные иррациональности, которые разлагаются в непрерывные дроби с ограниченными неполными частными».

Заседание 22 февраля 1955 г.

1. С. М. Лозинский «О радиусе аналитичности решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью».

2. А. А. Киселёв «Решение краевой задачи для линеаризированных уравнений гидродинамики вязкой жидкости в трёхмерном пространстве».

3. Организационные вопросы: удовлетворена просьба Ю. В. Линника об освобождении его от обязанностей заместителя председателя семинара; заместителем председателя семинара избран С. М. Лозинский.

Заседание 8 марта 1955 г.

1. Н. А. Лебедев «К теории конформных преобразований круга на неналегающие области».

Пусть на плоскости w дана односвязная область D и в ней две точки a_1 и a_2 $(a_1 \neq a_2)$. Пусть функции $f_1(\zeta)$, $f_1(0)=a_1$ и $f_2(\zeta)$, $f_2(0)=a_2$ конформно отображают круг $|\zeta|<1$ соответственно на области $D_1 \ni a_1$ и $D_2 \ni a_2$, не имеющие друг с другом общих точек и лежащие в области D. Рассмотрим множество точек $M(|f_1'(0)|, |f_2'(0)|)$ (в декартовой системе координат) для всех возможных D_1 и D_2. Это множество назовём областью значений системы $M(|f_1'(0)|, |f_2'(0)|)$.

Представляют интерес следующие три случая:

1. Область D — вся плоскость (включая точку $w=\infty$).
2. Область D — вся плоскость, исключая точку $w=\infty$.
3. Область D — круг $|w|<R$, $R>0$.

Во всех трёх случаях в работе найдены области значений введённой выше системы. Опираясь на полученные области значений, находятся известные ранее и новые оценки для некоторых «простых» функций от $|f_1'(0)|$ и $|f_2'(0)|$. Кроме того, в работе указаны некоторые обобщения решённой задачи.

2. Г. П. Сафронова «О некоторых граничных задачах теории аналитических функций в классах Орлича».

Регулярная внутри единичного круга функция $f(z) \in H_M$, если

$$\int\limits_0^{2\pi} M[|f(re^{i\theta})|]\,d\theta \leqslant H \qquad (0 \leqslant r < 1).$$

Справедлива следующая теорема.

Пусть $M(u)$, $N(u)$ — *непрерывные выпуклые функции, определённые в промежутке* $(0, +\infty)$. *Если* $f(z) \in H_M$, *её предельные значения* $f(e^{i\theta}) \in L_N$, *то* $f(z) \in H_N$.

Условие выпуклости в общем случае отбросить нельзя.

Однако, если $M(u)$ строго возрастает, удовлетворяет неравенству

$$M(2u) \leqslant KM(u) \tag{1}$$

и существует функция $\varphi(z)$, аналитическая на всей комплексной плоскости, кроме, может быть, $z=0$, и такая, что $|\varphi(z)| = M(|z|)$, то заключение этой теоремы имеет место при выполнении одного из трёх условий:

1. $N[M^{-1}(u)]$ выпукла при $u \geqslant u_0$;
2. $\dfrac{M(u)}{u}$ возрастает, $\dfrac{N(u)}{u}$ убывает и $N(u)$ удовлетворяет неравенству (1) при $u \geqslant u_0$;
3. $N(u)$, $M^{-1}(u)$ удовлетворяют неравенству (1) при $u \geqslant u_0$ и отношение $\dfrac{M(u)}{N(u)}$ монотонно.

Из этих результатов вытекает известная теорема, принадлежащая В. И. Смирнову:

Если $f(z) \in H_\delta$, $f(e^{i\theta}) \in Lp$ $(p > \delta)$, то $f(z) \in Hp$.

Заседание 22 марта 1955 г.

Эрих Келер (Германская Демократическая Республика) «Арифметика, алгебраическая геометрия и теория функций».

Заседание 8 апреля 1955 г.

Карл Шрётер (Университет им. Гумбольта в Берлине) «О систематической трактовке математической логики и оснований математики в рамках изучения математики».

Заседание 12 апреля 1955 г.

1. Е. С. Ляпин «Потенциальная обратимость элементов в полугруппах».

Полугруппа есть множество, в котором определено ассоциативное умножение элементов. Если совокупность некоторых преобразований произвольного множества такова, что содержит вместе со всякими двумя преобразованиями и их произведение (т. е. преобразование, являющееся результатом последовательного применения этих преобразований), то она, очевидно, является полугруппой. Известно, что всякая полугруппа может быть реализована таким образом.

Элемент X полугруппы $\mathfrak{A}$ называется обратимым, если для любого $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ найдутся такие Y и Z, что $XY = A$, $ZX = A$. Элемент X называется потенциально обратимым элементом $\mathfrak{A}$, если существует такая надполугруппа $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, что X является обратимым элементом полугруппы $\mathfrak{A}'$.

Теорема. *Для того чтобы элемент X полугруппы $\mathfrak{A}$ был потенциально обратим, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $A \in \mathfrak{A}$ уравнения*

$$XS = A, \quad TX = A$$

относительно неизвестных $S \in \mathfrak{A}$ и $T \in \mathfrak{A}$ имели каждое не более одного решения.

Существуют такие бесконечные матрицы, которые, не являясь обратимыми элементами ни в какой мультипликативной матричной полугруппе, могут быть потенциально обратимыми элементами некоторых матричных полугрупп. В полугруппе бесконечных матриц, состоящей из матриц, в каждой строке и в каждом столбце которых имеется лишь конечное число непулевых элементов, потенциально обратимыми являются, например, матрицы Якоби.

2. Ю. Е. Аленицын «Об однолистных функциях в многосвязных областях».

Для функций, однолистных в конечно-связной области данной плоскости, устанавливаются теоремы, из которых одни обобщают соответствующие теоремы об однолистных функциях в единичном круге, а другие дают новые результаты и по отношению к этим последним функциям. К числу теорем первого типа относятся обобщение теоремы Кёбе об $^1/_4$, теоремы Ренгеля, решающей известную задачу Сегё, и теоремы М. А. Лаврентьева об оценке сверху функционала $|f_1'(z_1) f_2'(z_2)|$ для однолистных функций, отображающих единичный круг на взаимно не налегающие области. К числу теорем второго типа относится точная оценка сверху функционала $\prod_{\nu=1}^{2m} |f_\nu'(z_\nu)|$ при $m \geqslant 2$ в соответствующем классе функций, однолистно отображающих данную многосвязную область на взаимно не налегающие области, и усиления известных оценок сверху для $|f'(z)|$ в соответствующих классах ограниченных однолистных функций — через модуль некоторой двусвязной области, характеризующей образ, или через производную Шварца данной функции (в случае круга). Оценки выражаются через модуль производной функции, однолистно отображающей данную многосвязную область на единичный круг с концентрическими круговыми разрезами. В доказательствах используются результаты работы Нехари (Z. Nehari, Trans. Amer. Math. Soc. 75, № 2 (1953)), вытекающие из рассмотрения надлежащих интегралов Дирихле и их минимального свойства.

Заседание 26 апреля 1955 г.

1. Е. В. Вороновская «О системе дифференциальных уравнений некоторых экстремальных полиномов».

Классические задачи на отыскание полиномов, наименее отклоняющихся от нуля в данном промежутке, могут отличаться друг от друга лишь условиями, палагаемыми на коэффициенты искомого полинома $P_n(x) = \sum_0^n p_i x^i$; назовём их условиями (A), а саму задачу назовём для краткости задачей (A).

Пусть $[0, 1]$ данный промежуток, S — число всех точек отклонения полинома на нём, а сами эти точки суть $(\sigma_i)_1^S$, т. е. $\max_{[0,1]} |P_n(x)| = |P_n(\sigma_i)| = L$. Если $S > \frac{n}{2} + 1$, то справедливо следующее утверждение: всякий полином $P_n(x)$, удовлетворяющий некоторой задаче (A), удовлетворяет также задаче, в которой условия (A) заменены условиями В. Маркова, т. е. $P_n(x)$ одновременно является и полиномом, наименее отклоняющимся от нуля на $[0, 1]$ среди множества всех полиномов, коэффициенты которых удовлетворяют некоторой одной линейной неоднородной зависимости. Но задача В. Маркова с условием $\sum\limits_{0}^{n} p_i\mu_i = M\,(\neq 0)$ эквивалентна задаче (F) о нахождении полинома, на котором конечный функционал F, определённый отрезком чисел $(\mu_i)_0^n$, достигает своей нормы N (экстремальный полином); а именно, если $P_n(x)$ — полином задачи Маркова с отклонением L, то $Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{L}$ и есть экстремальный полином функционала F, т. е. $F(Q) = +N$. (Для экстремального полинома функционала всегда имеет место $\max\limits_{[0,1]} |Q_n| = 1$.) Выгода от замены задач вида (A) задачами вида (F) весьма значительна. Изучение задачи (F) естественно приводит к упорядочиванию всего множества $\{Q_n(x)\}$ экстремальных полиномов $\left(S > \frac{n}{2} + 1\right)$ с помощью их паспортизации. Множество $\{Q_n(x)\}$ разбивается при этом на семейства, зависящие: 1) от одного переменного параметра, 2) от двух и т. д.

Если положить m — число таких переменных параметров в семействе, то имеет место равенство $S + m = n + 1$.

Простейшее, однопараметровое семейство таких полиномов распадается на полиномы паспорта $[n, n, 0]$ и на полиномы паспорта $[n, n, 1\,(k)]$; последние делятся ещё на $n-1$ разрядов, так как $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Предложенный автором метод изучения экстремальных полиномов с помощью самих функционалов даёт возможность не только качественно изучить однопараметровые полиномы и заранее установить, какие именно задачи вида (A) разрешает каждый такой полином, но и найти аналитическое выражение этих полиномов с помощью системы дифференциальных уравнений.

Обозначим всё семейство однопараметровых экстремальных полиномов через $Q_n(x, \vartheta)$. За переменный параметр удобнее всего взять старший коэффициент полинома, который изменяется монотонно для каждого упомянутого паспорта и разряда. Таким образом, $Q_n(x, \vartheta) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k(\vartheta)\,x^k + \vartheta x^n$. Пусть $\{\sigma_i(\vartheta)\}_{i=1}^{n}$ суть все точки на $[0, 1]$, в которых $Q_n(\sigma_i, \vartheta) = \pm 1$; положим $R_n(x, \vartheta) = \prod\limits_{1}^{n} (x - \sigma_i)$. Тогда для всех $Q_n(x, \vartheta)$ имеет место следующая основная формула:

$$\frac{\partial Q_n(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} = R_n(x, \vartheta). \tag{1}$$

Если в число узлов $(\sigma_i)_1^n$ входит только одна из точек, 0 или 1, то полиномы Q_n всегда принадлежат паспорту $[n, n, 0]$ и являются следующими: $\pm T_n(\alpha x)$ или $\pm T_n[\alpha(1-x)]$, где $T_n(x) = \cos n \arccos(2x - 1)$ и $\cos^2 \frac{\pi}{2n} < \alpha < 1$.

Эти случаи, как известные, мы исключим из рассмотрения. Все остальные однопараметровые полиномы $\{Q_n(x, \vartheta)\}$ имеют в числе точек (σ_i) оба конца интервала $[0, 1]$; точки $(\sigma_i)_2^{n-1}$ суть корни $\frac{\partial Q_n}{\partial x}$; обозначим через $\lambda = \lambda(\vartheta)$ корень этой производной, не вошедший в число (σ_i). Тогда имеется ещё (очевидная) зависимость

$$x(x-1)\frac{\partial Q_n(x, \vartheta)}{\partial x} = n\vartheta\,(x - \lambda)\,R_n(x, \vartheta). \tag{2}$$

(Заметим, что равенством (2) пользовался Е. И. Золотарёв; равенство (1) получено впервые в 1954 г. автором этой заметки.) Теперь имеем из (1) и (2) уравнение

$$n\vartheta\,(x-\lambda)\frac{\partial Q_n(x,\ \vartheta)}{\partial\vartheta}=x\,(x-1)\frac{\partial Q_n(x,\ \vartheta)}{\partial x}, \tag{3}$$

которое распадается, образуя систему $n-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $n-1$ коэффициентов $y_i(\vartheta)$ полинома $Q_n(x, \vartheta)$ ($i=1, 2, \ldots, n-1$; $y_0=(-1)^n$; $y_n=\vartheta$).

$$\left.\begin{aligned}
y'_{n-1}&=\frac{n-1}{n\vartheta}\,y_{n-1}+\lambda-1,\\
y'_{n-2}&=\frac{n-2}{n\vartheta}\,y_{n-2}+\lambda y'_{n-1}-\frac{n-1}{n\vartheta}\,y_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y'_2&=\frac{2}{n\vartheta}\,y_2+\lambda y'_3-\frac{3}{n\vartheta}\,y_3,\\
y'_1&=\frac{1}{n\vartheta}\,y_1+\lambda y'_2-\frac{2}{n\vartheta}\,y_2.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь $\lambda=\dfrac{y_1}{n\vartheta y'_1}$ — начальные условия для полиномов $[n, n, 0]$: при $\vartheta=2^{2n-1}\cos^{2n}\dfrac{\pi}{2n}$ имеет место $y_i=t_i\cos^{2i}\dfrac{\pi}{2n}$, где $\sum\limits_{i=0}^{n}t_i\,x^i=T_n(x)$; $T'_n(x)=2^{2n-1}\,n\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x-\tau_i)$, $1<\lambda(\vartheta)<+\infty$. Для полиномов $[n, n, 1\,(k)]$ при $\vartheta=2^{2n-1}$, $Q_n(x)=T_n(x)$, $\tau_{k-1}<\lambda<\tau_{k+1}$; $[T_n(\tau_i)=\pm 1]$.

Полиномы $Q_n(x, \vartheta)$, паспорта $[n, n, 0]$, тождественны полиномам Е. И. Золотарёва; если обозначим последние через $Y_n(x, \sigma)$, а их отклонение на $[-1, +1]$ через L (σ — коэффициент при x^{n-1}), то $Q_n(x, \vartheta)=\dfrac{Y_n(2x-1)}{L}$, $\vartheta=\dfrac{2^n}{L}$.

Вопрос о приближённом интегрировании системы (4) может быть решён следующим образом. Задаваясь некоторым исходным значением $\lambda=\lambda_0(\vartheta)\neq 1$ (см. ниже), удовлетворяющим начальным условиям, подставим λ_0 в систему (4) и проинтегрируем получившиеся линейные уравнения (сверху вниз); пусть $y_i=y_{i_1}$; за следующее приближение для λ возьмём $\lambda_1=\dfrac{y_{1_1}}{n\vartheta y'_{1_1}}$ и т. д. Процесс является сходящимся и даёт в пределе искомые функции $y_i(\vartheta)$.

Отметим некоторые частные случаи, когда система (4) интегрируется в конечном виде.

Как легко убедиться, при $\lambda=1$ система имеет решения $y_k=t_k\left(\dfrac{\vartheta}{2^{n-1}}\right)^{\frac{k}{n}}$; тогда $Q_n(x, \vartheta)=T_n(\alpha x)$, где $\vartheta=\alpha^n\cdot 2^{2n-1}$, т. е. получается уже упомянутый отброшенный случай.

Если $n=3$, система приводится к одному уравнению второго порядка в точных производных, что даёт $y_1=\vartheta y_1'^2+\dfrac{C_1}{y'}$, и получаем:

$$y_1=p^2\vartheta+\frac{C_1}{p},$$

$$\vartheta=\frac{C_2}{(p-1)^2}+\frac{C_1}{2p^2\,(p-1)^2}-\frac{C_1}{p\,(p-1)^2}\qquad (p=y'_1);$$

Для паспорта $[3, 3, 0]$ имеем из начальных условий $C_1=4$; $C_2=0$, откуда для $Q_3(x, \vartheta)$ получим:

$$\vartheta=\frac{2\,(1-2p)}{p^2\,(1-p)^2},\qquad y_2=-2\,\frac{1-3p^2}{p^2\,(1-p)^2},\qquad y_1=2\,\frac{2-3p}{p\,(1-p)^2}.$$

Полиномы, паспорта $[3, 3, 1\,(k)]$ при $k=1, 2$, находятся аналогичным образом.

В заключение в связи с найденными полиномами остановимся на задаче В. Маркова для $n=2$ и $n=3$. При $n=2$ все экстремальные полиномы исчерпываются следующими:

$$\pm T_2(x), \quad \pm T_2(\alpha x), \quad \pm T_2[\alpha(1-x)].$$

При $n=3$ обозначим полиномы, не совпадающие с чебышевскими трансформациями, для паспорта [3, 3, 0] через $Z_3(x, \vartheta)$, а для паспорта $[3, 3, 1(k)]_{k=1,2}$ через $W_{3,k}(x, \vartheta)$. Тогда все экстремальные полиномы суть:

$$\pm T_3(x), \quad \pm T_3(\alpha x), \quad \pm T_3[\alpha(1-x)],$$
$$\pm Z_3(x, \vartheta), \quad \pm Z_3(1-x, \vartheta),$$
$$\pm W_{3,1}(x, \vartheta), \quad \pm W_{3,1}(1-x, \vartheta) = \pm W_{3,2}(x, \vartheta).$$

Таким образом, аналитический вид полиномов всех (конкретных) задач В. Маркова при $n=2$ и 3 заранее известен, и соответствующая задача (F) приводится к элементарному вопросу об отыскании максимума $F(Q)$ по параметру ϑ или α.

2. О. В. Гусева «Об априорных оценках решений эллиптических уравнений и систем».

1956 г. июль—август т. XI, вып. 4(70)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Математическая секция Ленинградского дома учёных)

Заседание 24 мая 1955 г.

В. П. Басов «Исследование поведения решений систем линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки типа иррегулярной».

В начале доклада на примере работ Хорна [1, 2] и Лява [3] приводится краткая характеристика исследований в направлении построения формальных и асимптотических рядов, удовлетворяющих системам линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами. Далее даётся обзор работ, выполненных главным образом на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений Ленинградского государственного университета имени А. А. Жданова и посвящённых представлению решений систем линейных дифференциальных уравнений в виде рядов, равномерно сходящихся на полубесконечном промежутке.

Обзор начинается с примера исследования уравнения 2-го порядка, приведённого в книге Пикара [4], затем излагается идея метода Н. П. Еругина, высказанного в работе [5], и, наконец, приводятся основные результаты работ, основанных на методе Н. П. Еругина. Рассмотрены работы В. В. Хорошилова [6, 7], Л. И. Донской [8], А. К. Гаханова [9] и автора [10—12]. После этого указаны основные результаты ещё не опубликованной работы автора.

В этой работе рассматривается система n линейных дифференциальных уравнений, записанная в матричной форме:

$$\frac{dX}{dt} = (P^0 + P)\,X. \tag{1}$$

Предполагается, что P^0 — постоянная матрица, P — матрица, представимая равномерно сходящимся при $t \geqslant t^*$ или асимптотическим рядом вида

$$P = \sum_{l_1+\ldots+l_k>0} t^{-(l_1\gamma_1+\ldots+l_k\gamma_k)}\, U^{(l_1,\ldots,l_k)},$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — любые несоизмеримые между собой вещественные числа; $U^{(l_1,\ldots,l_k)}$ — матрицы, постоянные или периодические относительно t с одним и тем же периодом ω; k — целое число, не меньшее единицы.

При любой канонической структуре матрицы P^0 даётся способ построения фундаментальной системы решений уравнения (1) как в виде рядов, равномерно сходящихся на промежутке $(t_0,\infty)(t_0>0)$, так и в виде асимптотических рядов. При этом устанавливается связь между равномерно сходящимися и асимптотическими рядами.

В конце доклада изложены основные теоремы об асимптотическом представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений, приведённые в книге И. М. Рапопорта [13] и в работе [14]. При этом обращено внимание на одно странное обстоятельство. Именно, в докладе показано, что метод, применённый И. М. Рапопортом, по существу является простым обобщением метода Н. П. Еругина, однако как в книге [13], так и в работе [14] И. М. Рапопорт никаких ссылок на работу Н. П. Еругина и на связанные с ней работы не делает и не проводит сравнения полученных результатов, хотя работы [5, 7, 8, 11] ему были известны. Во всяком случае они числятся в списке литературы, приведённом в конце цитированной книги. Больше того, в предисловии к книге [13] И. М. Рапопорт заявляет, что идея его метода в отдельных случаях применялась ранее О. Перроном [15] и Н. Левинсоном [16]. Из этого предисловия можно сделать вывод, что О. Перрон и Н. Левинсон предложили некий метод, И. М. Рапопорт этот метод развил, а больше никто ничего в этом направлении не делал. Дело в том, что работа О. Перрона [15] никакого отношения к вопросу о представлении решений в виде равномерно сходящихся рядов не имеет; что же касается работы Н. Левинсона [16], то он в ней получил лишь грубое асимптотическое представление решений. Если бы Н. Левинсон умел строить решения в виде равномерно сходящихся рядов, то И. М. Рапопорту ничего не осталось бы делать.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Horn, Ueber das Verhalten der Integral linearer Differenzen und Differentialgleichungen für grosse Werte der Veränderlichen, Gel. Jorn. 138, (1910).

[2] J. Horn, Unbestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungen mit mehrfachen Wurzeln der characteristischen Gleichung, Math. Zeitschr. 44, вып. 4 (1938).

[3] C. E. Love, On the asymptotic solutions of linear differential equations, Amer. Journ. Math. 36, № 2 (1914).

[4] Picard, Traité d'analyse, т. III.

[5] Н. П. Еругин, Приводимые системы, Труды Матем. ин-та им. Стеклова XIII (1946).

[6] В. В. Хорошилов, О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой, Учён. зап. ЛГУ, серия матем. наук, вып. 19 (1950).

[7] В. В. Хорошилов, О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой, ПММ 15, вып. 1 (1951).

[8] Л. И. Донская, О структуре решений системы трёх линейных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной особой точки $t=\infty$, ДАН 80, № 3 (1951).

[9] А. К. Гахапов, Исследование условий приводимости некоторых систем дифференциальных уравнений, автореферат диссертации, Лен. гос. университет имени А. А. Жданова, 1950.

[10] В. П. Басов, Исследование устойчивости движения для некоторого класса нединамических систем, автореферат диссертации, Лен. гос. университет имени А. А. Жданова, 1949.

[11] В. П. Басов, О решениях одного класса систем линейных дифференциальных уравнений, ДАН 80, № 3 (1951).

[12] В. П. Басов, Построение решений одного класса систем линейных дифференциальных уравнений, ПММ 18, вып. 3 (1954).

[13] И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Киев, Изд. АН УССР, 1954.

[14] И. М. Рапопорт, Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений, ДАН 78, № 6 (1951).

[15] O. Perron, Ueber lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reel ist, Journ. reine und angew. Math. 142, 143 (1913).

[16] N. Levinson, The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations, Duke Math. Journ. 15 (1948).

Заседание 13 сентября 1955 г.

1. Е. В. Вороновская «О полиномах Н. И. Ахиезера».

2. Г. С. Цейтин «Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности».

Заседание 27 сентября 1955 г.

А. А. Иванов «Комбинаторная топология».

Заседание 11 октября 1955 г.

1. И. П. Натансон «Добавление к теоремам Хаусдорфа о моментных последовательностях».

2. И. П. Натансон «Некоторые вопросы теории приближения функций собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля».

В докладе при помощи аналогии, устанавливаемой известными асимптотическими формулами между тригонометрическими функциями и функциями Штурма—Лиувилля, в теорию приближения функций функциями Штурма — Лиувилля переносятся:

а) Теорема Д. Джексона о скорости приближения непрерывных функций.

б) Теорема Д. Джексона о скорости приближения функций, имеющих непрерывную первую производную.

в) Теоремы С. М. Лозинского, обратные а) и б).

г) Теорема А. Зигмунда о скорости приближения гладких функций.

Заседание 25 октября 1955 г.

Р. В. Петропавловская «О колебательности решений дифференциального уравнения».

1. Имеется много различных критериев, гарантирующих колебательность или неколебательность решений линейного дифференциального уравнения

$$u'' + up(t) = 0 \qquad (a \leqslant t < \infty). \tag{1}$$

Большинство из этих критериев не пригодно в случае знакопеременной функции $p(t)$.

2. Автором получены [1] критерии колебательности и неколебательности решений уравнения (1) для знакопеременной функции $p(t)$.

3. Вопрос о колебательности решений нелинейного дифференциального уравнения

$$u'' = f(u, u', t) \tag{2}$$

мало изучен.

4. Получена теорема, которая при некоторых ограничениях, наложенных на функции f и g, позволяет сравнивать абсолютные величины решений уравнений (2) и (3):

$$v'' = g(v, v', t). \tag{3}$$

5. Полученная теорема сравнения позволяет в некоторых случаях делать заключения об интервале существования и нулях решений уравнения (2), а также устанавливать наличие неограниченных решений уравнения (2).

6. В частности, пользуясь теоремой сравнения, можно с помощью любого критерия колебательности линейного дифференциального уравнения (1) получить некоторый критерий колебательности решений нелинейного дифференциального уравнения (2).

7. Однако не всякое нелинейное дифференциальное уравнение вида (2) поддаётся сравнению, основанному на применении теоремы сравнения, с линейным дифференциальным уравнением (1). Например, такому сравнению не поддаётся дифференциальное уравнение типа Эмдена — Фаулера:

$$u'' + u^n t^\alpha = 0, \tag{4}$$

где $n > 1$, $n = \frac{p}{q}$, p, q — нечётные числа и $\alpha \geqslant -2$.

8. Получен критерий, гарантирующий наличие бесконечного числа нулей у каждого решения дифференциального уравнения более общего вида, чем уравнение (4).

9. Область применимости этого критерия может быть расширена с помощью теоремы сравнения.

Заседание 22 ноября 1955 г.

1. Л. Н. Слободецкий «К теории многомерных марковских процессов».

2. А. П. Плехотин «К оценке погрешности приближённого решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 13 декабря 1955 г.

1. В. А. Статулявичус «Предельные теоремы теории цепей Маркова».

2. А. С. Соколин «О некоторых классах методов суммирования расходящихся рядов».

Заседание 27 декабря 1955 г.

1. А. И. Виноградов «Новые результаты по „решету" Эратосфена».

В переписке Эйлера с Гольдбахом возникли две задачи: тернарная, которая была решена академиком И. М. Виноградовым в 1937 г., и бинарная, которая до сих пор не решена даже условно.

В. Брун в 1920 г. предложил метод «решета» для решения «почти» бинарных задач такого типа: уравнение $2N_1 = Q_1 + Q_2$ разрешимо, если Q_1 и Q_2 имеют не более девяти простых делителей каждый, считая и кратность. Многие математики в последующие годы занимались улучшением этого результата, снижая число простых множителей в Q_1 и Q_2. А. А. Бухштабом к последнему времени это число было сведено к 4.

Мне удалось недавно, соединив некоторые новые идеи А. Сельберга с теорией $\zeta(s)$ Римана, довести число простых множителей до 3.

Первая основная идея работы принадлежит А. Сельбергу и заключается в следующем.

Пусть нам дана некоторая возрастающая последовательность целых чисел:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_N \tag{1}$$

и даны все простые $\leqslant z$. Требуется оценить снизу количество чисел в (1), которые состоят только из простых $> z$. Обозначим эту функцию через $N(z)$.

В таком случае

$$N(z) = \sum_{d} \sum_{d/a_n} \mu(d), \tag{2}$$

где d пробегает делители произведения $2\cdot3\cdot5\ldots p_n$, $p_n \leqslant z$. Заменим в (2) сумму $\sum\limits_{d/a_n} \mu(d)$ некоторой другой суммой $\sum\limits_{d/a_n} \rho_d$ с условием, что всегда выполняется неравенство

$$\sum_{d/a_n} \mu(d) \geqslant \sum_{d/a_n} \rho_d. \tag{3}$$

Если мы положим

$$\rho_1 = 1,$$

$$\rho_d = -\sum_{d=\frac{d_1 d_2}{h} p/h} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \quad (d > 1),$$

где $k=(d_1, d_2)$, p — максимально простой делитель d, то получим:

$$\sum_{d/a_n} \rho_d = 1 - \{\lambda_{p_1}\}^2 - \{\lambda_{p_2} + \lambda_{p_1p_2}\}^2 - \ldots - \{\lambda_{p_k} + \ldots + \lambda_{p_1p_2\ldots p_k}\}^2,$$

где $d_n = p_1p_2 \ldots p_k a'_n$. Положив для всех $p \leqslant z$,

$$\lambda_p = 1,$$

получаем [выполнение условия (3), причём λ_d, если $d \neq p$, остаются произвольными вещественными числами; таким образом,

$$N(z) \geqslant \sum_d \sum_{d/a_n} \rho_d. \tag{4}$$

Решая задачу на максимум правой части (4), получим:

$$N(z) \geqslant N\left(1 - \sum_{p \leqslant z} \frac{1}{f(p)} \frac{1}{\sum\limits_{\nu_p \leqslant z^\theta} \frac{\mu^2(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}}\right) + o(z^{2\theta+1}), \tag{5}$$

где $f(n)$ — функция плотности последовательности (1), и, полагая $a_n = n(N-n)$, получаем:

$$f(p) = \begin{cases} \frac{p}{2}, & \text{если } p \nmid N, \\ p, & \text{если } p/N; \end{cases}$$

$$f_1(n) = f(n) \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{f(p)}\right).$$

Вторая основная идея состоит в вычислении правой части (5) с помощью $\zeta(s)$ Римана.

С помощью интеграла $\int\limits_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s} ds$ сумму $\sum \nu_p \leqslant z \frac{\mu^2(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}$ можно выразить через произведение $\prod \left(1 + \frac{1}{f_1(p)}\right)$ с некоторым остатком. Этот остаток оценивается с помощью равенства

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = e^{\gamma(s, x)} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} (1 + o(e^{-\sqrt[4]{\ln x}}))$$

при некоторых ограничениях на область изменения s. После вычислений находим, что $N(z) > c_0 \frac{N}{\ln^2 N}$, если $\theta = 1,1$, $z = N^{\frac{1}{3,2} - \varepsilon}$. Отсюда улучшение результата А. А. Бухштаба.

2. А. И. Китов (Москва) «Кибернетика».

1956 г. ноябрь—декабрь т. XI, вып. 6 (72)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Математическая секция Ленинградского дома учёных)

Заседание 14 февраля 1956 г.

1. С. М. Лозинский «О сильной сходимости рядов Фурье в пространствах Орлича».

2. В. Н. Судаков «О компактности в L^p».

В докладе рассматривается вопрос о независимости условий некоторых критериев компактности в пространствах L^p и Орлича.

Относящиеся сюда теоремы (А. Н. Колмогоров [1], J. D. Tamarkin [2], А. Н. Тулайков [3], T. Takahashi [4], И. П. Натансон [5], М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий [6]) формулируются обычно в виде совокупности условий, одним из которых является требование ограниченности рассматриваемого подмножества. Независимость этого условия от остальных ошибочно, как это заметил И. П. Натансон, доказывалась в работе [2]. В действительности же в ряде случаев условие ограниченности является следствием других и может быть опущено.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. H. Kolmogorov, Ueber Kompaktheit der Funktionmengen bei der Konwergenz im Mittel, Göttinger Nachrichten (1931), 60—63.

[2] J. D. Tamarkin, On the compactness of the cpace L^p, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 79—84.

[3] A. Tulaikov, Zur Kompaktheit im Raum L^p für $p=1$, Göttinger Nachrichten (1933), 167—170.

[4] T. Takahashi, On the compactness of the function-set by the convergence in mean of general type, Studia Math. 5 (1934), 141—150.

[5] И. П. Натансон, Некоторые нелокальные теоремы о сингулярных интегралах, ДАН 19, № 5 (1938), 357—360.

[6] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича, ДАН 85, № 1 (1952), 33.

Заседание 28 февраля 1956 г.

1. О. А. Ладыженская «О принципе предельной амплитуды».

2. М. И. Клиот-Дашинский «Операторный метод решения первой краевой задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго и четвёртого порядков с постоянными коэффициентами».

Пусть

$$A_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + A_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + A_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + A_4 \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + A_5 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q(x, y) \tag{1}$$

— дифференциальное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения при граничных условиях

$$W(x, y)|_l = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial n} W(x, y)|_l = 0$$

ищется в односвязной конечной области S, ограниченной кусочно-гладким контуром l.

Пусть μ_1, μ_2, μ_1^*, μ_2^* — корни характеристического уравнения $A_1 + A_2\mu + A_3\mu^2 + A_4\mu^3 + A_5\mu^4 = 0$. Введя дифференциальные операторы

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_2^* \frac{\partial}{\partial x}\right); \quad M = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

и операторы L^*, M^*, комплексно сопряжённые с ними, можно представить дифференциальное уравнение (1) в одной из следующих форм:

$$A_5 LL^* W(x, y) = q(x, y); \quad A_5 MM^* W(x, y) = q(x, y).$$

Пусть $z_1 = x + \mu_1 y$, $z_2 = x + \mu_2 y$, а $g(x, y)$ и $h(x, y)$ — произвольные решения уравнений

$$A_5 Lg(x, y) = q(x, y); \quad A_5 Mh(x, y) = q(x, y).$$

Доказывается, что функции $L^*W(x, y)$ и $M^*W(x, y)$ могут быть найдены как пределы последовательностей $L^*W_{2n+1}(x, y)$, $M^+W_{2n+1}(x, y)$, где $L^*W_{2n+1}(x, y)$ и $M^*W_{2n+1}(x, y)$ определяются из условия минимума интегралов:

$$\iint_S |L^*W_{2n+1}(x, y)|^2 dxdy; \iint_S |M^*W_{2n+1}(x, y)|^2 dxdy,$$

если в качестве допустимых брать функции вида

$$L^*W_{2n+1}(x, y) = g(x, y) - \sum_{k=0}^{n} (a_k^{(1)} Z_1^k + a_k^{(2)} Z_2^{*k}), \tag{2}$$

$$M^*W_{2n+1}(x, y) = h(x, y) - \sum_{k=0}^{n} (b_k^{(1)} Z_1^k + b_k^{(2)} Z_2^k \tag{3}$$

Отделив в равенстве (2) вещественную часть, а в равенстве (3) — вещественную и мнимую, получим систему трёх уравнений для определения вторых производных

$$\frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial y^2}.$$

Первые производные $\frac{\partial W_{2n+1}}{\partial x}$, $\frac{\partial W_{2n+1}}{\partial y}$, а также функция W_{2n+1}, могут быть найдены с помощью криволинейных интегралов

$$\frac{\partial W_{2n+1}}{\partial x} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial x^2} \partial x + \frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial x \partial y} \partial y \text{ и т. д.}$$

Так как подинтегральные функции являются полиномами от x и y, криволинейные интегралы вычисляются элементарно.

Особенно прост операторный метод в применении к уравнениям второго порядка, в частности, для уравнения Пуассона $\Delta U(x, y) = q(x, y)$.

Рассматриваемый операторный метод непосредственно связан с методом ортогональных проекций, изложенным в статьях [1], [2], [3].

Преимущество операторного метода перед методом Ритца состоит в следующем. В операторном методе с помощью данного числа параметров аппроксимируются производные от решения, тогда как в методе Ритца—само решение. Кроме того, в отличие от метода Ритца в операторном методе используется аналитический аппарат. Всё это даёт основание считать, что сходимость операторного метода должна быть более быстрой, чем сходимость метода Ритца. Рассмотренный пример ($\Delta U(x, y) = -2U(x, y)|_l = 0$, S—квадрат со стороной, равной двум единицам) подтверждает это предположение. Погрешность первого приближения при решении задачи операторным методом оказалась в несколько раз меньше, чем погрешность во втором приближении при решении задачи методом Ритца.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Е. Рафальсон, К вопросу о решении бигармонического уравнения, ДАН 64, № 6 (1949).

[2] М. И. Клиот-Дашинский, Решение задачи о статической деформации анизотропной однородной пластины методом ортогональных проекций, Уч. зап. ЛГУ, № 146 (1952).

[3] М. И. Клиот-Дашинский, Об одном способе решения плоской задачи теории потенциала, Сб. научн. трудов Ленингр. инженерно-строительного ин-та, вып. 17 (1954).

Заседание 6 марта 1956 г.

1. В. И. Смирнов «Памяти И. А. Лаппо-Данилевского».
2. Р. Сикорский (Польша) «Определители в пространстве Банаха».

Заседание 27 марта 1956 г.

1. Ю. В. Линник «Об одной теореме из аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений».
2. В. А. Якубович «Условия устойчивости для канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами».

Заседание 10 апреля 1956 г.

Н. К. Бари (Москва) «Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряжённых функций».

Доклад был посвящён изложению совместной работы докладчика и С. Б. Стечкина. Краткое содержание доклада опубликовано в УМН XI, вып. 2 (заседание Московского математического общества 15 ноября 1955 г.). Полностью доклад опубликован в трудах Моск. матем. о-ва, 5 (1956).

Заседание 24 апреля 1956 г.

1. О. А. Ладыженская «Решение первой краевой задачи в целом для нелинейных параболических уравнений».
2. Г. Ю. Джанелидзе «Магнитная гидродинамика».

Заседание 8 мая 1956 г.

С. М. Лозинский «О численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 22 мая 1956 г.

В. И. Зубов «Некоторые задачи об устойчивости движения».

1. Для системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial x_s}\Bigl(\sum_{\sum_{i=1}^{k} m_i+\sum_{p=1}^{n} l_p}^{+\infty} p_s^{(m_1,\ldots,m_k,\,l_1,\ldots,l_n)}(t)\,z_1^{m_1}\ldots z_k^{m_k}x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}\Bigr)=$$

$$=\sum_{\sum_{i=1}^{k} m_i+\sum_{p=1}^{n} l_p=1}^{+\infty} Q_j^{(m_1,\ldots,m_k,\,l_1,\ldots,l_n)}(t)\,z_1^{m_1}\ldots z_k^{m_k}x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}\quad (j=1,\ldots,k)$$

приводятся условия существования семейства голоморфных решений, обладающих свойством

$$z_j(x_1,\ldots,x_n,t)\equiv 0\ \ (j=1,\ldots,k)\ \text{при}\ x_1=\cdots=x=0.$$

Полученные результаты применяются к системам обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$z\frac{dy_s}{dz}=\sum_{m+\sum_{i=1}^{n} m_i=1}^{+\infty} R_s^{(m,\,m_1,\ldots,m_n)}(z)\,z^m y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}\quad (s=1,\ldots,n).$$

Полученные здесь результаты являются более общими по сравнению с теми, которые принадлежат Брио и Буке, А. Пуанкаре, Пикару и Хорну.

2. Исследуется окрестность положения равновесия системы

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s(x_1,\ldots,x_n)\ \ (s=1,\ldots,n), \tag{1}$$

где $f(0,\ldots,0)=0$.

Например, получен следующий результат.

Теорема 1. *При выполнении условий существования и единственности решений для системы* (1) *в* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant h$ *для того, чтобы нулевое решение* $x_1=\ldots=x_n=0$ *было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы точка* $x_1=\ldots=x_n=0$ *не была α-предельной ни для какой траектории системы* (1), *отличной от* $x_1=\ldots=x_n=0$. *При этом для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы существовала достаточно малая окрестность точки* $x_1=\ldots=x_n=0$, *не содержащая целых траекторий системы* (1).

3. Для системы

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{m=\mu}^{+\infty}X_s^{(m)}(x_1,\ldots,x_n,t)$$

$$(s=1,\ldots,n),$$

где

$$X_s^{(m)}=\sum_{m_1+\ldots+m_n=m}A_s^{(m_1,\ldots,m_n)}(t)\,x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}\ (s=1,\ldots,n),$$

причем $A_s^{(m_1,\ldots,m_n)}$ являются постоянными при $\sum_{i=1}^{n} m_i=\mu$, выведены условия, при которых существуют семейства O-кривых, и дано аналитическое представление этих семейств.

На основе этого получен ряд критериев асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Эта система исследуется также с помощью функции Ляпунова.

Основой этого исследования является

Теорема 2. *Для того чтобы нулевое решение системы*

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (2)$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

было асимптотически устойчивым по Ляпунову и любое решение $X(t, X_0, t_0)$, где $X_0^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{02} \leqslant \delta^2$, $t_0 \geqslant T$, *удовлетворяло неравенству*

$$m_1 V_1(X_0) \varkappa(t, t_0, c, l) \leqslant V_1[X(t, X_0, t_0)] \leqslant n_1 V_1(X_0) \varkappa(t, t_0, c_2, l),$$

где $c_1 = m_2[\varphi(t_0) V_1(X_0)]^{l-1}$, $c_2 = n_2[\varphi(t_0) V_1(X_0)]^{l-1}$ $l > 1$, m_1, m_2, n_1, n_2 — *некоторые положительные постоянные, необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции* $V(X, t)$ *и* $W(X, t)$ *такие, что*

1) $V(X, t)$ *и* $W(X, t)$ *заданы и непрерывны в области* $X^2 \leqslant \delta^2$, $t > T$, $\delta \leqslant \delta_1 < r$, $r > 0$ — *постоянная*;

2) $a_1\varphi(t) V_1(X) \leqslant V(X, t) \leqslant a_2\varphi(t) V_1(X)$, $-b_1\psi(t) V_1^l(X) \leqslant W(X, t) \leqslant -b_2\psi(t) V_1^l(X)$, *где* a_1, a_2, b_1, b_2 — *положительные постоянные*;

3) $\dfrac{dV(X, t)}{dt} = W$ *в силу системы* (2). *Непрерывные, положительные функции* $\varphi(t)$ $\psi(t)$ *таковы, что величина*

$$\varkappa(t, t_0, c, l) = \varphi(t_0)\varphi^{-1}(t) \sqrt[1-l]{1 + c\int_{t_0}^{t} \psi(t)\varphi^{-l}(t)\, dt},$$

где $c > 0$, $l > 1$, *обладает свойствами*:

1) $\varkappa \to 0$ *при* $t \to +\infty$;

2) $\varkappa(t, t_0, c, l)$ *равномерно ограничена относительно* c *при* $T \leqslant t_0 \leqslant t$;

3) *величина* $\vartheta = \int_{t_0}^{t} \psi(t)\varphi^l(t)\, dt \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$.

4. Рассматривается система

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \qquad (3)$$

$$(s = 1, \ldots, k),$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji} y_i + \sum_{i=1}^{k} a_{ji} x_i + Y_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n), \ (j = 1, \ldots, n),$$

где X_s, Y_j голоморфны и в своих разложениях не содержат линейных членов.

Теорема 3. *Если* $X_s \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ *в силу системы* $\dfrac{dy_j}{dt} = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, *то система* (3) *имеет* k *голоморфных интегралов, и в этом случае нулевое решение системы* (3) *устойчиво*.

Общий случай сводится к пункту 3.

Рассматривается также система с несколькими парами чисто мнимых корней, для которой выведены условия существования семейства ограниченных решений (особый случай). При этих условиях нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову. При отсутствии семейства ограниченных решений определенного вида (общий случай) вопрос сводится к пункту 3.

Здесь, как и в системе (3), предполагается, что остальные собственные числа матрицы коэффициентов линейного приближения имеют отрицательные действительные части.

Заседание 5 июня 1956 г.

О. А. Ладыженская «О получении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении „коэффициента вязкости к нулю».

1957 г. ноябрь—декабрь *т. XII, вып. 6 (78)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(математическая секция Ленинградского дома ученых)

Заседание 9 октября 1956 г.

1. О. А. Ладыженская «О малом параметре в линейных и нелинейных уравнениях в частных производных».

2. Ю. Г. Решетняк «О вариационных задачах в параметрической форме».

Заседание 23 октября 1956 г.

С. М. Лозинский «Строгая оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 13 ноября 1956 г.

1. В. А. Якубович «О критических частицах при параметрическом возбуждении колебаний».

2. В. А. Плисс «Проблемы качественной теории систем типа Айзермана».

Заседание 27 ноября 1956 г.

Е. А. Ибрагимов «Теория информации».

Заседание 11 декабря 1956 г.

1. Е. В. Вороновская «О наилучшем приближении полиномов высоких степеней полиномами низких степеней».

2. Г. Ш. Рубинштейн «Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником».

Заседание 27 декабря 1956 г.

Л. В. Канторович «О проведении численных и аналитических вычислений на цифровых машинах».

Заседание 12 февраля 1957 г.

1. А. В. Малышев «О представлении целых чисел суммой четырех квадратов».

Содержание доклада публикуется в виде заметки в ДАН СССР под заглавием «О распределении целых точек на четырехмерной сфере».

2. В. И. Зубов «Об устойчивости инвариантных множеств в метрических пространствах».

Заседание 12 марта 1957 г.

1. Ю. В. Линник «Некоторые новые теоремы метода наименьших квадратов с приложениями к теории локации и определения места».

В схеме уравнения по элементам имеем: $Y=X^{(0)}+XA$; $A=A_{n1}=\left\|\begin{matrix}a_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_n\end{matrix}\right\|$ — матрица неизвестных элементов; $X=X_{N_n}=\|x_{rj}\|$ — матрица известных абсцисс; $X^{(0)}=X^{(0)}_{N_1}$ — заданная матрица. Наблюдается матрица $L=L_{N_1}=Y+\Delta$; $\Delta=\Delta_{N_1}=\left\|\begin{matrix}\Delta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \Delta_N\end{matrix}\right\|$ — случайный вектор погрешности (нормальных, независимых, неравноточных):

$$E(\Delta)=0;\quad B_\Delta=E(\Delta\Delta^T)=\sigma^2P^{-1},$$

где P — известная матрица весов, σ — неизвестный параметр точности. Пусть $\widetilde{A}$ — матрица оценок A по методу наименьших квадратов; $\widetilde{V}=X^{(0)}+X\widetilde{A}-L$ — матрица кажущихся поправок; $[p\widetilde{v}\widetilde{v}]=\widetilde{V}^TP\widetilde{V}$. Пусть желательно оценить m линейных функций, выражаемых матрицей $H=H_m=G\cdot A$, где $G=G_{m_n}=\|g_{rj}\|$ — известная матрица; $m\leqslant n$ — ранг $(G)=m$. Для нее можно построить доверительную область.

Теорема. *Пусть* $\widetilde{H}=G\widetilde{A}$; $K=K_{mm}=GC^{-1}G^T$, *где* $C=X^TPX$; $Z=\left\|\begin{matrix}Z_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ Z_m\end{matrix}\right\|$ — *вектор текущих координат* $Z_1, \ldots, Z_m$. *Матрица* K — *неособенная и доверительный эллипсоид* $\mathcal{E}_{\gamma_0}$:

$$(Z-\widetilde{H})^TK^{-1}(Z-\widetilde{H})=\gamma_0\,[p\widetilde{v}\widetilde{v}],$$

накрывает точку $Z=H$ *с вероятностью* γ_0, *причем* $F_{m,N-n}(\gamma_0)=p_0$, *где*

$$F_{m,N-n}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{N-n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_0^x\frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{N-n+m}{2}}}\,du$$

(*распределение Фишера с* m *и* $N-n$ *степенями свободы*).

При $m=1$ отсюда получаются описанные в литературе доверительные интервалы для элементов порознь, при $m=n=2$ — случай, например, обработки прямых и обратных засечек на плоскости, имеет место простая формула:

$$\gamma_0=\left(\frac{1}{1-p_0}\right)^{\frac{2}{N-2}}-1.$$

2. Е. В. Вороновская «Оценка тригонометрических полиномов методов функционалов».

Заседание 26 марта 1957 г.

1. В. И. Крылов «По поводу теоремы Бернштейна и квадратурной формулы Чебышева».

2. Т. А. Розет «О методе „склеивания“ в теории волноводов».

Пусть в плоскости $x=0$ расположена конечная область S с границей Γ, а внутри S — область S_1 с границей Γ_1, которую, как и Γ, предполагаем кусочно-гладкой.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность собственных значений и $\{\varphi_n(M)\}$ — последовательность соответствующих нормированных собственных функций «мембранной» задачи для области S_1, т. е. задачи

$$\Delta u+\lambda u=0,\quad u|_{\Gamma_1}=0\quad (u=u(M),\ M\in S_1). \tag{1}$$

Аналогично $\{\mu_n\}$ и $\{\psi_n(M)\}$ — последовательности собственных значений и нормированных собственных функций такой же задачи для области S.

Рассмотрим полубесконечные цилиндры: $\Omega_1=S_1\times(-\infty,0)$ с боковой поверхностью σ_1 и $\Omega=S\times(0,\infty)$ с боковой поверхностью σ (последующее изложение охватывает и случай двумерных областей, когда Ω_1 и Ω — полубесконечные полосы, заключенные между прямыми, параллельными оси x; в этом случае $\varphi_n(M)$ и $\psi_n(M)$ — соответствующие собственные функции одномерных краевых задач).

Будем решать задачу о разыскании функции $u(M;x)$, удовлетворяющей:

а) внутри области $\Omega+\Omega_1$ уравнению

$$\Delta u+k^2u=0, \tag{2}$$

где $k>0$ — фиксированное, причем $\lambda_n<k^2$ при $n\leqslant N_1$ и $\lambda_n>k^2$ при $n>N_1$; $\mu_n<k^2$ при $n\leqslant N$ и $\mu_n>k^2$ при $n>N$; N_1 и N — целые $\geqslant 1$;

б) граничным условиям

$$u|_{\sigma_1}=0,\quad u|_{\sigma}=0; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{S-S_1}=0\quad (\text{при } x=+0); \tag{4}$$

в) условиям на бесконечности

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{dv_1}{dx}-\sqrt{\lambda_1-k^2}\,v_1\right)e^{\sqrt{\lambda_1-k^2}\,x}\right]=-2\gamma\sqrt{\lambda_1-k^2}\quad (\gamma=\mathrm{const}), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{dv_n}{dx}-\sqrt{\lambda_n-k^2}\,v_n\right)=0\quad (n=2,3,\ldots), \tag{6}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{dw_n}{dx}+\sqrt{\mu_n-k^2}\,w_n\right)=0\quad (n=1,2,\ldots), \tag{7}$$

где

$$v_n(x)=\int_{S_1}u(M,x)\,\varphi_n(M)\,dS_M,\quad w_n(x)=\int_{S}u(M,x)\,\psi_n(M)\,dS_M;$$

г) условиям «склеивания» в области S_1 (при $x=0$), т. е. требованию, чтобы при приближении к этому сечению стремились к одинаковым пределам, во-первых, значения $u(M,x)$, взятые с обеих сторон от него, во-вторых, значения $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Считая $\varphi_n(M)$ продолженными в $S-S_1$ с нулевыми значениями, рассмотрим множество E тех элементов комплексного функционального пространства $L_2(S)$, для которых сходятся ряды $\sum_1^\infty \lambda_n|(f,\varphi_n)|^2$, $\sum_1^\infty \mu_n|(f,\psi_n)|^2$; на этом множестве[1]), плотном в L_2, определены операторы

$$Af=\sum_1^\infty p_na_n\varphi_n,\quad \text{где}\quad p_n=\sqrt{\lambda_n-k^2},\qquad a_n=(f,\varphi_n), \tag{8}$$

$$Bf=\sum_1^\infty q_nb_n\psi_n,\quad \text{где}\quad q_n=\sqrt{\mu_n-k^2},\qquad b_n=(f,\psi_n), \tag{9}$$

с областью значений в $L_2(S)$.

---

[1]) Если S и $S_1\subset S$ — отрезки, то к этому множеству принадлежат все функции непрерывные на S и обращающиеся в нуль на концах S_1.

Пусть $f(M) \in E$ есть решение функционального уравнения

$$(A+B)f = 2\gamma p_1 \varphi_1, \tag{10}$$

причем

$$Bf = 0 \tag{11}$$

при $M \in S - S_1$. Тогда функция

$$u(M;\ x) = \begin{cases} \sum\limits_1^{\infty} a_n e^{p_n x} \varphi_n(M) - 2\gamma \operatorname{sh} p_1 x \cdot \varphi_1(M), & x < 0,\ M \in S_1, \\ \sum\limits_1^{\infty} b_n e^{-q_n x} \psi_n(M), & x > 0,\ M \in S \end{cases} \tag{12}$$

служит решением задачи а) — г); при этом условии «склеивания» выполнены в таком смысле:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u(M;\ x_2) - u(M;\ x_1) \|_{S_1} = 0,\ \lim_{\varepsilon \to 0} \| u'_x(M;\ x_2) - u'_x(M;\ x_1) \|_{S_1} = 0, \tag{13}$$

где $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_2 - x_1 = \varepsilon$. Условие (4) выполняется также в смысле сходимости в среднем.

Оператор $A + B$ — неограниченный, он обладает таким свойством:

(А) если $\{f_k\}$ — последовательность элементов из E, для которой $(Af_k + Bf_k,\ f_k) \to 0$, то и $f_k \to 0$.

В частности, из $(AB + Bf,\ f) = 0$ следует $f = 0$. Отсюда уравнение $(A+B)f = 0$ имеет единственное решение $f = 0$. Основываясь на этом, можно доказать и единственность решения задачи а) — г), при условиях «склеивания» (13). С этой целью берем функции источника в виде (ср. [1])

$$G_1(M,\ x;\ Q,\ \xi) = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{\varphi_n(M)\varphi_n(Q)}{p_n} [e^{-p_n|x-\xi|} + e^{p_n(x+\xi)}], \qquad M,\ Q \in S_1,\ x,\ \xi < 0,$$

$$G(M;\ x;\ Q,\ \xi) = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(Q)}{q_n} [e^{-q_n|x-\xi|} + e^{-q_n(x+\xi)}], \qquad M,\ Q \in S,\ x,\ \xi > 0$$

и применяем формулу Грина к каждому из двух объемов, ограниченных боковыми поверхностями цилиндров и плоскостями $\xi = 0$, $\xi = \xi_0$, с последующим переходом к пределу, соответственно, при $\xi_0 \to -\infty$ и $\xi_0 \to +\infty$.

Введя некоторые ограничения, докажем существование решения задачи а) — г) при условиях «слабого склеивания», а именно второе условие (13) заменим требованием, чтобы для любой функции $g(M) \in E$, равной нулю в $S - S_1$, выполнялось соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (u'_x(M;\ x_2) - u'_x(M;\ x_1),\ g(M)) = 0; \tag{14}$$

аналогично изменим и условие (4).

Теорема. *Пусть собственные функции φ_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ принадлежат области определения оператора B и в подпространстве $L_2(S - S_1)$ существует базис $\{\chi_k\}$, все элементы которого (продолженные в S_1 с нулевыми значениями) принадлежат той же области*[1]); *тогда бесконечная система*

$$(f,\ (A^* + B^*)\varphi_1) = 2\gamma p_1,\ (f,\ (A^* + B^*)\varphi_n) = 0 \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots), \tag{15}$$

$$(f,\ B^*\chi_k) = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{16}$$

имеет решение $f \in L_2(S)$

---

[1]) Указанные условия выполняются, например, если S и $S_1 \subset S$ — отрезки с общим концом, или прямоугольники с общим основанием, концентрические круги и т. п.

Для доказательства заметим, что $A^*\chi_k=0$ $(k=1, 2 \ldots)$ и перепишем уравнения (16) так:

$$(f, (A^*+A^*)\chi_k)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Теперь задача сводится к отысканию элемента $f \in L_2(S)$, имеющего заданную проекцию на $(A^*+B^*)\varphi_1$ и ортогонального замкнутой линейной оболочке множества, состоящего из элементов $(A^*+B^*)\varphi_m$ $(m=2, 3, \ldots)$, $(A^*+B^*)\chi_k$ $(k=1, 2 \ldots)$. Такой элемент наверняка существует, так как $(A^*+B^*)\varphi_1$ не принадлежит указанной оболочке. Это следует, на основании леммы Шефке [2], из линейной независимости множества всех φ_m, χ_k $(m, k=1, 2, \ldots)$ с учетом свойства (A) оператора A^*+B^*.

Если решение $f(M)$ системы (15), (16) использовать для построения $u(M, x)$ в (12), то эта последняя функция и явится решением уравнения (2), удовлетворяющим условиям (3), (5)—(7), (14) и первому условию (13), а также условию

$$\lim_{x\to+0} (u'_x(M; x), h(M))=0, \tag{18}$$

где $h(M)$—любая функция из области определения оператора B, равная нулю в S_1.

Подобным же образом рассматривается аналогичная задача с условием $u|_{S-S_1}=0$ (при $x=+0$) вместо (4). В этом случае становится излишним требование о существовании в $L_2(S-S_1)$ базиса, элементы которого принадлежат области определения оператора B, а упомянутое предельное условие на $S-S_1$ окажется выполненными в смысле сходимости в среднем.

Приближения к функции f получаются путем приближенного построения проекции элемента $(A^*+B^*)\varphi_1$ на подпространство, порожденное остальными $(A^*+B^*)\varphi_m$, в процессе последовательной ортогонализации этих элементов (между ними нет линейной зависимости, в чем легко убедиться с помощью рассуждений, приведенных выше).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ 17, № 11 (1947), 1283—1295.
[2] F. W. Schäfke, Math. Nachrichten 3, № 1 (1949), 40—58.

Заседание 9 апреля 1957 г.

С. М. Лозинский «Обратные функции, неявные функции и решение конечных уравнений».

Заседание 23 апреля 1957 г.

1. Д. К. Фаддеев «О некоторых итерационных методах решения систем линейных уравнений».

2. А. Е. Гельман «К вопросу об оценке радиусов сходимости рядов, полученных употреблением малого параметра».

Заседание 14 мая 1957 г.

1. Л. В. Канторович «Математический анализ некоторых планово-производственных задач».

2. Г. Ш. Рубинштейн «Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах».

3. В. Б. Орлов «О пятилетнем плане издания математической литературы Гостехиздатом».

Заседание 28 мая 1957 г.

1. В. П. Басов «Об асимптотическом разложении решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений при наличии кратного корня определяющего уравнения».

2. М. Ш. Бирман «О многомерных краевых задачах с малым параметром при старших производных».

Для задач, аналогичных задаче Левинсона [1], предлагается простой метод доказательства сходимости решений к решению некоторой краевой задачи для вырожденного уравнения [1]).

В ограниченной n-мерной области Ω с достаточно гладкой границей S рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения [2]):

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + a(x) u = f(x), \quad u(x)|_S = 0, \quad (\varepsilon > 0) \tag{1}$$

при условии

$$a - \frac{1}{2} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \geqslant a_0 = \text{const} > 0. \tag{2}$$

Для решений $u = u_\varepsilon$ легко установить неравенство

$$\int_\Omega \omega A^2 u_A^2 \, d\Omega \leqslant c \int_\Omega f^2 \, d\Omega. \tag{3}$$

Здесь $A = |\mathbf{A}|$, $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, u_A — производная по направлению $\mathbf{A}$, $\omega(x) \geqslant 0$ — функция, равная нулю только на той части S, где $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{n}) > 0$ ($\mathbf{n}$-орт внешней нормали), постоянная c от ε не зависит. Выберем из u_ε слабо сходящуюся (в метрике левой части (3)) подпоследовательность. Предельная функция $u_0(x)$, очевидно, является обобщенным решением вырожденного уравнения (см. [2]). В то же время ограниченность первого интеграла в (3) показывает, что u_0 обращается в нуль (в среднем) на той части S_1 границы S, где $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{n}) < 0$ и $A \neq 0$. Сходимость всей последовательности u_ε к u_0 следует из единственности решения вырожденного уравнения с указанными свойствами. Тем же способом можно рассматривать уравнения высших порядков. Например, предыдущий результат справедлив и для уравнения

$$(-1)^m \varepsilon \Delta^m u + a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + au = f \qquad (\varepsilon > 0) \tag{4}$$

в условиях первой краевой задачи.

Отметим, что условие (2) в задачах (1) и (4) можно заменить более слабым, например, условием $a - \frac{1}{2} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = 0$, но тогда придется требовать, чтобы векторные линии $\mathbf{A}$ покрывали Ω «регулярно» (см. [1] и [2]).

Приведем еще ряд примеров. В задаче

$$\varepsilon \Delta^2 u + a \frac{\partial \Delta u}{\partial x_1} = f, \quad u\Big|_S = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0 \quad (\varepsilon > 0, \ a = \text{const} > 0)$$

исследование проводится на основании неравенства

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_k} \right)^2 \omega \right] d\Omega \leqslant c \int_\Omega f^2 \, d\Omega.$$

Функция $\omega(x)$ обращается в нуль лишь там на S, где $\cos(\mathbf{n}, x_1) < 0$. Более общее уравнение

$$\varepsilon \Delta^2 u + a_r(x) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_r} - a(x) \Delta u = f$$

исследуется также, если только $a(x) \geqslant a_0 > 0$ и a_0 достаточно велико.

---

[1]) Близкие результаты получил в последнее время дипломант Ленинградского университета Солонников, продолжавший исследования О. А. Ладыженской [2].

[2]) По повторяющимся индексам суммирование от 1 до n.

Во всех рассмотренных выше случаях результаты легко переносятся на соответствующую смешанную параболическую задачу. Например, решения u_ε задачи

$$u_t - \varepsilon \Delta u + a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + a(x)u = f, \quad u|_S = 0, \quad u|_{t=0} = 0 \quad (\varepsilon > 0) \tag{5}$$

при условии (2) сходятся к решению уравнения $u_t + a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + au = f$, обращающемуся в нуль на S_1 и при $t=0$. При этом используется неравенство

$$\int_0^T dt \int_\Omega \left[u^2 + \left(a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \omega(x)\right] d\Omega \leqslant c(T) \int_0^T dt \int_\Omega f^2 \, d\Omega.$$

Рассмотрим еще уравнение

$$-\nu u_{tt} - \Delta u + a_r(x)\frac{\partial u}{\partial x_r} + u_t + a(x)u = f$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$ при условиях $u|_\Sigma = 0$ (Σ—поверхность Q_T) и (2). Неравенство

$$\int_{Q_T} \left[u^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + (T-t)u_t^2\right] d\Omega \, dt \leqslant c \int_0^T dt \int_\Omega f^2 \, d\Omega$$

показывает, что u_ν сходятся при $\nu \to +0$ к решению смешанной задачи (5) (при $\varepsilon = 1$). Число подобных примеров можно было бы значительно увеличить. Все результаты остаются справедливыми и для неоднородных граничных условий.

Отметим в заключение, что в ряде задач исследование может быть проведено на основании одной теоремы теории операторов. Соответствующий результат и примеры приведены в [3]. Однако рассмотренные выше случаи не включаются в предложенную в [3] схему.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Levinson, The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε, Ann. of Math. 51, № 2 (1950), 428—445.

[2] О. А. Ладыженская, Об уравнениях с малым параметром при старших производных и линейных дифференциальных уравнениях с частными производными, Вестник ЛГУ, № 7 (1957), 104—120.

[3] М. Ш. Бирман, Метод квадратичных форм в задачах о малом параметре при старших производных, Вестник ЛГУ, № 13 (1957).

1958 г. ноябрь—декабрь т. XIII, вып. 6 (84)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА
(математическая секция Ленинградского дома ученых)

Заседание 22 октября 1957 г.

В. А. Якубович «О нелинейных дифференциальных уравнениях систем непрямого автоматического регулирования с одним регулирующим органом».

Доклад посвящен следующей задаче. Дана система вида

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+a\varphi(\sigma),\\ \dot{\sigma}&=(b,\ x)-\rho\varphi(\sigma),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где A — вещественная постоянная матрица, a, b — вещественные постоянные векторы порядка n, $\rho>0$; непрерывная функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию $\varphi(0)=0$, $\sigma\varphi(\sigma)>0$ при $\sigma\neq 0$.

Требуется установить условия, налагаемые на коэффициенты системы (1), при выполнении которых для любой функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей сформулированным условиям, тривиальное решение $x=0$, $\sigma=0$ было бы устойчиво в целом, т. е. чтобы кроме обычной устойчивости «в малом» любое решение $x(t)$, $\sigma(t)$ было продолжимо при $t\to\infty$ и $x(t)\to 0$, $\sigma(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Целый ряд результатов для систем (1) и систем аналогичного вида получили Н. П. Еругин, И. Г. Малкин, Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, А. П. Тузов, В. А. Плисс и другие.

Указанная задача поставлена и в определенных весьма широких предположениях решена А. И. Лурье [1]. В работах А. М. Летова [2], П. В. Бромберга [3] и других результаты А. И. Лурье были развиты и обобщены. Докладчиком были получены следующие результаты, дополняющие и продолжающие эти исследования.

1°. Пусть все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части.

Система разрешающих уравнений А. И. Лурье, записанная в отличие от [1], [2] и в инвариантной форме, имеет вид

$$UA+A^*U=-uu^*,\quad Ua+\rho u+\frac{1}{2}\rho b=0.\tag{2}$$

Здесь u — вектор-столбец с компонентами $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$, U — симметрическая матрица. Таким образом, уравнения (2) являются системой n квадратных уравнений относительно величин $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$. Если эта система имеет вещественное решение $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ для заданного вектора b и всех векторов в достаточно близких к заданному, то тривиальное решение устойчиво в целом.

Аналогичное предложение доказано А. И. Лурье [1] в предположении, что матрица A имеет различные собственные значения; само доказательство в ряде пунктов нуждается в дополнениях.

Достоинство разрешающих уравнений (2) по сравнению с разрешающими уравнениями [1], [2] заключается в том, что они составляются непосредственно по коэффициентам системы (1).

2°. Указано, как в общем случае решать систему (2). Как правило, можно последовательно исключать $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ и для $\zeta_n = \zeta$ получить алгебраическое уравнение четной степени N:

$$P_N(\zeta) = 0, \tag{3}$$

где N имеет значения

n	2	3	4	5
N	2	4	8	12

Коэффициенты уравнения (3) являются многочленами от коэффициентов системы (1). Для устойчивости в целом достаточно, чтобы уравнение (3) имело по крайней мере два вещественных корня.

При некоторых соотношениях на коэффициенты системы (1) условия разрешимости уравнений (2) имеют другой вид. При $n=2$, 3, 4 этих исключительных случаев нет; при $n=5$ при определенных соотношениях на коэффициенты получим вместо уравнения (3) условия вида

$$P_6(\zeta) = 0, \quad Q_6(\zeta) > 0,$$

т. е. некоторое уравнение шестой степени должно иметь по крайней мере два вещественных корня, для которых другой многочлен шестой степени должен принимать положительные значения.

С увеличением n алгебраические выкладки, связанные с вычислением коэффициентов уравнения (3), быстро возрастают.

3°. Если вектор a является собственным вектором матрицы A или b — собственным вектором матрицы A^*, то уравнения (2) решаются в явном виде; необходимым и достаточным условием устойчивости в целом оказывается одно неравенство $\Gamma^2 \equiv \rho + (b, A^{-1}a) > 0$. В частности, это условие является необходимым и достаточным условием положительного решения поставленной задачи в общем случае для $n=1$.

Если минимальный многочлен вектора a относительно матрицы A или вектора b относительно матрицы A^* имеет степень $p < n$, то систему (1) можно свести к системе того же вида, но имеющей порядок $p+1$ вместо $n+1$. В частности, систему (1) можно свести к системе, у которой матрица A обладает тем свойством, что каждому собственному значению отвечает лишь один ящик жордановой формы.

4°. Указано, как несколько усложняя метод А. И. Лурье получить достаточные условия устойчивости в целом, которые охватывают все достаточные условия, получаемые при помощи функции Ляпунова определенного вида («квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности»). Насколько известно автору, в рассматриваемом круге задач только такие функции Ляпунова и применялись.

Эти условия получены для $n=2$. При $(A^{-1}a, b) > 0$ эти условия оказываются и необходимыми.

5°. Все предыдущие результаты распространены на случай, когда матрица A имеет одно нулевое собственное значение.

Показано, что в случае, если собственное значение $\lambda = 0$ имеет кратность $k > 1$, сформулированная задача решается в отрицательном смысле.

Получены оценки решения системы (1).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
[2] А. М. Летов, Устойчивость нелинейных регулируемых систем, М.—Л., Гостехиздат, 1954.
[3] П. В. Бромберг, Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования, Оборонгиз, 1953.

Заседание 12 ноября 1957 г.

1. Г. И. Натансон «О сумматорных формулах с узлами Якоби».
2. Л. Н. Котова «Оценка погрешности численного интегрирования системы дифференциальных уравнений внешней баллистики».

Заседание 10 декабря 1957 г.

1. Л. А. Кальниболоцкая «Сумматорный аналог интеграла Джексона».

В качестве аппарата приближения функций рассматривается последовательность тригонометрических полиномов типа Джексона

$$u_n(x)=\frac{3}{(2n+1)\,n(2n^2+1)}\sum_{k=0}^{2n}\varphi_{k,n}\left(\frac{\sin n\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}{\sin\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}\right)^4,$$

где $\varphi_{k,n}$ — некоторые вещественные числа, различными способами связанные с функциями, $x_k^{(n)}=\dfrac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n)$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in C_{2\pi}$. *Тогда полиномы*

$$u_n(f;\,x)=\frac{3}{(2n+1)\,n\,(2n^2+1)}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k^{(n)})\left(\frac{\sin n\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}{\sin\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}\right)^4,$$

аналоги сингулярных интегралов Джексона [1],

$$\widetilde{u}_n(f;\,x)=\frac{3}{2\pi n\,(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{\sin n\dfrac{t-x}{2}}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right)^4dt,$$

сходятся к функции $f(x)$ *равномерно на всей оси.*

В последующих четырех теоремах функция $f(x)$ предполагается ограниченной и 2π — периодической.

Теорема 2. *Пусть* $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности* $f(x)$. *Тогда*

$$|u_n(f;\,x)-f(x)|\leqslant M\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где M — *постоянная, не зависящая от* n.

Теорема 3. *Пусть* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *конечную вторую производную* $f''(x_0)$. Тогда

$$u_n(f;\,x_0)-f(x_0)=\frac{3}{2}\frac{f''(x_0)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теорема 4. *Пусть в точке x_0 у $f(x)$ существует конечная производная $f'(x_0)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} u_n'(f;\ x_0) = f'(x_0).$$

Теорема 5. *Если $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную вторую производную, то*

$$\lim_{n\to\infty} u_n''(f;\ x_0) = f''(x_0).$$

Можно снять условие 2π-периодичности функции $f(x)$ и рассматривать функцию, ограниченную в промежутке $[0;\ 2\pi]$. Тогда при выполнении остальных условий теорем 3, 4 и 5 в точке x_0, $0 < x_0 < 2\pi$, верны утверждения этих теорем.

Далее рассматривается суммируемая в промежутке $[0;\ 2\pi]$ функция $f(x)$.

Для нее можно построить полиномы вида

$$\overline{u}_n(f;\ x) = \frac{3}{(2n+1)(2n^2+1)} \sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{2n+1}{2\pi} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(t)\,dt\right] \left(\frac{\sin n \dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}{\sin \dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}\right)^4.$$

Теорема 6. *Если рассматривать $\overline{u}_n(f;\ x)$ как оператор из $L(0;\ 2\pi)$ в $L(0;\ 2\pi)$, то*

$$\|\overline{u}_n\|_{L(0;\ 2\pi)} = 1.$$

Теорема 7. *Пусть $f(x) \in L(0;\ 2\pi)$. Тогда в каждой точке x_0, $0 < x_0 < 2\pi$, в которой $f(x)$ является производной своего неопределенного интеграла, будет*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{u}_n(f;\ x_0) = f(x_0).$$

Определение [2]. *Средним метрическим* измеримой и почти везде конечной функции $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ называется такое число h, что при любом $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства:

$$mE[f(x) \geqslant h] \geqslant \frac{b-a}{2}, \quad mE[f(x) \geqslant h+\varepsilon] < \frac{b-a}{2}.$$

Среднее метрическое обозначается так: $h = m_a^b mf(x)$.

Теорема 8. *Пусть $f(x)$ — измеримая и почти везде конечная в промежутке $[0;\ 2\pi]$ функция. Тогда полиномы*

$$\overline{\overline{u}}_n(f;\ x) = \frac{3}{(2n+1)\,n\,(2n^2+1)} \sum_{k=0}^{2n} \left\{ m_{x_k^{(n)}-3n^{-\frac{1}{3}}}^{x_k^{(n)}+3n^{-\frac{1}{3}}} m\,[f(x)]\,n \right\} \left(\frac{\sin n \dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}{\sin \dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}\right)^4$$

сходятся к $f(x)$ в каждой точке x_0, $0 < x_0 < 2\pi$, ее аппроксимативной непрерывности.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Jackson, Ueber die Genauigkeit der Annaherung stetiger Funktionen, Dissertation, Göttingen, 1911.

[2] Л. В. Канторович, Представление произвольной измеримой функции в виде предела последовательности полиномов, Матем. сб. 41: 3 (1934).

[3] М. И. Морозов, К вопросу о приближении периодических квазигладких функций и функций, удовлетворяющих условию Липшица, Моск. авиац. ин-т, 1956.

[4] И. П. Натансон, О точности представления непрерывных периодических функций сингулярными интегралами, ДАН 73, № 2 (1950).

[5] С. И. Рапопорт, О представлении функций некоторыми тригонометрическими полиномами, ЛЭИИЖТ, сб. Научных трудов, вып. IV (1952).

2. В. Р. Петухов «Об устойчивости систем с последействием».

Заседание 24 декабря 1957 г.

1. Э. Б. Быховский «Основная краевая задача для системы уравнений Максвелла».

2. В. А. Солонников «О линейных дифференциальных уравнениях в частных производных с малым параметром при старших производных».

Заседание 14 января 1958 г.

В. А. Якубович «О динамической устойчивости упругих систем с конечным числом степеней свободы».

Заседание 25 февраля 1958 г.

1. Е. В. Вороновская «О чебышевском приближении аналитических функций».

2. В. И. Зубов и В. Хоменюк «О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 11 марта 1958 г.

Г. Ю. Джанелидзе «Высшие технические школы и университеты ГДР» (по личным впечатлениям).

Заседание 25 марта 1958 г.

1. И. П. Натансон «Об одной экстремальной задаче, связанной с возрастающими многочленами».

2. В. И. Зубов «Теория линейных обыкновенных систем с запаздывающим аргументом».

Заседание 1 апреля 1958 г.

Б. Н. Делоне «Теория стереоэдров».

Заседание 22 апреля 1958 г.

Н. Н. Воробьев «Основы теории игр».

Заседание 13 мая 1958 г.

1. В. И. Зубов и В. В. Леонов «Поведение решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки иррегулярного типа».

2. В. П. Хавин «Один аналог ряда Лорана».