Journal de la Société Physico-Mathématique
de Léningrade
t. I, fasc. I

ЖУРНАЛ
ЛЕНИНГРАДСКОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОСНОВАН
академиком В. А. СТЕКЛОВЫМ

ИЗДАНИЕ ГЛАВНАУКИ
1926

Ленинградский Гублит № 19275. Тираж 1.070 экз. 9 л.

2-я типография Транспечати НКПС имени тов. Лоханкова. Ул. Правды, 15.

Академик В А. Стеклов.

30-го мая с. г. скончался почетный член Общества, основатель настоящего журнала и его первый редактор, вице-президент Академии Наук С. С. С. Р. академик В. А. Стеклов.

Уже больной В. А. руководил подготовкой к печати материала настоящего выпуска, уже больной находил он время и силы для выполнения формальностей, связанных с началом издания.

Смерть не дала В. А. увидеть даже первый выпуск специального математического журнала, об издании которого в Ленинграде он мечтал еще с 1910 года.

В короткой заметке невозможно оценить деятельность такого крупного ученого.

Оценке научной и научно-организационной деятельности покойного будут посвящены многие работы специалистов.

Ряд докладов о работах В. А. Стеклова будет сделан и в специальном заседании Ленинградского Физико-Математического Общества, которое будет посвящено памяти покойного.

Редакция.

Профессор А. А. Фридман.

Памяти А. А. Фридмана.

Речь, произнесенная Председателем Ленинградского Физико-Математического Общества Н. М. Гюнтером, в заседании 26 Сентября 1925 года.

Вам известно, что в среду 16-го сентября скончался от брюшного тифа член Правления нашего Общества, Директор Геофизической Обсерватории, профессор *Александр Александрович Фридман.*

Общественную деятельность свою А. А. начал через год по окончании Университета, при котором он был оставлен академиком В. А. Стекловым. Именно, в 1910 году он был избран преподавателем Института Инженеров Путей Сообщения и вскоре после этого, по предложению академика князя Б. Б. Голицына, поступил в Павловскую магнитную обсерваторию.

Всю войну А. А. провел на фронте, работая в области воздушной обороны; по окончании войны был профессором в Перми и, вернувшись в наш город в 1920 г., работал в Институте Инженеров Путей Сообщения, Университете, в Политехническом Институте, в Морской Академии и в Морском Инженерном Училище, совмещая все это с занятиями в Геофизической Обсерватории, директором которой он сделался за несколько месяцев до смерти.

Из перечисленных его занятий за последние 5 лет Вы видите, как ненасытен и жаден до работы был покойный; если же Вы вспомните, что за это время им изданы 4 большие работы, не считая диссертации, начатой ранее и только законченной в это время, при чем отметите, что последние его работы касаются принципа относительности, основательное знакомство с которым А. А. получил также за последние 5 лет, то Вы справедливо изумитесь его трудоспособности; изумитесь тем более, что Вы знаете, сталкиваясь с покойным в различных областях его деятельности, что всякое дело, за которое он брался, он выполнял с совершенной отчетливостью и выполненное им оставалось для других непревзойденным образцом.

Если-бы кто нибудь занялся одним только из дел А. А. и, посвятив ему все свои силы, выполнил его в то-же время и так-же как А. А., мы признали-бы его ценным деятелем.

Вы знаете, как работал А. А. для достижения своих результатов; А. А. кипел в своей работе, а эта работа началась с ученической скамьи. Всю жизнь он не давал себе покоя, приступая к изучению вопроса ему нового только для того, чтобы, освоившись с ним, обратиться к изучению другого, более трудного.

Питомец Петербургского Университета, казалось предназначенный для чисто теоретических изысканий, он поступает в Метеорологическую Обсерваторию и, совершенно чуждый новому делу, он совершенно осваивается с ним в короткое время; осваивается на столько, что через полгода он печатает работу, указывающую метод, облегчающий вычисления, десятки лет выполнявшиеся по одному трафарету.

В то же время, говоря окружающим, что он думает только о том, „нельзя-ли чего откинуть", — в занимавших его уравнениях — он, не сокращая обычной работы по преподаванию, читает в Институте Путей Сообщения новый для него курс приближенных вычислений, взятый им от Я. В. Успенского, и читает его смешанной аудитории, в которой больше преподавателей, чем студентов; вместе с тем один вечер в неделю тратит на занятия с 6-ю студентами — лучшими студентами Института, сошедшимися с разных курсов — на занятия по математическим приборам; а за год перед тем все заходившие в Механический кабинет Университета могли видеть А. А. упражнявшимся в употреблении интегратора Абданк-Абакановича и других приборов.

Из курса Морской Академии сделан им полный и совершенный курс, в котором не упущены ни одна подробность, делающая его современным, и ни одно средство, дающее возможность к практическим приложениям. „Это курс трудный, сказал как-то А. А., мне пришлось много учиться". Разработав этот курс, А. А. часто настаивал на введении в преподавание нужных по его мнению подробностей и когда ему возражали, что это мало кто знает, говорил: „Пусть выучатся; я тоже не знал, но выучился".

Он был требователен к другим и имел на то право, так как был беспощаден к самому себе.

Вы слыхали в 1921 году первые доклады в нашем Обществе о принципе относительности.

„Скоро мы разберемся в этих вопросах, сказал как-то тогда Я. Д. Тамаркин; Фридман принялся за изучение Вейля". Вы сами имели случай убедиться, что А. А. действительно, и еще до 1923 года, в них разобрался.

Вы конечно, знаете, когда он работал; время для его этой работы — ночь, все оставшееся ему время без исключения все время, не занятое физическим исполнением взятых на себя обязанностей.

Так-же, как в последние годы, он работал и во время войны. Как могли появиться иначе его труды по гидродинамике сжимаемой жидкости, если-бы мысль его в сутолоке военных действий не продолжала работать над отвлеченными научными вопросами, неугомонно пытаясь разобраться до конца во всем, что неясно.

Во время войны им выпущено несколько заметок и начата диссертация, за которую потомство справедливо причислит его к числу создателей теории сжимаемых жидкостей.

Эта работа вышла в свет только в 1922 г., но она посвящена вопросу, соприкасающемуся с динамической метеорологией и, при непрерывном стремлении А. А. разбираться в каждом вопросе до полного его выяснения, эта работа началась с поступления его в Павловскую Обсерваторию. Обстановка его деятельности с этого времени была обстановкой лаборатории, дающей матерьял для новых исследований и возможности опытной поверки положений, полученных путем размышлений. В А. А. внешняя оболочка человека, обслуживающего практические, имеющие однодневное значение, приложения зарождающейся науки, скрывала высокую душу исследователя вечных вопросов мироздания и благородный облик жреца чистого знания.

По существу эта вся его работа чисто математическая. Многое практически важное получено потому, что, начав с самого начала учиться отбрасывать, он этому действительно научился и делал с толком.

Связь между метеорологией и принципом относительности становится ясной: в своих самостоятельных работах по принципу относительности А. А. только занимался по существу тем-же, чем и в метеорологии — исследованием решений системы ур—ний в частных производных, с применением тех же своих методов; для этого ему пришлось попутно изучить теорию форм, что он и сделал; а сделав, прочитал курс кинематики, удивительный по своему содержанию.

Как в своей научной деятельности, совершенно точно так и в своей практической деятельности, А. А. не боялся новых вопросов, но относился к ним так же, как и к научным.

Его практическая деятельность была такова, что ее не могли не заметить все, под чье бы начальство он ни подпадал; мы знаем, что А. А. везде очень быстро поднимался до высших постов управления. Мало кому ведомый лаборант Магнитной Обсерватории в начале войны, он заведывал метеорологической съемкой целого фронта в ее середине и основывал заводы для оборудования частей, необходимых для воздухоплавания, в конце ее.

Начав в 1920 г. жизнь сначала, он в 1925 г. уже Директор Обсерватории и, мы знаем, Директор, занявший свой пост с готовым планом работы по полной реформе Обсерватории и, может быть, единственный человек, способный выполнить эту реформу.

Осуществление этой реформы взяло все время в последние месяцы А. А.; она не доведена до конца, как и почти все, начатое А. А., но им сделано уже столько, что реформа остановиться не может.

Наше Общество чрезвычайно много обязано А. А.; можно сказать, что без него не было бы и Общества — Общество возродил А. А.

Правильная деятельность Общества началась с того дня, когда А. А. сделался его секретарем. Им составлен и проведен первый новый Устав Общества. Занятый по горло, доступный только в его кабинете в Обсерватории, он находил время бывать на заседаниях Правления, взял на себя работу по рефератам в Zeitschrift, хлопотал во время поездок в Москву о журнале и собирался участвовать в его редактировании.

Нельзя еще оценить ту потерю, которую понесло Общество русских математиков и русская наука с утратой А. А.; каждый новый день еще указывает нам на новое пустое и незаполнимое место, на новые затруднения, кажущиеся неустранимыми и которые были бы легко устранены, будь среди нас А. А.; страшно думать о тех возможностях, которые таились в А. А. и которые не осуществятся из-за нелепой случайности.

Научные труды А. А. Фридмана.

1. Sur les congruences du second degré et les nombres de Bernoulli (Mathem. Annalen Bd. 62, 1905).
2. Quelques formules concernantes la théorie de la fonction (x) et les nombres de Bernoulli (Crelle's Journal, t. 135).
3. Sur la recherche des solutions particulières de l'équation de Laplace. (Сообщение Харьковского Математического О-ва. Серия 2, т. XII. № 6, 1911).
4. К теории аэроплана (Журнал Русского Физико-Химического О-ва, 1911, 8 и 9).
5. Sur la recherche des surfaces isodynamiques (Comptes Rendus, 1912).
6. Sur un probleme hydrodynamique de Bjerkness. (Сообщение Харьковского Математическ. О-ва. Серия 2, т. XII, № 6, 1913).
7. К вопросу о колебательном разряде конденсатора. (Журнал Русского Физико-Химического О-ва. 1913, вып. 5).
8. Zur Theorie der Vertikaltemperatur verteilung. (Meteor Zeitschr., 1914, H. 3).
9. Значение линий тока воздушных течений для воздухоплавания, (Техника воздухоплавания, 1914).
10. Sur la distribution de la temperature aux diverses hauteurs.
11. К вопросу о скорости звука. (Геофизический Сборник, 1915).
12. Sur les tourbillons dans un liquide à temperature variable. (Comptes-Rendus, 1915).
13. О вихрях в жидкости с меняющейся температурой. (Сообщение Харьк. Математ. О-ва, Серия 2, т. XV, 1916).
14. Конспект лекций по аэронавигации. (Г. Киев, 1916).
15. Об атмосферных вихрях. (Геофиз. Сборник, 1916).
16. Определение вертикальных течений воздуха помощью наблюдений над шарами пилотами, производимых с одного пункта. (Геофиз. Сборник, 1917).

17. К вопросу доказательства правила параллелограмма сил. (Журнал Физико-Математ. О-ва при Пермск. Гос. Университете 1918. вып. I).
18. Die Grössenordnung der Meteorologischen Elemente und ihrer raumlichen und zeitlichen Abteilungen. (Совместно с Hesselberg'ом). Veröffentlichungen des Geoph. Instituts des Universität Leipzig, 2-te Serie. Heft. 6, 1914).
19. О вертикальных течениях в атмосфере. (Журнал Физико-Математ. О-ва при Пермском Гос. Университете, вып. II, 1919).
20. О распределении температуры с высотой при наличности лучистого теплообмена земли и солнца. (Изв. Главн. Физич. Обсерватории, № 2, 1920).
21. О вертикальных и горизонтальных атмосферных вихрях. (Известия Главной Физической Обсерватории, 1921).
22. Опыт гидродинамики сжимаемой жидкости. Ленинград, 1922, 516 стр. Диссертация.
23. Идея вращающейся жидкости в атмосферных движениях. (Метеоролог. Вестник, 1921).
24. Ueber die Krümmung des Raumes. (Physicalische Zeitschrift. Bd. 10, Heft 6, 1922).
25. Атмосферные вихри и порывистость ветра (Труды Аэрод. Обсерватории в Павловске, 1922).
26. Ueber verticale Temperaturgradienten in der Atmosphäre. (Annalen der Hidrographie, 1922).
27. Sur la cinématique des Lignes de tourbillon. (Bul. de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1922).
28. Мир как пространство и время. (Ленинград. Изд. „Академия", 1923).
29. Die verticalen Strömung in der Atmosphäre. (Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, 1922, Bd. X, H. 4).
30. О движении сжимаемой жидкости. (Известия Гидрологич. Института, 1923, № 7, стр. 20).
31. Ueber eine Methode der Bestimmung der verticalen Windgeschwindigkeit. (Meteor. Zeitschr., 1924).
32. Ueber die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. (Zeitschrift für Physik, 1924).
33. Ueber Wirbelbewegung in einer kompressibilen Flüssigkeit. (Zeitschrift für angew. Mathem. und Mechanik, 1924).
34. О распространении прерывистости в сжимаемой жидкости. (Журнал Физико-Химич. О-ва, 1924).
35. О возможных конфигурациях электронов в атоме Rutherford'a. (Труды Гос. Окт. Института).
36. Основы принципа относительности. (Книга, изд. „Академия", 1924).
37. О кривизне мира. (Журнал Русского Физ.-Хим. О-ва, 1924).
38. Bericht über einige hydrodynamische Arbeiten russischen Gelehrten. (Proceendings of the Internationale Congress for Applied Mechanics, 1924).

39. Кинематика. (Литогр. курс).
40. Ueber die Geometrie der halbsimmetrischen Uebertragungen (совместно с Schouten'ом). (Mathem, Zeitschr., 1924).
41. Ueber atmosphärische Wirbel und die Turbulenz des Windes. (Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, 1924).
42. Приближенные вычисления (книга. Совместно с Я. С. Безиковичем).

Печатаются:

43. Theory of mowing singularities of the plane flow of incompressible fluid.
44. Theorie du mouvement d'un fluide compressible. (Geogr Annal.).
45. Sur le mouvement d'un fluide parfait compressible.
46. Мироздание (книга).
47. К вопросу о перемещении циклонов.
48. О причинах наводнения в Ленинграде.

О нахождении скорости по вихрю в случае жидкости, заключенной в замкнутом сосуде.

Н. М. Гюнтер.

1. Положим, имеем замкнутую область (R_t), ограниченную поверхностью (S_t), которая перемещается или нет в пространстве с течением времени t, но такова, что объем тела, ограниченного ею, остается неизменным.

Если несжимаемая жидкость заполняет область (R_t) и

$$1) \qquad u,\ v,\ w$$

составляющие скорости ее точек, а

$$2) \qquad \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$$

составляющие вихря, то в случае, когда на (S_t) вместе с условием

$$3) \qquad u \cos(Nx) + v \cos(Ny) + w \cos(Nz) = W_n,$$

в котором N—направление внешней нормали к (S_t), а W_n—проекция скорости точки на (S_t) в ее движении на нормаль в точке, соблюдено условие

$$4) \qquad \omega_1 \cos(Nx) + \omega_2 \cos(Ny) + \omega_3 \cos(Nz) = 0,$$

справедливы равенства*), первое из которых

$$5) \qquad u = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3\,d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2\,d\tau}{r}\right\} + \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

а остальные два получаются из него круговой перестановкой элементов

$$6) \qquad u,\ v,\ w; \quad \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3; \quad x,\ y,\ z.$$

*) H. v. Helmholz. Crelle's J. Bd. 55.

В равенствах (5) φ—гармоническая функция внутри области (R_t), выбранная так, чтобы на границе (S_t) было бы справедливо условие (3). При этом:

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},\quad d\tau=d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Если условие (4) не соблюдено, формулы (5) не имеют места.

Poincaré *) для случая неподвижного сосуда, не выполняя детально вычислений, предложил, в случае, когда условие (4) не соблюдено, продолжать сколь угодно мало область (R_t) во внешнюю часть пространства и заполнять присоединенную область вихрями так, чтобы при сохранении непрерывности функций (2) они на новой границе удовлетворяли бы условию (4). Appell'ем **) детально выполнены выкладки Poincaré и указано, что для функций (1) получаются формулы, зависящие от значений функций (1) на (S_t), которые не находятся в числе заданий ***).

Цель настоящей заметки показать, как найти функции (1) по функциям (2) в случае, когда условие (4) не соблюдено, пользуясь только значениями функций (2) и W_n, если (S_t) не неподвижна.

---

*) Poincaré, Theorie des Tourbillions, p. 130.

**) Appell, Traité de Mécanique Rationnelle, T. III (an 1909) § 775, p. 441.

***) Выражения Appell'я могут быть легко выведены следующим образом.

Если

$$\omega_3=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\ \omega_2=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},$$

то

$$\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}=\int\limits_{(R_t)}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{d\tau}{r}=\int\limits_{(R_t)}\left(\frac{\partial\left(v.\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial\left(u\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta}\right)d\tau-$$

$$-\int\limits_{(R_t)}\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right)d\tau=\int\limits_{(S_t)}\frac{v\cos(Nx)-u\cos(Ny)}{r}\,d\sigma+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_t)}\frac{v d\tau}{r}-\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{u d\tau}{r},$$

2. Мы будем предполагать, что поверхность (S_t) удовлетворяет следующим условиям:

a) Около всякой точки M на (S_t) можно описать, как около центра, сферу определенного радиуса d, которую мы будем называть сферой (d), таким образом, что внутри сферы ур-нию поверхности можно дать вид

$$\Phi\,(x,\ y,\ z,\ t)=0,$$

где Φ имеет непрерывные 2-е производные, при чем эти производные абсолютно меньше числа A, независящего от положения сферы (d); при этом производные первого порядка от Φ по x, y, z не обращаются одновременно в нуль.

b) Косинусы углов нормали с осями координат и W_n—непрерывные функции точки на (S_t); при этом внутри сферы (d), так как при перемещении точки поверхности (S_t) в пространстве:

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt=0,$$

мы имеем, по определению:

$$7)\qquad W_n=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}:\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}$$

откуда

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(S_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}\right\}=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S_t)}\frac{v\cos(Nx)-u\cos(Ny)}{r}d\sigma-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(S_t)}\frac{u\cos(Nx)-w\cos(Nz)}{r}d\sigma\right\}+u+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_t)}\frac{u d\tau}{r}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{v d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{w d\tau}{r}\right\};$$

$$u=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}-\int\limits_{(S_t)}\frac{v\cos(Nx)-u\cos(Ny)}{r}d\sigma\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}-\int\limits_{(S_t)}\frac{u\cos(Nz)-w\cos(Nx)}{r}d\tau\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S_t)}\frac{W_n\,d\sigma}{r}\right].$$

При $W_n=0$, это первая из формул Appell'я. Остальные две получаются круговой перестановкой над элементами (6).

c) Если Ψ один из этих косинусов или W_n, а s одна из переменных x, y, z, то можно доказать, что вследствие условий (a) и (b) комбинации производных 2-го порядка от Φ:

$$8) \qquad D_s\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial s} - \cos(Ns)\frac{d\Psi}{dn}, \quad \frac{d\Psi}{dn} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\cos(Nx) + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\cos(Ny) + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\cos(Nz)$$

непрерывные функции точки на (S_t) *).

Примечание. Если две функции Ψ и Ψ_1 принимают на (S_t) внутри (d) одинаковые значения, будучи не на (S_t), вообще говоря, различны, то на (S_t):

$$9) \qquad D_s\Psi = D_s\Psi_1$$

Действительно, из равенства значений на (S_t) функций Ψ и Ψ_1 по известной теореме Hadamard'a **):

$$\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} - \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x}}{\cos(Nx)} = \frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} - \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial y}}{\cos(Ny)} = \frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial z} - \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial z}}{\cos(Nz)} = \frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} - \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial t}}{-W_n}$$

---

*) Условие (c) равносильно предположению, что элементы кривизны поверхности (S_t) меняются непрерывно с точкой на (S_t). Нетрудно, именно, убедиться, что:

$$D_x \cos(Nx) = \frac{\cos^2(L_1x)}{R_1} + \frac{\cos^2(L_2x)}{R_2},$$

$$D_y \cos(Nx) = \frac{\cos(L_1x)\cos(L_1y)}{R_1} + \frac{\cos(L_2x)\cos(L_2y)}{R_2},$$

где R_1 и R_2—радиусы кривизны главных нормальных сечений, а L_1 и L_2 направления, касательные к этим сечениям. Из приведенных формул легко получить, что корни уравнения:

$$\begin{bmatrix} D_x\cos(Nx) - s, & D_x\cos(Ny), & D_x\cos(Nz) \\ D_y\cos(Nx), & D_y\cos(Ny) - s, & D_y\cos(Nz) \\ D_z\cos(Nx), & D_z\cos(Ny), & D_z\cos(Nz) - s \end{bmatrix} = 0$$

равны числам $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$, 0 и что корням этого уравнения соответствуют три направления: направления, касательные к главным сечениям, и направление нормали.

**) J. Hadamard. Leçons sur la propagation des ondes, Ch. II.

Обозначая через λ общее значение последних отношений, легко получаем, что

$$\frac{d\Psi}{dn}-\frac{d\Psi_1}{dn}=\lambda,\ \frac{\partial\Psi}{\partial s}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial s}=\lambda\cos(Ns),$$

откуда вытекает равенство (9).

Равенство (9) останется справедливым, если мы в (8) заменим s через t, подставляя $-W_n$ вместо $\cos(Ns)$.

Из этого примечания вытекает справедливость (*c*). Действительно, построив ограниченное число сфер (*d*), мы покрываем (S_t) кусками, имеющими общие части. $D_s\Psi$, где Ψ один из косинусов нормали с осями, переходит с одного куска на другой, от значения $D_s\Psi$ к значению $D_s\Psi_1$, не иначе, как пройдя через общую часть, а на общей части $D_s\Psi$ и $D_s\Psi_1$ равны.

Из условий (*a*) и (*b*) ясно, что поверхность (S_t) удовлетворяет известным условиям А. М. Ляпунова и что, поэтому, к ней можно приложить все, относящееся к поверхностям Ляпунова.

Во-первых, косинусы углов нормали с осями удовлетворяют некоторому условию Hölder'а (*H,1*) *); во-вторых, если радиус d сферы (*d*) достаточно мал, то существует число ω, обладающее свойством **): если прямая наклонена к нормали поверхности в точке M, центре сферы (*d*), под углом меньшим ω, то она пересекает поверхность внутри сферы только в одной точке; при этом, чем меньше d, тем ближе ω к $\frac{\pi}{2}$. Мы будем считать, что ω меньше $\frac{\pi}{3}$.

Из последнего свойства поверхности вытекает, что прямые, параллельные одной из трех координатных осей, пересекают поверхность внутри сферы (*d*), если d достаточно мал, только в одной точке.

Действительно, углы нормали с осями не могут быть все три больше $\frac{\pi}{3}$; тогда сумма квадратов их косинусов была бы

---

*) Мы говорим, что функция f удовлетворяет на (S_t) или в (R_t) условию Hölder'а (A, λ), если для любых двух точек M, M_1 на (S_t) или в (R_t) на расстоянии δ:

$$|f_M - f_{M_1}| < A\delta^\lambda$$

**) Гюнтер. Об основной задаче гидродинамики, § 2, Журнал Физической Лаборатории Р. А. Н.

меньше $^3/_4$. Значит, одна из координатных осей наклонена к нормали под углом, меньшим ω, и прямые, ей параллельные, пересекают внутри сферы (d) поверхность только в одной точке.

Из сказанного вытекает, что при всяком выборе координатных осей уравнению поверхности внутри сферы (d) можно дать один из трех видов:

10) $z = F(x, y, t)$ или $x = F(y, z, t)$ или $y = F(z, x, t)$,

где F — функция, удовлетворяющая условию (a).

В дополнение сказанному в (c) мы положим, что $D_s Cos(Nx)$..., удовлетворяют некоторому условию Hölder'a (A, λ).

3. Укажем, не доказывая их, некоторые теоремы о потенциалах, необходимые для дальнейшего и справедливые при сделанных условиях об (S_t).

Если в объемном потенциале.

11) $$V = \int_{(R_t)} \frac{\mu d\tau}{r}$$

функция μ удовлетворяет условию Hölder'a (A, λ), при чем значения μ по абсолютной величине меньше A, то функция V имеет внутри (R_t) производные 2-го порядка по x, y, z, которые по абсолютной величине меньше aA и удовлетворяют условию Hölder'a (aA, λ), где a — некоторое число, зависящее только от свойств (R_t).

Если в поверхностном потенциале

12) $$P = \int_{(S_t)} \frac{\mu d\sigma}{r}$$

функция μ удовлетворяет условию Hölder'a (D, λ), при чем значения μ по абсолютной величине меньше D, то производные первого порядка от P по x, y, z удовлетворяют условию Hölder'a (aD, λ), при чем сами производные от P абсолютно меньше aD.

При приближении точки к границе (S_t), эти производные стремятся к определенным пределам, также удовлетворяющим тому же условию Hölder'a. Здесь a—число, зависящее только от свойств (S_t).

Если функция μ такова, что в каждой сфере (d) равна значению некоторой функции, имеющей внутри сферы производные по x, y, z, абсолютно меньшие числа D и удовлетворяющие условию Hölder'a (D, λ), то на (S_t) выражения $D_x\mu$, $D_y\mu$, $D_z\mu$ непрерывны и вторые производные от P обладают свойствами, отмеченными для первых производных *).

4. Если функция f удовлетворяет условию Hölder'a (A,λ) и сама по абсолютной величине меньше A; если соблюдено условие

$$13) \qquad \int_{(S_t)} f d\sigma = 0,$$

то существует, и только одна, непрерывная гармоническая внутри (R_t) функция V, удовлетворяющая на (S_t) условию

$$14) \qquad \left(\frac{dV}{dn}\right)_i = f;$$

значек (i) указывает, что нормальная производная вычислена со стороны (R_t).

Функция V имеет внутри (R_t) производные первого порядка по x, y, z, удовлетворяющие внутри (R_t) условию Hölder'a (aA,λ) и меньшие по абсолютной величине числа aA. Здесь a некоторое число, зависящее только от свойств поверхности (S_t).

Функция V равна сумме ряда

$$15) \qquad V = -V_1 - V_2 - \ldots\ldots - V_k - \ldots\ldots\ldots,$$

в котором

$$16) \qquad V_{k+1} = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S_t)} \frac{dV_k}{dn} \cdot \frac{d\sigma}{r}, \quad V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{(S_t)} \frac{f d\sigma}{r},$$

где $\frac{dV_k}{dn}$ значение нормальной производной от V_k в точке на (S_t).

---

*) Пользуясь формулами, данными Korn'ом в Lehrbuch der Potentialtheorie на стр. 42, 46, можем писать, например,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \int_{(S_t)} (D_\xi \mu - \cos(Nx) K\mu) \frac{d\sigma}{r} + \int_{(S_t)} \mu \cos(Nx) \frac{\cos(Nr)}{r^2}\, d\sigma, \quad K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{(S_t)} \frac{\mu\cos(Nr)}{r^2}\, d\sigma = \frac{\partial}{\partial y}\int_{(S_t)} \left(D_\xi \mu \cdot \cos(Ny) - D_\eta \mu \cdot \cos(Nx)\right)\frac{d\sigma}{r} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\int_{(S_t)}\left(D_\zeta \mu \cdot \cos(Nx) - D_\xi \mu \cdot \cos(Nz)\right)\frac{d\sigma}{r}.$$

Если сверх того функция f такова, что потенциал простого слоя V_1 имеет внутри (R_t) вторые производные, удовлетворяющие условию Hölder'a $(a_1 A, \lambda)$ и сами абсолютно меньшие $a_1 A$, где a_1—некоторое число, то функция V имеет внутри (R_t) вторые производные по x, y, z, которые удовлетворяют условию Hölder'a (bA, γ), где γ меньшее из двух чисел λ и $\frac{\lambda_0^2}{2}$; здесь λ_0—число, меньшее единицы и b—число, зависящее только от свойств (S_t).

Ряд (15) в этом случае можно дважды дифференцировать.

5. В случае, когда область (R_t) многосвязная, к доказанной теореме следует сделать добавление.

Положим, что область (R_t) многосвязная. Положим, что ее можно обратить в односвязную, построив некоторые s сечений (Σ_k), $k = 1, 2, \ldots, s$.

Назовем функцию V полидромной гармонической функцией в (R_t), если она однозначная непрерывная и гармоническая в односвязной области, получаемой из (R_t) построением указанных s сечений, и если производные ее непрерывны в (R_t).

Покажем, что можно построить бесчисленное множество полидромных гармонических функций V, удовлетворяющих на границе (R_t) условию (14). Для этого мы покажем, прежде всего, что можно построить бесчисленное множество полидромных функций v, таких что на (S_t)

$$14') \qquad \left(\frac{dv}{dn}\right)_i = 0$$

Построив сечения (Σ_k) в виде частей поверхностей, пересекающих границы (R_t), продолжим каждую такую часть вне области (R_t); положим, что продолженная таким образом часть поверхности (Σ_k) ограничена кривой (Λ_k), лежащей целиком вне (R_t).

Приведем в соответствие каждому куску (Σ_k) некоторую функцию от t

$$17) \qquad C_k(t), \; k = 1, 2, \ldots \ldots s,$$

и, приписав на каждом сечении (Σ_k) некоторое направление его нормали N_k, составим сумму потенциалов двойного слоя

$$18) \qquad \theta_0 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{k=n} C_k(t) \int_{(\Sigma_k)} \frac{\cos(N_k, r)}{r^2} \, d\sigma .$$

Функция θ_0 не будет непрерывной функцией в области (R_t): при пересечении сечения (Σ_k) в направлении, противоположном направлению его нормали, функция θ_0 будет приобретать слагаемое $C_k(t)$.

Производные от θ_0 будут, однако, непрерывны; непосредственное приложение формул Korn'a *) дает, например,

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{k=s} C_k(t)\int_{(\Lambda_k)}\frac{\cos(ry)\cos(sz)-\cos(zr)\cos(sy)}{r^2}\,ds;$$

значения $\dfrac{\partial\theta_0}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\theta_0}{\partial z}$ получаются из написанного круговой перестановкой. Найденные производные непрерывны внутри (R_t) и на (S_t), вместе со всеми их производными, так как все кривые (Λ_k) лежат вне (R_t).

Вычисляем для точек на (S_t):

$$19)\qquad \left(\frac{d\theta_0}{dn}\right)_i$$

и ищем непрерывную гармоническую функцию θ, удовлетворяющую на (S_t) условию

$$20)\qquad \left(\frac{d\theta}{dn}\right)_i=\left(\frac{d\theta_0}{dn}\right)_i;$$

последнее возможно, так как

$$21)\qquad \int_{(S_t)}\left(\frac{d\theta_0}{dn}\right)_i d\sigma=0,$$

в чем не трудно убедиться, рассматривая область, ограниченную (S_t) и обеими сторонами сечений (Σ_k), для которой равенство (21) очевидно справедливо, и, замечая, что интегралы, взятые по разным сторонам некоторого сечения (Σ_k), сокращаются.

Так как функция (19), вследствие свойств (S_t), имеет во всякой сфере (d) производные, которые ограничены, и выражения

*) A. Korn. l. c.

$D_s\left(\frac{d\theta_0}{dn}\right)_i$ непрерывны на (S_t) *), функция θ имеет вторые производные, удовлетворяющие некоторому условию Hölder'a.

Положив теперь

22) $$v = \theta_0 - \theta,$$

из (20) заключаем, что v удовлетворяет (14′) и, когда точка пересекает сечение (Σ_k) в направлении, противоположном N_k, приобретает слагаемое $C_k(t)$.

Заметим, что функция v вполне определена выбором сечений (Σ_k) и функции $C_k(t)$.

Для разности w двух таких функций, вследствие ее непрерывности, из (14′) мы заключили-бы, что

$$\int\limits_{(R_t)} \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau = \int\limits_{(S_t)} w \left(\frac{dw}{dn}\right)_i d\sigma = 0,$$

т. е., что w—постоянная внутри (R_t); отсюда ясно, что выбор кривых (Δ_k) не имеет значения.

Если V—непрерывная гармоническая внутри (R_t) функция, удовлетворяющая условию (14) и найденная по правилу параграфа 4, то все функции $V+v$, отличающиеся одна от другой выбором функций (17), также удовлетворяют условию (14).

6. Если соблюдено условие (13) и

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots\ V_k,\ \ldots\ldots$$

функции (16), определенные в параграфе 4 и

23) $$\vartheta = V_1 - V_2 + V_3 - \ldots. \qquad ,$$

то внутри (R_t):

24) $$W = \int\limits_{(S_t)} \frac{\vartheta \cos(Nr)}{r^2}\, d\sigma + \int\limits_{(S_t)} \frac{f d\sigma}{r} = 0.$$

Функция W вне (R_t) решает внешнюю задачу Неймана при условии на (S_t):

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_e = -f.$$

---

*) $$D_s\left(\frac{d\theta_0}{dn}\right)_i = D_s\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial x}\right)\cos(Nx) + D_s\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial y}\right)\cos(Ny) + D_s\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\right)\cos(Nz) + \frac{\partial\theta_0}{\partial x} D_s\cos(Nx) + \frac{\partial\theta_0}{\partial y} D_s\cos(Ny) + \frac{\partial\theta_0}{\partial z} D_s\cos(Nz).$$

Сказанное в этом параграфе решает задачу преобразования потенциала простого слоя внутри (R_t) в потенциал двойного слоя.

7. Переходя теперь к решению задачи, поставленной в параграфе 1, положим, что даны функции

$$2)\qquad \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,$$

непрерывные внутри (R_t) и на (S_t), как функции от t и от x, y, z, каждая из которых удовлетворяет условию Hölder'a (A, λ) и сама по абсолютной величине меньше A.

Кроме того, предположим, что функции (2) удовлетворяют следующему условию: какова-бы ни была область внутри (R_t), ограниченная поверхностью (σ):

$$(25)\qquad \int\limits_{(\sigma)}\Big(\omega_1 \cos(Nx)+\omega_2 \cos(Ny)+\omega_3 \cos(Nz)\Big)\, d\sigma=0,$$

где N—внешняя нормаль к поверхности (σ).

В частности, справедливо условие

$$25')\qquad \int\limits_{(S_t)}\Big(\omega_1 \cos(Nx)+\omega_2 \cos(Ny)+\omega_3 \cos(Nz)\Big)\, d\sigma=0.$$

Примечание. Если-бы функции (2) имели непрерывные производные первого порядка по x, y, z, то условие (25) было-бы равносильно следующему: внутри (R_t):

$$25\,^*)\qquad \frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}=0.$$

Составим потенциал простого слоя

$$26)\qquad \int\limits_{(S_t)}\frac{\omega_1 \cos(Nx)+\omega_2 \cos(Ny)+\omega_3 \cos(Nz)}{r}\, d\sigma$$

и, пользуясь сказанным в параграфе 6, обратив внимание на равенство (25′), преобразуем его для точек внутри (R_t) в потенциал двойного слоя, установив равенство:

$$27)\qquad \int\limits_{(S_t)}\vartheta\,\frac{\cos\ (Nr)}{r^2}\, d\sigma=\int\limits_{(S_t)}\Big(\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)\Big)\,\frac{d\sigma_2}{r}$$

Функция ϑ имеет производные по x, y, z, удовлетворяющие условию Hölder'a (aA, λ) внутри (R_t); эти производные стремятся к определенным пределам, когда точка извнутри (R_t)

приближается к (S_t) и эти пределы на (S_t) удовлетворяют тому же условию Hölder'а, если число a, зависящее только от свойств (S_t), выбрано подобающим образом.

Определим затем гармоническую функцию φ, непрерывную внутри (R_t) или полидромную, если (R_t) многосвязная область, так, чтобы ее нормальная производная $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i$ была-бы на (S_t) равна f, где, обозначая через W_n функцию, введенную в параграфе 1:

$$28)\ f = W_n - \frac{1}{4\pi}\left\{L_1 \cos(Nx) + L_2 \cos(Ny) + L_3 \cos(Nz)\right\}$$

и

$$29)\qquad L_1 = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)} \frac{\omega_3 d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)} \frac{\omega_2 d\tau}{r} +$$

$$+ \int\limits_{(S_t)} \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\cos(Nz) - \frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\cos(Ny)\right)\frac{d\sigma}{r},$$

а L_2 и L_3 получаются из L_1 круговою перестановкой элементов

$$6')\qquad \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3;\ x,\ y,\ z;\ \xi,\ \eta,\ \zeta.$$

Примечание. Функция ϑ, найденная нами как потенциал простого слоя, при переходе через (S_t) меняется непрерывно. Вследствие этого, разности

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_e - \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_i,\quad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_e - \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_i,\quad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_e - \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_i$$

пропорциональны $\cos(Nx)$, $\cos(Ny)$, $\cos(Nz)$ и мы можем вычислять производные от ϑ в (29) как со стороны (R_t), так и со стороны внешней для (R_t), не меняя формул (29).

Вследствие сказанного о функциях (2) и функции ϑ, функции (29) на основании теорем параграфа 3 имеют внутри (R_t) производные первого порядка, удовлетворяющие условию Hölder'а (A', λ), где $A' = bA$ и b—некоторое число, зависящее только от свойств (R_t); при этом эти производные по абсолютной величине меньше A и имеют определенные пределы, когда точка стремится к (S_t), удовлетворяющие тому-же условию Hölder'а.

Приняв во внимание сказанное о функции W_n в условии (c) параграфа 2 и сказанное в параграфе 3, заключаем, что

30) $$\int\limits_{(S_t)} \frac{f d\sigma}{r}$$

имеет внутри (R_t) производные второго порядка, удовлетворяющие условию Hölder'a (A'', λ), где A''—число вида $aH + Ac'$ и a и c зависят только от свойств (S_t).

Далее соблюдено условие

31) $$\int\limits_{(S_t)} f d\sigma = 0.$$

Действительно, равенство

$$\int\limits_{(S_t)} W_n d\sigma = 0$$

является следствием предположения, по которому объем области, ограниченной (S_t), не меняется *); так как L_1, L_2, L_3 имеют производные:

$$\int\limits_{(R_t)} \Big(L_1 \cos(Nx) + L_2 \cos(Ny) + L_3 \cos(Nz)\Big) d\sigma =$$

$$= \int\limits_{(R_t)} \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial L_3}{\partial z}\right) d\tau.$$

Обращая внимание на состав функций (29), видим, что для доказательства равенства (31) достаточно установить справедливость внутри (R_t) тождества:

32) $$T = \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{(S_t)} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \cos(Nz) - \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \cos(Ny)\right) \frac{d\sigma}{r} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{(S_t)} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \cos(Nx) - \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \cos(Nz)\right) \frac{d\sigma}{r} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{(S_t)} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \cos(Ny) - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \cos(Nx)\right) \frac{d\sigma}{r} = 0$$

---

*) См., например, C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen 1883, § 19, Seite 67.

Для доказательства последнего тождества, которое есть простое следствие формулы Стокса в случае, когда функция ϑ имеет 2-е производные, замечаем прежде всего, что T непрерывная функция во всем пространстве; действительно, при переходе границы, T испытывает разрыв непрерывности, равный:

$$4\pi\left\{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cos(Nz)-\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\cos(Ny)\right)\cos(Nx)+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\cos(Nx)-\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cos(Nz)\right)\cos(Ny)+$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cos(Ny)-\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cos(Nx)\right)\cos(Nz)\right\}=0.$$

Далее замечаем, что в бесконечно удаленной точке

$$T=0.$$

Рассматривая потенциал двойного слоя

$$\int\limits_{(S_t)}\frac{\vartheta\cos(Nr)}{r^2}\,d\sigma,$$

и применяя формулы Korn'а *) видим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S_t)}\frac{\vartheta\cos(Nr)}{r^2}\,d\sigma=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\cos(Ny)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\cos(Nx)\right)\frac{d\sigma}{r}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\cos(Nx)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\cos(Nz)\right)\frac{d\sigma}{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S_t)}\frac{\vartheta\cos(Nr)}{r^2}\,d\sigma=\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\cos(Nz)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\cos(Ny)\right)\frac{d\sigma}{r}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\cos(Ny)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\cos(Nx)\right)\frac{d\sigma}{r}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(S_t)}\frac{\vartheta\cos(Nr)}{r^2}\,d\sigma=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\cos(Nx)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\cos(Nz)\right)\frac{d\sigma}{r}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\cos(Nz)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\cos(Ny)\right)\frac{d\sigma}{r},$$

---

*) A. Korn l. c. Если производные от μ непрерывны на (S_t), можно писать в выноске к § 3:

$$D_\xi\,\mu\cos(Ny)-D_\eta\,\mu\cos(Nx)=\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\cos(Ny)-\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\cos(Nx),\ldots$$

причем формулы (33) справедливы как для точек внутри, так и для точек вне (R_t).

Исключая из левых частей равенств (33) потенциал двойного слоя, дифференцируя, например, последнее уравнение по y и вычитая из результата производную от предпоследнего по z и поступая так далее, легко получаем, что и внутри и вне (R_t):

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \frac{\partial T}{\partial y}=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=0.$$

Следовательно, T постоянная и внутри и вне (R_t), а так как T непрерывна во всем пространстве и на бесконечности равна нулю, то

$$T=0.$$

Из доказанного вытекает, на основании сказанного в параграфе 4-м, что существует непрерывная в (R_t) гармоническая функция ψ, удовлетворяющая на (S_t) условию:

$$\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_i=f.$$

Прибавляя к ней, в случае, если (R_t) многосвязная область, произвольную полидромную в (R_t) гармоническую функцию v, найденную по правилу параграфа 5-го, и полагая в этом случае $\varphi=\psi+v$, в случае же односвязной области $\varphi=\psi$, мы получим искомую функцию φ, такую, что на (S_t)

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i=f. \tag{34}$$

Из сказанного в параграфе 4-м на основании доказанного о (31) вытекает, что φ имеет внутри (R_t) ограниченные вторые производные, удовлетворяющие некоторому условию Hölder'a.

8. Составим теперь функции

$$u=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\cos(Nz)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\cos(Ny)\right)\frac{d\sigma}{r}\right\}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}L_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$v=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}-\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}+\right. \tag{35}$$

$$+\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\cos(Nx)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\cos(Nz)\right)\frac{d\sigma}{r}\Bigg\}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{4\pi}L_2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$w=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}-\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\right.$$

$$+\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\cos(Ny)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\cos(Nx)\right)\frac{d\sigma}{r}\Bigg\}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}L_3+\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Вследствие доказанного о функциях L_1, L_2, L_3 и φ, функции (35) имеют внутри (R_t) ограниченные производные первого порядка, удовлетворяющие некоторому условию Hölder'a.

Вследствие (34) и (28):

$$36)\qquad u\cos(Nx)+v\cos(Ny)+w\cos^{*}(Nz)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\Big(L_1\cos(Nx)+L_2\cos(Ny)+L_3\cos(Nz)\Big)+\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i=W_n,$$

то есть функции (35) удовлетворяют на (S_t) условию (3).

На основании доказанного о T,

$$37)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

то есть функции (35) удовлетворяют условию несжимаемости.

Мы докажем, наконец, что

$$38)\quad \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\omega_1,\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\omega_2,\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\omega_3;$$

этим будет установлено, что формулы (35) решают поставленную нами задачу.

Примечание. В случае, когда условие (4) соблюдено, равенство (27) дает для ϑ значение нуль, и формулы (35) обращаются в формулы (5).

Доказывая справедливость равенств (38), мы ограничимся доказательством первого из них; круговая перестановка над элементами (6) обращает формулы, соответствующие первому равенству (38), в формулы, соответствующие остальным.

Итак, вычисляем по формулам (35):

$$4\pi\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial s}\right).$$

Выполняя действия, видим, что в результате их φ пропадает.

Результат действия над предпоследними слагаемыми формул (35), вследствие (27) и (33), равен:

$$39) \quad \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\cos(Ny)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\cos(Nx)\right)\frac{d\sigma}{r}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\cos(Nx)-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\cos(Nz)\right)\frac{d\sigma}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S_t)}\frac{\vartheta\cos(Nr)}{r^2}\,d\sigma=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S_t)}\frac{\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)}{r}\,d\sigma.$$

Рассмотрим результат действия над первыми двумя слагаемыми.

Выполняя выкладки, получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}\right\}-$$

$$-\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}\right\}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}\right\}+4\pi\omega_1.$$

Для доказательства справедливости первого из равенств (38) остается установить тождество:

$$40) \quad \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 a\tau}{r}+$$

$$+\int\limits_{(S_t)}\frac{\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)}{r}\,d\sigma=0.$$

Приступая к этому доказательству, прежде всего заметим, что это тождество справедливо, если функции ω_1, ω_2, ω_3 имеют производные.

В этом случае, как мы указали, условие (25) равносильно условию (25').

Заметив это, пишем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}=$$

$$=\int\limits_{(R_t)}\left\{\omega_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\right\}d\tau=-\int\limits_{(R_t)}\left\{\omega_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+\right.$$

$$\left.+\omega_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+\omega_3\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right\}d\tau=-\int\limits_{(R_t)}\left(\frac{\partial\frac{\omega_1}{r}}{\partial\xi}+\frac{\partial\frac{\omega_2}{r}}{\partial\eta}+\frac{\partial\frac{\omega_3}{r}}{\partial\zeta}\right)d\tau+$$

$$+\int\limits_{(R_t)}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}+\frac{\partial\omega_2}{\partial\eta}+\frac{\partial\omega_3}{\partial\zeta}\right)\frac{d\tau}{r}=$$

$$=-\int\limits_{(S_t)}\frac{\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)}{r}d\sigma.$$

Применение теоремы Грина, при выводе последнего тождества, законно, так как интеграл

$$\int\limits_{(\sigma)}\frac{\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)}{r}d\sigma,$$

взятый по сфере (σ) с центром в точке (x, y, z), бесконечно мал с радиусом сферы. Далее заметим, что если мы разобьем область (R_t) на части и докажем тождество (40) для каждой части, то можно будет утверждать, что тождество справедливо для области (R_t). Действительно, складывая равенства (40), доказанные для отдельных частей, мы получим равенство (40), так как поверхностные интегралы, распространенные по частям границ областей, расположенных внутри (R_t), сократятся.

Докажем теперь, что тождество (40) справедливо для всякой области (R), расположенной внутри (R_t), границы которой удалены от (S_t) не менее чем на η, где η—число, которое можно брать как угодно малым.

Положим (R) такая область, (S)—ее граница. Введем функции В. А. Стеклова *):

$$\Omega_i = \frac{1}{h^3}\int\limits_x^{x+h} dx_1 \int\limits_y^{y+h} dy_1 \int\limits_z^{z+h} dz_1\, \omega_i(x_1, y_1, z_1, t), \quad i=1,2,3,$$

выбирая h настолько малым, чтобы сфера радиуса $h\sqrt{3}$ с центром в (x, y, z) лежала внутри (R_t), если точка (x, y, z) лежит в (R).

Так как

$$|\omega_i(x_1, y_1, z_1, t) - \omega_i(x, y, z, t)| < A\delta^\lambda, \; i=1,2,3,$$

где δ—расстояние между точками (x_1, y_1, z_1) и (x, y, z), которое меньше расстояния между точками (x, y, z) и $(x+h, y+h, z+h)$, можно взять h вдобавок настолько малым, чтобы разности

$$|\omega_i(x_1, y_1, z_1, t) - \omega_i(x, y, z, t)|, \qquad i=1,2,3$$

были меньше наперед заданного числа ε.

Мы будем иметь:

41) $$|\Omega_i - \omega_i| < \varepsilon, \qquad i=1,2,3.$$

Функции $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ имеют производные внутри (R_t); при этом:

42) $$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{h^3}\Bigg\{\int\limits_y^{y+h} dy_1 \int\limits_z^{z+h} dz_1 \,[\omega_1(x+h, y_1, z_1) - \omega(x, y_1, z_1, t)] +$$

$$+ \int\limits_x^{x+h} dx_1 \int\limits_z^{z+h} dz_1 \,[\omega_2(x_1, y+h, z_1, t) - \omega_2(x_1, y_1, z_1, t)] +$$

$$+ \int\limits_x^{x+h} dx_1 \int\limits_y^{y+h} dy_1 \,[\omega_3, (x_1, y_1, z+h, t) - \omega_3(x_1, y_1, z, t)]\Bigg\}.$$

---

*) См. Гюнтер. „О действиях над функциями, неимеющими производных“ И Р. А. Н. 1925.

Сумма интегралов, стоящих в последней скобке, равна интегралу

$$43) \qquad \int [\omega_1 \cos(Nx) + \omega_2 \cos(Ny) + \omega_3 \cos(Nz)]\, d\sigma,$$

взятому по поверхности куба, ребра которого параллельны осям координат и две вершины которого в точках (x, y, z) и $(x+h, y+h, z+h)$; значит интеграл (43) равен нулю на основании (25).

Вследствие этого,

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, по первой части доказательства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R)} \frac{\Omega_1 d\tau}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R)} \frac{\Omega_2 d\tau}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R)} \frac{\Omega_3 d\tau}{r} +$$

$$+ \int\limits_{(S)} \frac{\Omega_1 \cos(Nx) + \Omega_2 \cos(Ny) + \Omega_3 \cos(Nz)}{r}\, d\sigma = 0.$$

Отсюда на основании (41) заключаем, что:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R)} \frac{\omega_1 d\tau}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R)} \frac{\omega_2 d\tau}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R)} \frac{\omega_3 d\tau}{r} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(S)} \frac{\omega_1 \cos(Nx) + \omega_2 \cos(Ny) + \omega_3 \cos(Nz)}{r}\, d\sigma \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R)} \frac{\omega_1 - \Omega_1}{r}\, d\tau + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R)} \frac{\omega_2 - \Omega_2}{r}\, d\tau + \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R)} \frac{\omega_3 - \Omega_3}{r}\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(S)} \frac{(\omega_1 - \Omega_1)\cos(Nx) + (\omega_2 - \Omega_2)\cos(Ny) + (\omega_3 - \Omega_3)\cos(Nz)}{r}\, d\sigma \right| < \alpha\varepsilon.$$

где α—некоторое определенное число, не зависящее от ε.

Вследствие произвольности ε из последнего неравенства заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}+$$

$$+\int\limits_{(S)}\frac{\omega_1 \cos(Nx)+\omega_2 \cos(Ny)+\omega_3 \cos(Nz)}{r}\,d\sigma=0,$$

т. е., что тождество (40) для области (R) действительно справедливо.

Остается доказать тождество (40) для областей, прилегающих к (S_t).

Построим куб с ребрами, параллельными координатным осям, так, чтобы он заключал внутри область (R_t). Этот куб разобьем на более мелкие, выбранные так, чтобы их диагонали были меньше d, радиуса сфер (d).

Область (R_t) окажется разбитой на более мелкие: некоторые из них—части кубов—будут иметь общие точки с (S_t); другие—кубы—будут целиком находиться внутри (R_t); для них тождество (40) справедливо.

Внутри каждого из кубов первой категории уравнение (S_t) будет иметь один из 3 видов (10). Чтобы на чем нибудь остановиться, положим, что мы имеем дело с первым видом; рассмотрение остальных случаев сводится к первому временным переименованием осей.

Итак уравнение (S_t) внутри куба:

$$z=F(x,\ y,\ t). \tag{44}$$

Считая, что η сколь угодно мало, рассмотрим часть поверхности

$$z-\eta=F(x,\ y,\ t), \tag{44'}$$

расположенную внутри куба, считая знак η выбранным так, что точки поверхности внутри куба внутри (R_t).

Положим (R)—область внутри куба, принадлежащая (R_t), (S)—ее полная поверхность; (R_1)—часть области (R), ограниченная поверхностью (44′), (S_1)—ее полная поверхность.

Мы имеем:

$$45)\quad \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}+$$

$$+\int\limits_{(S)}\frac{\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)}{r}\,d\sigma=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R_1)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R_1)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R_1)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}+$$

$$+\int\limits_{(S_1)}\frac{\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)}{r}\,d\sigma+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R-R_1)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R-R_1)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R-R_1)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}+$$

$$+\int\limits_{(S_0)}\frac{\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)}{r}\,d\sigma,$$

где знаком $(R-R_1)$ обозначена область, получаемая из (R) отнятием (R_1), (S_0) ее полная поверхность и нормали везде направлены во внешнюю часть рассматриваемых областей.

Для области (R_1) тождество (40) справедливо, так как эта область не имеет общих точек с (S_t); следовательно, в правой части (45) сумма первых двух строк равна нулю; что же касается остальных строк, то, так как в соответствующих точках поверхностей (44) и (44') нормали параллельны, а ω_1, ω_2, ω_3 отличаются на числа вида $a\eta^{\lambda}$, где a от η не зависит, поверхностные же интегралы, взятые по бесконечно малым боковым площадкам куба, составляющим часть (S_0), равно как и объемные интегралы, взятые по бесконечно малому объему $(R-R_1)$, бесконечно малы, вследствие ограниченности функций ω_1, ω_2, ω_3, ясно, что вторая строка в (45) бесконечно мала вместе с η.

Отсюда ясно, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_1 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_2 d\tau}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(R)}\frac{\omega_3 d\tau}{r}+$$

$$+\int\limits_{(S)}\frac{\omega_1\cos(Nx)+\omega_2\cos(Ny)+\omega_3\cos(Nz)}{r}\,d\sigma=0.$$

Из всего сказанного ясно, что тождество (40) справедливо, а значит справедливы и равенства (38), что и требовалось доказать.

9. Решив таким образом задачу, поставленную в параграфе 1, заметим в заключение, что для того, чтобы формулы (35) могли привести к решению уравнений гидродинамики, первое из которых

$$46) \quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\frac{\partial F}{\partial x},$$

где ρ—постоянная плотность, p—давление, F—потенциал сил, а остальные получаются из него круговою перестановкой элементов (6), должны быть соблюдены условия:

1) функции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, выраженные через q_1, q_2, q_3, где q_1, q_2, q_3 начальные, при $t=0$, значения x, y, z, найденные из системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=u, \quad \frac{dy}{dt}=v, \quad \frac{dz}{dt}=w$$

должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца, первое из которых

$$47) \quad \frac{d\omega_1}{dt}=\omega_1\frac{\partial u}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial u}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial u}{\partial z},$$

а остальные получаются круговой перестановкой элементов (6); здесь $\frac{d\omega_i}{dt}$ означают производные от ω_i по t, выраженные через q_1, q_2, q_3, t *);

2) давление p должно быть непрерывной функцией в (R_t).

Легко показать, что при соблюдении условий (47), если функции u, v, w, выраженные через q_1, q_2, q_3, имеют производные по t, а эти последние производные по q_1, q_2, q_3, выражение

$$48) \quad \frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz \quad .$$

---

*) Если жидкость находится под действием сил, не имеющих потенциала, составляющие которых X, Y, Z, то уравнения (47) должны быть заменены уравнениями, первое из которых:

$$\frac{d\omega_1}{dt}=\omega_1\frac{\partial u}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial u}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z};$$

в остальном, все сказанное в этом параграфе относится и к этому случаю при чем, конечно, выражение (48) должно быть заменено следующим:

$$\left(\frac{du}{dt}-X\right)dx+\left(\frac{dv}{dt}-Y\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}-Z\right)dz.$$

полный дифференциал, интегрирование которого дает $-\frac{1}{\rho}p+F$, т. е.. так как F следует считать данным, ρ. Если область (R_t) односвязная, то ρ всегда непрерывная функция в (R_t), но если область многосвязная, то ρ, когда ω_1, ω_2, ω_3 не выбраны подобающим образом, может оказаться полидромной функцией; заметим, что в этом случае и F может быть любой полидромной функцией.

Мы покажем в другом месте, подчинив (S_t) новому ограничению *), что всегда можно найти функции ω_1, ω_2, ω_3 по их значениям при $t=0$ так, чтобы вместе с уравнениями (35) были-бы соблюдены и уравнения (47) и чтобы, в случае многосвязной области (R_t), давление p было-бы непрерывным; для этого придется в формулах (35) подобающим образом выбирать функции C_k (t) параграфа 5, при чем окажутся определенными только их производные по t, начальные же их значения останутся в нашем распоряжении.

Таким образом, мы увидим, что задача определения движения жидкости в данном перемещающемся сосуде по начальным значениям составляющих вихря определена только для случая односвязного сосуда; в случае многосвязного сосуда связности $s+1$ ее решение зависит еще от s произвольных постоянных. Если даны начальные значения скоростей частиц, то задача во всех случаях определена.

Sur la détermination de la vitesse en fonction de tourbillion dans le cas d'un liquide contenu dans un vase.

N. Gunther.

Un domaine (D_t) est limité par une surface (S_t), qui se deplace et, eventuellement, se déforme, mais de manière, que le volume (D_t) reste invariable. Supposons, que les élements, qui

*) Предположив, именно, что выражения

$$D_{s_2}(D_{s_1}\Psi),$$

в которых Ψ—любой из конусов нормали с координатными осями, или W_n, а s_1 и s_2 выбраны из x, y, z, t, непрерывны на (S_t).

definissent la coubrure de (S_t), sont regulièrement continus sur (S_t); soit W_n la projection de la vitesse d'un point M de (S_t) sur la normale en M à (S_t).

Supposons, que les composantes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ d'un vecteur Ω sont regulièrement continues dans l'intérieur de (D_t) et sur (S_t) et vérifient la condition: quelque soit la surface (σ) dans l'intérieur de (D_t), on a, si N est la normale à (σ):

$$\int_{(\sigma)} \Big(\omega_1 \cos(Nx) + \omega_2 \cos(Ny) + \omega_3 \cos(Nz)\Big)\, d\sigma = 0.$$

Les formules (35), dans lesquelles u, v, w sont les composantes d'un vecteur V et où ϑ est une fonction harmonique, vérifiant la condition

$$\int_{(S_t)} \frac{\omega_1 \cos(Nx) + \omega_2 \cos(Ny) + \omega_3 \cos(Nz)}{r}\, d\sigma =$$

$$= \int_{(S_t)} \frac{\vartheta \cos(rN)}{r^3}\, d\sigma, \text{ dans } (D_t),$$

forment la solution la plus générale de l'équation Rot $V = \Omega$.

Si la fonction φ dans (35) est harmonique dans (D_t), continue ou polydrome, quand (D_t) est à connexion multiple, on a: div. $V = 0$.

On peut toujours trouver une telle fonction harmonique φ, qu'on âit

$$u \cos(Nx) + v \cos(Ny) + w \cos(Nz) = W_n, \text{ sur } (S_t).$$

Dans ce cas les équations (35) sont propres à donner les expression des composantes de la vitesse par les composantes du tourbillon dans un mouvement d'un liquide remplissant (D_t).

О двух сравнениях.

И. И. Иванов.

В настоящей заметке мы намерены рассмотреть два следующих сравнения:

(1) $$x^m \equiv a \ (\text{Мод. } p),$$

(2) $$x^3 + a_1 x + a_2 \equiv 0 \ (\text{Мод. } \rho).$$

В первом сравнении предполагается, что a не делится на p, само простое число p имеет форму

$$2mn - 1$$

и число m—нечетное. Второе сравнение рассматривается в предположении, что ρ—простое число формы $6m - 1$ и что a_1 и a_2 на p не делятся. Что касается первого сравнения, то оно имеет, очевидно, только одно решение и это решение легко определяется. Оно будет равно a^n, если a—квадратичный вычет числа p, и равно $-a^n$, если a—неквадратичный вычет, так как в первом случае

$$a^{mn-1} \equiv 1 \ (\text{Мод. } p),$$

и, следовательно,

$$(a^n)^m \equiv a \ (\text{Мод. } p),$$

а во втором

$$a^{mn-1} \equiv -1 \ (\text{Мод. } p),$$

и следовательно,

$$(-a^n)^m \equiv a \ (\text{Мод. } p).$$

Переходим к сравнению (2). Определяя числа a и b из условий

$$3a \equiv a_1 \ (\text{Мод. } p),$$

$$2b \equiv a_2 \ (\text{Мод. } \rho),$$

мы сравнение (2) представим в следующем виде:

$$x^3 + 3ax + 2b \equiv 0 \ (\text{Мод. } \rho).$$

Вместо x вводим два неизвестных числа t и v, полагая, что

$$x \equiv t + v \text{ (Мод. } p).$$

Наше сравнение заменится следующим:

(3) $$t^3 + v^3 + 3(tv + a) + 2b \equiv 0 \text{ (Мод. } p).$$

Для определения чисел t и v ставим условие

$$tv \equiv -a \text{ (Мод. } p)$$

и значит

(4) $$t^3v^3 \equiv -a^3 \text{ (Мод. } p).$$

Сравнение (3) тогда принимает следующий вид:

(5) $$t^3 + v^3 \equiv -2b \text{ (Мод. } p).$$

На основании сравнений (4) и (5) мы заключаем, что числа t^3 и v^3 будут решениями такого сравнения второй степени:

$$y + 2by - a^3 \equiv 0 \text{ (Мод. } p)$$

или, что то же,

(6) $$(y + b)^2 \equiv a^3 + b^2 \text{ (Мод. } p).$$

Ограничиваемся в дальнейшем предположением, что число

$$a^3 + b^2$$

квадратичный вычет числа p. В этом случае, обозначая через y_1 и y_2 два различных решения сравнения (6), мы должны числа t и v определить из сравнений

$$t^3 \equiv y_1 \text{ (Мод. } p), \qquad v^3 \equiv y_2 \text{ (Мод. } p).$$

Каждое из последних сравнений при простом модуле p формы $6m - 1$ имеет на основании сказанного о сравнении (1) по одному решению. Таким образом, решение сравнения (2) нами приведено к решению сравнения (6) второй степени.

В случае простого числа p формы $12m + 11$, при условии

$$\left(\frac{a^3 + b^2}{p}\right) = 1,$$

данное сравнение (2) может быть решено и без помощи таблиц индексов, так как в этом случае, как известно, решения сравнения (6) легко определяются.

В заключение заметим, что в рассматриваемом случае дискриминант сравнения

$$z^3 + 3az + 4b \equiv 0 \text{ (Мод. } p),$$

равный

$$-4 \cdot 3^3 (a^3 + b^2),$$

будет, очевидно, неквадратичный вычет для простого числа p и значит, как это вытекает из теоремы Г. Ф. Вороного, сравнение (2) имеет только одно решение.

Ueber zwei Kongruenzen.

I. Ivanov.

In dieser Note betrachten wir die nächstfolgenden Kongruenzen.

(1) $$x^m \equiv a \ (\text{Mod. } p),$$

(2) $$x^3 + a_1 x + a_2 \equiv 0 \ (\text{Mod. } p).$$

In der ersten Kongruenz nehmen wir an, dass a durch p nicht teilbar ist und die Primzahl p die Form $2\,mn-1$ hat, wobei unter m eine ungerade Zahl zu verstehen ist. Die zweite Kongruenz wird in der Annahme betrachtet, dass p eine Primzahl von der Form $2\,mn-1$ ist und die Koeffizienten a_1, a_2 durch p nicht teilbar sind.

Wie leicht zu beweisen ist, besitzt die Kongruenz (1) eine Lösung, welche gleich a^n ist, wenn a ein quadratischer Rest modulo p ist, und gleich $-a^n$, wenn a ein nichtquadratischer Rest modulo p ist.

Was die Kongruenz (2) anbetrifft, so gelingt es mit Hilfe geeigneter Substitutionen ihre Lösung auf die einer quadratischen Kongruenz von der Form

$$(y+b)^2 \equiv a^3 + b^2 \ (\text{Mod. } p)$$

zurückzuführen. Dabei kann man die Anwendung der Indextabelle in dem Falle vermeiden, wenn p eine Primzahl von der Form $12m+11$ ist und die Bedingung.

$$\left(\frac{a^3+b^2}{p}\right) = 1$$

erfüllt wird.

Решение задачи эквивалентности и табуляризация кубических двойничных форм отрицательного определителя.

Б. Н. Делоне.

В моих работах по теории неопределенных уравнений 3-й степени с двумя неизвестными [см. 1) Сообщ. Харьк. Мат. Общ. за 1915 и 1916 г., 2) C. R. 1916 г., 3) C. R. 1920 г., 4) C. R. 1921 г., 5) Известия Росс. Академии Наук за 1922 г., 6) C. R. 1924 г., 7) C. R. 1925 г.] я нуждался в разных вспомогательных исследованиях. Сводка всех моих работ над кубическими неопределенными уравнениями содержалась в моей большой рукописной диссертации 1921 г. В указанных печатных статьях я поместил лишь результаты, непосредственно относящиеся к вопросу о представлении чисел, вспомогательные же исследования до сих пор не напечатаны. Я хочу воспользоваться возникновением журнала Общества, чтобы постепенно восполнить этот пробел.

В случае квадратичных двойничных форм, а также и тройничных, вопрос о представлении чисел является уже решенным, коль скоро дан способ узнавать, эквивалентны ли две заданные, формы и, если это так, находить переходную подстановку. В случае кубических двойничных форм, равно как, тем более, двойничных форм более высоких порядков, дело не обстоит так. Тем не менее, и тут решение задачи эквивалентности является необходимым, так как без этого невозможна табуляризация форм. В настоящей заметке, в § 1, 2 и 3, я даю новое решение задачи эквивалентности для кубических двойничных форм. Любопытно, что это решение не основано на теории приведения, это, впрочем, как легко видеть, имеет место для любых двойничных форм, порядок которых выше двух. В § 4 я рассматриваю связь между кубическими двойничными формами и кубическими „порядками“ (Ordnung по Dedekind'y, Ring по Hilbert'y, anneau по французски). В §§ 5, 6, 7, 8 и 9 я даю новый способ для вычисления таблицы кубических двойничных форм отрицательного определителя и, в заключение, прилагаю такую таблицу. Надо заметить, что вопрос о классификации форм положительного определителя был впервые разработан Eisenstein-ом (Crelle, T 28) и затем особенно тщательно Arndt-ом (Arch. fur Math. und Phys. 1851, 1856, 1858), который и вычислил таблицу таких форм для всех $D < 2000$. Что же касается случая отрицательного определителя, то он представил больше трудностей. Hermite в заметке „Sur la reduction des formes cubiques a deux indeterminées" (C. R. 1859, Oeuvres II, стр. 93), говоря о работах Arndt'a замечает: „....il serait bien à desirer que les formes à determinants positifs (по нашему обозначению с $D < 0$) devinssent l'object d'un pareil travail. Mais elles semblent présenter dans leur nature quelque chause de plus complexe;...". В настоящей заметке дается решение вопроса для этого случах. Я уже кончал вычислять таблицу форм с $D < 0$ для всех $|D| \leqq 768$, когда я узнал, что вопрос этот иным способом был решен уже несколько раньше Berwick-ом и Matherus-ом (Proceedings of the Sud. Math. Soc. Vol. 10; 1911—1912). Я, тем не менее, придаю значение методе, изложенной в § 5—9, так как она ставит вопрос в связь с теорией кубических областей.

Было бы интересно продолжить такое исследование для областей 4-го, 5-го и высших порядков, так как и неравенства Hermite'a и неравенства Minkowski не дают точного нижнего предела для величин дискриминантов алгебраических областей, а было бы интересно, по крайней мере хоть для первого десятка порядков областей, иметь эти наименьшие дискриминанты.

1. Решение задачи эквивалентности. Пусть даны две кубических двойничных формы (A, B, C, E) и $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{E})$ с целыми рациональными коэффициентами и одинаковыми дискриминантами $B^2 C^2 + 18 ABCE - 4AC^3 - 4B^3E - 27A^2E^2 = \overline{B}^2\overline{C}^2 + 18\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{E} - 4\overline{A}\,\overline{C}^3 - 4\overline{B}^3\overline{E} - 27\overline{A}^2\overline{E}^2$ и требуется узнать, эквиваленты ли они, то есть существует ли такая подстановка $X = \alpha\overline{X} + \beta\overline{Y}$; $Y = \gamma\overline{X} + \delta\overline{Y}$ с целыми рациональными коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, что $AX^3 + BX^2Y + CXY^2 + EY^3 = \overline{A}\,\overline{X}^3 + \overline{B}\,\overline{X}^2\overline{Y} + \overline{C}\,\overline{X}\,\overline{Y}^2 + \overline{E}\,\overline{Y}^3$. Для этого заметим, что, если

$$\varphi = (A, B, C, E) = A(X - \xi Y)(X - \xi' Y)(X - \xi'' Y),$$

где ξ, ξ', ξ'' — корни уравнения $\varphi(X, 1) = 0$, тогда $\overline{\varphi}(\overline{X}, \overline{Y}) = A(\alpha\overline{X} + \beta\overline{Y} - \xi(\gamma\overline{X} + \delta\overline{Y})) \cdot (\alpha\overline{X} + \beta\overline{Y} - \xi'(\gamma\overline{X} + \delta\overline{Y})) \times (\alpha\overline{X} + \beta\overline{Y} - \xi''(\gamma\overline{X} + \delta\overline{Y}))$, то есть корни $\overline{\varphi}(\overline{X}, 1) = 0$ будут, следовательно, $\overline{\xi} = \dfrac{\delta\xi - \beta}{-\gamma\xi + \alpha}$, то есть $\overline{\xi}$ выражается рационально через ξ. Пусть $\overline{\xi} = a\xi^2 + b\xi + c$, тогда если положить $-\dfrac{B}{A}=u; -\dfrac{C}{A}=p; -\dfrac{E}{A}=q$, то числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ пропорциональны числам

$$\alpha''=an+b;\ \beta''=a^2q-bc-acn;\ \gamma''=a;\ \delta''=b^2-ac-a^2p+abn\ . \quad (1)$$

Приведя эти рациональные числа к общему знаменателю, мы рассмотрим числители; сократив их на общий множитель, если таковой будет, мы получим наименьшие целые числа $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, пропорциональные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и соответственно тех же знаков, предположим еще, что $A>0$ и $\overline{A}>0$ (если бы этого не было, мы обеспечим это, сделав предварительное преобразование подстановкой $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, тогда, *„если* $\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=\pm 1$, *то формы эквивалентны, при чем переходная подстановка* $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *есть* $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$, *если* $\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1$, *и* $\begin{pmatrix}-\alpha' & -\beta'\\ -\gamma' & -\delta'\end{pmatrix}$, *если* $\alpha'\delta'-\rho'\gamma'=-1$". Действительно, $\alpha''\delta''-\beta''\gamma''=-a^3(np+q)+ a^2b(n^2-p)+2ab^2n+b^3=f(-\gamma'', \alpha'')=N(-a\xi+b+an)= N\left(\dfrac{\xi'-\overline{\xi}''}{\overline{\xi}'-\xi''}\right)=\pm\dfrac{A^2}{\overline{A}^2}$, последнее, так как $D_\varphi=D_{\overline{\varphi}}$ (тут мы обозначаем знаком N нормы в кубической области $\Omega\xi$); пусть $\alpha''=\alpha'\lambda$; $\beta''=\beta'\lambda$; $\gamma''=\gamma'\lambda$; $\delta''=\delta'\lambda$, где $\lambda>0$, в таком случае, если $\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=\pm 1$, то $\alpha''\delta''-\beta''\gamma''=\pm\lambda^2$, и, следовательно, $\lambda=\left|\dfrac{A}{\overline{A}}\right|$, и таким образом получаем $N(-\gamma'\xi+\alpha')=\pm\left|\dfrac{\overline{A}}{A}\right|$; но мы имеем $\overline{\varphi}(\overline{X}, 1)=\overline{A}\cdot N\left(\overline{X}-\dfrac{\delta'\xi-\beta'}{-\gamma'\xi+\alpha'}\right)$, и, следов. $\overline{\varphi}(\overline{X}\,\overline{Y})=\dfrac{\overline{A}}{N(-\gamma'\xi+\alpha')}\cdot N(\alpha'\overline{X}+\beta'\overline{Y}-\xi(\gamma'\overline{X}+\delta'\overline{Y}))$, откуда, принимая во внимание найденное значение для $N(-\gamma'\xi+\alpha')$, мы получаем $\overline{\varphi}(\overline{X}\,\overline{Y})=\pm AN(\alpha'\overline{X}+\beta'\overline{Y}-\xi(\gamma'\overline{X}+\delta'\overline{Y}))= \pm\varphi(X\,Y)_{\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}}$, ч. и т. д.

2. *Задача обратная задаче Чирнгаузена.* Все сводится, таким образом, к нахождению чисел (1) предыдущего параграфа, но для этого необходимо знать числа a, b, c, то есть, необходимо иметь удобное решение следующей задачи: „даны два кубических уравнения, требуется найти рациональную „переходную" функцию от одного уравнения к другому, если она есть, либо показать, что ее не существует". Решение этой задачи следующее. Подготовим оба уравнения так, чтобы у них отсутствовали члены с z^2. Пусть имеем таким образом уравнения $z^3=pz+ q$ и $z^3=\overline{p}z+\overline{q}$; обозначим через D и $\overline{D}$ их дискриминанты

$4p^3-27q^2$ и $4\bar{p}^3-27\bar{q}^2$ и предположим, что переходная функция φ была бы $\varphi=\mu x^2+\nu x+x$, тогда мы имели бы по Hermite-у $3\bar{p}=H(\nu, \mu)$; $27\bar{q}=Q(\nu, \mu)$, где $H=(3p, 9q, p^2)$ и $Q=(27q, 18p^2, 27\,pq, 27q^2-2p^3)$, квадратичный и кубичный коварианты кубической двойничной формы $(1, 0, -p, -q)=f$. Рассмотрим сизигию Cayley $27\,Df^2+Q^2-4H^3=0$ и подставим в нее $x=\nu$; $y=\mu$, тогда мы получим первое условие, чтобы μ и ν были рациональными,—квадратное уравнение $\Theta^2=\bar{D}\cdot D^{-1}$ должно иметь рациональные корни, то есть дискриминанты могут отличаться только квадратным множителем, можно, следовательно, положить $D_1=D_1\,\Delta^2$; $\bar{D}=D_1\,\bar{\Delta}^2$, где уже D не имеет квадратных множителей, а целые числа Δ и $\bar{\Delta}$ положительные, и тогда

$$\Theta=f(\nu, \mu)=\pm\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}.$$

Легко проверить, что существует следующее тождество:

$$2y^3D-6pH(x, y)\cdot y+Q(x, y)-27qf(x, y)=0,$$

подставляя сюда $x=\nu$; $y=\mu$ и полагая, для упрощения,

$$\mu=\frac{3u_1}{\Delta};\quad \nu=\frac{v}{\Delta};\quad x=\frac{w}{\Delta},$$

приняв во внимание полученные выражения для $\bar{p}$; $\bar{q}$ Θ мы получаем, что u_1 должно удовлетворять одному из уравнений

$$D_1u_1^3-p\bar{p}\,u_1+\frac{\Delta\bar{q}\mp\bar{\Delta}q}{2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Если это уравнение имеет рациональный корень u_1 (при целых p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ u_1 может быть только целым, так как D_1 не делится на квадрат; число $\dfrac{\Delta\bar{q}\mp\bar{\Delta}q}{2}$ тоже целое число), тогда целые числители u, v, w коэффициентов переходной подстановки мы получаем в виде

$$u=3u_1;\quad v=\frac{\mp p^2\bar{\Delta}-9\bar{p}\,qu_1}{3D_1u_1^2-p\bar{p}};\quad w=-2pu_1,$$

где надо брать верхний или нижний знак в зависимости от того, которое из двух уравнений (1) имеет рациональный корень. Если уравнения (1) рационального корня не имеют, тогда наши кубические уравнения рационально независимы, хотя бы даже D и $\bar{D}$ и отличались лишь на квадратный множитель.

3. *Пример решения задачи эквивалентности.* Пусть заданы формы $(A, B, C, E)=(1, 0, 3, 2)$ и $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{E})=(116, 219, 138, 29)$; $\phi(z, 1)=z^3+3z+2$; $\overline{\phi}(z, 1)=116z^3+219z^2+138z+29$; $D_\phi=D_{\overline{\phi}}=-216$; ξ корень уравнения $z^3=-3z-2$ (1); $\overline{\xi}$ корень уравнения $z^3=-\frac{219}{116}z^2-\frac{138}{116}z-\frac{29}{116}$; $\zeta=116\overline{\xi}+73$ корень уравнения $z^3=-21z+326$ (2); будем искать по § 2 переходную функцию от (1) к (2); $p=-3$; $q=-2$; $\overline{p}=-21$; $\overline{q}=326$; $D=-216$; $\overline{D}=-216.116^2$; $D_1=-6$; $\Delta=6$; $\overline{\Delta}=696$; уравнение (1) § 2 будет—

$$6u_1^3-63u_1+\frac{6.326\pm 696.2}{2}=0;$$

откуда $u_1=6$; т. е.

$$\zeta=116\overline{\xi}^2+73=3\xi^2+2\xi+6,$$

то есть

$$\overline{\xi}=\frac{3}{116}\xi^2+\frac{2}{116}\xi-\frac{67}{116};$$

откуда по (1) § 1

$$\alpha'=2;\ \beta'=1;\ \gamma'=3;\ \delta'=2;\ \alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1,$$

и, следовательно, мы получаем $(116, 216, 138, 29)=(1, 0, 3, 2)_{\binom{2\ 1}{3\ 2}}$, формы эквивалентны.

4. *Теория индексформы.* Рассмотрим соотношение кубических двойничных форм с кубическими порядками. „Порядком" в G, где G совокупность всех целых чисел некоторой кубической области Ω, называется такой модуль в G, который заключает в себе рациональную единицу 1 и воспроизводится умножением. В кубическом порядке могут быть найдены два числа X_1 и X_2 такие, что любое число порядка имеет вид $t_0+X_1t_1+X_2t_2$, где t_0, t_1, t_2 целые рациональные коэффициенты. Числа 1, X_1, X_2 представляют такой базис порядка, у которого первое число 1. Такие базисы, которые мы единственно только и будем рассматривать, мы будем называть „единичными". Порядок мы будем обозначать символом $O[1, X_1, X_2]$ или просто O. Не всякие два числа X_1X_2 из G дают порядок. Действительно, нетрудно видеть, что, например, модуль $[1, \varphi, 2\varphi^2]$, где φ из G, не представляет порядка, так как произведение $\varphi\cdot\varphi=\varphi^2$ не лежит в нем. Для того, чтобы узнать, будет ли модуль $[1, X_1, X_2]$ порядком, достаточно узнать, лежат ли все произведения чисел его в нем самом. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в $[1, X_1, X_2]$ лежали числа X_1^2; X_2^2; X_1X_2. Выразим в Ω, что всегда возможно, эти 3 числа

линейно через 1, X_1, X_2 с рациональными коэффициентами, пусть

$$\begin{aligned} X_1^2 &= A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 \\ X_2^2 &= B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ X_1 X_2 &= C_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2 \end{aligned}$$

если 9 чисел A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2 целые, тогда модуль $[1, X_1, X_2]$ порядок, в ином случае нет. Эти 9 чисел, знания которых достаточно для производства всех умножений в O, мы будем называть „умножающими" коэффициентами порядка.

Умножающие коэффициенты не независимы, так как легко видеть, что

$$\begin{aligned} A_0 &= A_2\ (C_1 - B_2) - C_2\ (A_1 - C_2) \\ B_0 &= B_1\ (C_2 - A_1) - C_1\ (B_2 - C_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ C_0 &= A_2\ B_1\ - C_1\ C_2\,. \end{aligned}$$

Квадрат определителя $\begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 1 & X_1' & X_2' \\ 1 & X_1'' & X_2'' \end{vmatrix}$, где верхними значками обозначены сопряженные по кубической области числа, называется „дискриминантом" базиса. Если 1, Y_1, Y_2 другой единичный базис того же порядка и $Y_1 = a_0 + a_1\ X_1 + a_2\ X_2$; $Y_2 = b_0 + b_1\ X_1 + b_2\ X_2$, тогда $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1$; наоборот, если $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1$, то 1, Y_1, Y_2 базис того же порядка. Если τ какое нибудь число порядка, то квадрат определителя $\begin{vmatrix} 1 & \tau & \tau^2 \\ 1 & \tau' & \tau'^2 \\ 1 & \tau'' & \tau''^2 \end{vmatrix}$ называется „дискриминантом числа τ". Если $\tau = a_0 + a_1\ X_1 + a_2\ X_2$; $\tau^2 = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$, то дискриминант τ равен дискриминанту порядка $O\ [1, X_1, X_2]$, помноженному на квадрат определителя $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Этот определитель называется „индексом числа τ относительно порядка O". Вычислим индекс Δ числа τ через коэффициенты τ и умножающие коэффициенты (1), мы получим $\Delta = a_1^3\ \ A_2 + a_1^2\ a_2\ (2\ C_2 - A_1) + a_1\ a_2^2\ (B_2 - 2\ C_1) - a_2^3\ B_1$, мы видим, что индекс числа $\tau = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ представляет значение двойничной кубической формы

$$(A_2,\ 2\,C_2 - A_1,\ B_2 - 2\,C_1, - B_1) = f\ (X,\ Y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

при значениях переменных $X = a_1$; $Y = a_2$. Эту форму мы называем „индексформой" порядка и будем также обозначать $f\ [1\ X_1\ X_2]$.

Базисы 1, X_1, X_2 и 1, $X_1 + c_1$, $X_2 + c_2$ где c_1 и c_2 представляют целые рациональные числа, мы называем „параллельными" базисами; совокупность всех параллельных между собою базисов мы будем называть „параллелью“ базисов. Если произведение $X_1 X_2$—рациональное число, то мы будем называть базис „нормальным“. Нетрудно видеть, что имеет место *теорема: „Среди параллельных базисов есть всегда один и только один нормальный“.*

Действит., рассмотрим произведение $(X_1+c_1)(X_2+c_2)=$ $=X_1 X_2+X_1 c_2+X_2 c_1+c_1 c_2=(C_1+c_1)X_1+(C_2+c_2)X_2+$ $+C_0+c_1c_2$, мы видим, что, если положить $c_1=-C_1$; $c_2=-C_2$, то мы перейдем к нормальному базису 1, X_1+c_1, X_2+c_2, пусть умножающие коеэффициенты этого нового базиса суть $\bar{A}_0$, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{B}_0$, $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{C}_0$, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, тогда $\bar{A}_1=A_1+2c_1$; $\bar{B}_1=B_1$; $\bar{C}_1=C_1+c_2$; $\bar{A}_2=A_2$; $\bar{B}_2=B_2+2c_2$; $\bar{C}_2=C_2+c_1$, написав по (3) индексформу, соответствующую этому параллельному базису, мы убеждаемся, что $f[1\ X_1\ X_2]=f[1, X_1+c;$ $X_2+c_2]$, т. е. что *„параллельным базисам соответствует одна и та же индексформа“*. Если базис нормальный, то соответствующая ему индексформа имеет вид $(A_2, -A_1, B_2, -B_1)$. *Теорема: „Всякой неприводимой кубической двойничной форме соответствует параллель базисов некоторого кубического порядка“*. Доказательство. Пусть $f=(A_2, -A_1, B_2, -B_1)$ некоторая неприводимая кубическая двойничная форма. Рассмотрим числа X_1 и X_2 такие, что

X_1 корень ур-ия $z^3-A_1 z^2+A_2 B_2 z-A_2^2 B_1=0$ ....(4)

X_2 корень ур-ия $z^3-B_2 z^2+A_1 B_1 z-A_2 B_1^2=0$ ......(5)

тогда $\frac{1}{X_2}$ корень уравнения $-z^3 A_2 B_1^2+z^2 A_1 B_1-z B_2+1=0$ или

$$z^3-\frac{A_1}{A_2 B_2}z^2+\frac{B_2 A_2}{A_2^2 B_1^2}z-\frac{A_2^2 B_1}{A_2^3 B_1^3}=0,$$

т. е. $\frac{A_2 B_1}{X_2}=X_1$, или $X_1 X_2=A_2 B_1$, следовательно, 1, X_1, X_2 нормальный базис некоторого модуля. Нетрудно видеть, что модуль $[1, X_1 X_2]$ есть порядок. Действительно, положим $X_1^2=\bar{A}_0+\bar{A}_1 X_1+\bar{A}_2 X_2$; $X_2^2=\bar{B}_0+\bar{B}_1 X_1+B_2 X_2$; $X_1 X_2=\bar{C}_0+$ $+\bar{C}_1 X_1+\bar{C}_2 X_2$; первое из этих равенств, вследствие того, что $X_2=\frac{A_2 B_1}{X_1}$, дает $X_1^3-\bar{A}_1 X_1^2-\bar{A}_0 X_1-\bar{A}_2 B_1 A_2=0$; сравнивая это уравнение с (4), мы получаем $\bar{A}_0=-A_2 B_2$; $\bar{A}_1=A_1$; $\bar{A}_2=A_2$, и аналогично $\bar{B}_0=-A_1 B_1$; $\bar{B}_1=B_1$; $\bar{B}_2=B_2$ и $\bar{C}_0=A_2 B_1$; $\bar{C}_1=0$; $\bar{C}_2=0$, и мы видим по (1) и (2), что $[1, X_1, X_2]$ порядок и что индексформа (нормального) базиса 1, X_1, X_2 этого порядка есть как раз $(A_2, -A_1, B_2, -B_1)$,ч, и т. д.

Из этой теоремы следует, что форма однозначно соответствует параллели базисов порядка, и обратно. *Теорема: „Дискриминант индексформы равен дискриминанту соответственного порядка“.* Действительно, если базис нормальный, $D_f = A_1^2 B_2^2 + 18 A_1 A_2 B_1 B_2 - 4 A_2 B_2^3 - 4 A_1^3 B_1 - 27 A_2^2 B_1^2$, дискриминант же базиса равен квадрату определителя

$$|1,\ X_1,\ X_2|^2 = \left| 1, X_1, \frac{X_1 - A_1 X_1 + A_2^2 B_2}{A_2} \right|^2 = \frac{1}{A_2^2} \quad |1 \quad X_1 \quad X_1^2|^2,$$

но $|1 \ X_1 \ X_1^2|^2$ есть дискриминант числа X_1, или, что все равно, уравнения (4), вычислив его и разделив на A_2^2, мы получаем $D_f = D_o$........ч. и т. д.

Теорема: „Эквивалентным единичным базисам соответствуют эквивалентные индексформы, и обратно, при чем $f\,[1 \ Y_1 \ Y_2] = f\,[1 \ X_1 \ X_2]_{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_2 \end{pmatrix}}$“. Доказательство. Пусть задан порядок, при чем $1 \ X_1 \ X_2$ его нормальный базис, так что $X_1^2 = -A_2 B_2 + A_1 X_1 + A_2 X_2$; $X_2^2 = -A_1 \quad B_1 + B_1 \quad X_1 + B_2 \quad X_2$;

$$X_1 \ X_2 = A_2 \ B_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

Пусть 1; $Y_1 = a_0 + a_1 \ X_1 + a_2 \ X_2$; $Y_2 = b_0 + b_1 \ X_1 + b_2 \ X_2$ другой базис того же порядка, т. е. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \pm 1$. Ввиду того, что индексформы, соответствующие параллельным базисам, одинаковы, мы можем предполагать $a_0 = b_0 = 0$. Тогда $X_1 = b_2 Y_1 - a_2 Y_2$; $X_2 = a_1 \ Y_1 - b_1 \ Y_2$ (7). Пользуясь (6), мы получим $Y_1^2 = -a_1^2 \ A_2 \ B_2 - a_2^2 \ A_1 \ B_1 + 2 \ a_1 \ a_2 \ A_2 \ B_1 + (a_1^2 \ A_1 + a_2^2 \ B_1) \ X_1 + (a_1^2 A_2 + a_2^2 \ B_2) \ X_2$. Если мы подставим сюда X_1 и X_2 из (7), то мы вычислим умножающие коэффициенты базиса 1, $Y_1 \ Y_2$, а по ним и по (3) и коэффициенты индексформы $f\,[1,\ Y_1,\ Y_2]$. Если мы, с другой стороны, просто преобразуем форму $f\,[1 \ X_1 \ X_2]$ подстановкой $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, то мы получим, что $f\,[1 \ X_1 \ X_2]_{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}} = f\,[1 \ Y_1 \ Y_2]$, что и т. д.

Таким образом установлено взаимнооднозначное соответствие между классами кубических двойничных форм, неприводимых и с целыми рациональными коэффициентами, и кубическими порядками.

5. Геометрическая интерпретация кубических порядков. Рассмотрим кубические уравнения вида $z^3 = uz^2 + pz + q$ с отрицательным дискриминантом

$$D = n^2 p^2 - 18 npq + 4p^3 - 4n^3 q - 27 q^2;$$

такое уравнение имеет один действительный корень ρ, и два комплексных сопряженных

$$\rho' = \xi + i\eta; \quad \rho'' = \xi - i\eta,$$

при чем

$$\xi = \frac{n-\rho}{2}; \quad \eta = \frac{\sqrt{-D}}{2F'(\rho)},$$

где

$$F(z) = z^3 - uz^2 - pz - q.$$

Будем сопоставлять всякому такому уравнению, или числу ρ точку с прямоугольными координатами $x = \xi$; $y = \eta$; $z = \rho$ (таким образом одному уравнению будут соответствовать две точки симметричные относительно плоскости XZ, так как η определено лишь с точностью до знака). Можно также сказать, что числу ρ соответствует вектор $\overrightarrow{0\rho}$, тогда сумме (разности) чисел соответствует сумма (разность) соответственных векторов. Числу 0 соответствует начало; рациональные числа, как имеющие своими сопряженными самих себя, т. е. $\eta = 0$, лежат на биссектриссе плоского угла XoZ, которую поэтому называем „рациональной" прямой; целые рациональные числа лежат на этой прямой по одну и другую сторону от начала в расстояниях $\sqrt{2}$ друг от друга. Нетрудно видеть, что порядку соответствует при таком толковании чисел параллелопипедальная система, построенная на векторах 01, $0X_1$, $0X_2$; легко видеть, что объем основного параллелопипеда этой системы равен $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{|D_0|}$.

Рассмотрим совокупность W всех целых чисел всех кубических областей с отрицательным дискриминантом. Все точки системы W лежат в конечных расстояниях друг от друга, так как

$$\left.\begin{aligned} n &= z + 2x \\ -\rho &= x^2 + y^2 + 2xz \\ q &= (x^2 + y^2)z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и точки W представляют точки пересечения этих трех систем поверхностей (плоскости, гиперболоиды, двухполые при $\rho > 0$, однополые при $\rho < 0$ и поверхности вращения 3-го порядка) при целых значениях n, ρ, p.

Совокупность W состоит из всех кубических порядков с отрицательным дискриминантом и еще из точек, соответствующих приводимым уравнениям.

Будем называть числа, отличающиеся целыми рациональными прибавками, „параллельными" числами. Рассмотрим в $O[1X_1X_2]$ плоскую „параллелограмматическую" систему S, построенную на векторах $\overrightarrow{0X_1}$, $\overrightarrow{0X_2}$, мы видим, что O содержит, кроме системы S, только числа, ей параллельные. Будем проектировать числа O на плоскость XY параллельно рациональному направлению; все параллельные между собою числа спроектируются на плоскость XY в одну точку, и значит вся параллелопипедальная система O спроектируется на плоскость XY в виде некоторой плоской параллелограмматической системы $\overline{O}$ (которая будет проскцией Y). Таким образом, каждому порядку (а следовательно, и классу форм, см. предыдущий §) будет соответствовать некоторая параллелограмматическая система $\overline{O}$ в плоскости XY. Одной же форме соответствует некоторый определенный основной двухсторонник этой системы.

Для составления таблицы всех порядков (а следовательно, и классов форм, см. пред. §) надо рассмотреть проекцию всех чисел W; если спроектировать таким способом всю W, то получится в плоскости X,Y некоторая непараллелограмматическая система точек $\overline{W}$, которая однако будет содержать все параллелограмматические системы $\overline{O}$.

6. *Сети* $\overline{W}_0$, $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$. Для удобства вычислений мы разобьем W на 3 части, а именно, если w число из W, то всегда можно подобрать такое c, чтобы коэффициент n того уравнения $z^3 = nz^2 + pz + q$, которому удовлетворяет $w + c$, был равен 0, или 1, или 2. Другими словами, все числа W делятся на 3 рода W_0, W_1, W_2 имеющие соответственно параллельные себе числа на плоскостях $n = 0, 1, 2$. Назовем соответственно V_0, V_1, V_2 числа W, лежащие в плоскостях $n = 0, 1, 2$. Гиперболоиды p и поверхности q пересекаются с каждой из плоскостей $n = 0, 1, 2$ по сетке, составленной гиперболами и кривыми 3-го порядка, точки пересечения которых и дают соответственные системы V_0, V_1, V_2. Проекции этих трех сеток на плоскость XY параллельно рациональному направлению обозначим через $\overline{W}_0, \overline{W}_1, \overline{W}_2$. Найдем эти сетки $\overline{W}_i$. Для этого будем обозначать через v и w координаты—x и y точки в плоскости XY. Заметим, что, если спроектировать точки (x, y, z) на плоскость XY параллельно рациональному направлению, то координаты v и w проекции будут $v = x - z$; $w = y$. Исключив из этих двух уравнений и уравнения (1) предыдущего § буквы x, y, z, мы получим уравнения

$$\left.\begin{array}{l} v^2 - 3w^2 = 3p + n^2 \\ (v^2 + 2uv + n^2 + 9w^2)\,(n - 2v) = 27q \end{array}\right\} \begin{array}{r} \ldots\ldots(1) \\ \ldots\ldots(2), \end{array}$$

которые и представляют соответственно при $n=0, 1, 2$ сетки $\overline{W}_0, \overline{W}_1, \overline{W}_2$ если p и q давать всякие целые значения.

7. Ограничение p и q ближайших чисел для $n=0, 1, 2$. Геометрическая теорема: *„Если площадь основного треугольника параллеллограмматической спстемы есть S_0, тогда наименьшее расстояние между двумя точками системы не превышает $\sqrt{\frac{2S_0}{\sqrt{3}}}$*". Действительно, основной треугольник параллелограмматической системы всегда может быть выбран остроугольным, кратчайшая же из сторон остроугольного треугольника, при данной его площади S_0, будет самой длинной, если он равносторонний, ч. и т. д.

Зададим некоторое число L. Предыдущее замечание позволяет, в зависимости от L, найти такое число r, что если описать вокруг начала координат окружность радиуса r, то внутрь этой окружности попадет по крайней мере хоть одна точка каждой системы $\overline{O}$, дискриминант которой D_o не превышает L. Действительно, очевидно, что объем тетраедра, имеющего вершины 0, 1, X_1, X_2 равен $\frac{1}{6}$, объема параллелопипеда системы $O[1, X_1, X_2]$, или, по замечанию, сделанному в § 5, равен $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|D_o|}$, но, если мы перенесем вершины X_1 X_2 этого тетраедра параллельно его ребру $\overline{01}$ на плоскость XY, то мы получим равновеликий ему тетраедр, в основании которого как раз основной треугольник системы $\overline{O}$, и высота которого (его вершина есть точка 1) равна 1, таким образом мы имеем $\frac{1}{3} S_0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|D_o|}$ или $S_0 = \frac{1}{4} \sqrt{|D_o|}$, откуда мы получаем

$$r^2 \leqq \sqrt{\frac{L}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Рассмотрим теперь, в каких границах должны находиться p и q точек систем $\overline{W}_0$, $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$ для того, чтобы они лежали внутри круга радиуса r. Из предыдущей формулы (1) и (1) § 6, рассматривая крайние гиперболы, которые пересекают окружность r, мы получаем соответственно при $n=0, 1, 2$ следующие ограничения для коэффициента p

$$-\sqrt{\frac{L}{3}} \leqq \rho \leqq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{L}{3}};$$

$$-\left(\sqrt{\frac{L}{3}}+\frac{1}{3}\right) \leqq \rho \leqq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{L}{3}}-\frac{1}{3}$$

$$-\left(\sqrt{\frac{L}{3}}+\frac{4}{3}\right) \leqq \rho \leqq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{L}{3}}-\frac{4}{3} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Теперь надо еще ограничить q, то есть найти, какая крайняя кривая q пересекает каждую гиперболу ρ еще внутри круга r. Для этого заметим, что $r^2=v^2+w^2=(\xi-\rho)^2+\eta^2$, откуда $r^2=3\rho^2-2n\rho-\rho=F'(\rho)$ то есть r^2 равно дифференте ρ. Дифферента $F'(\rho)$ есть корень уравнения $z^3-z^2(n^2+3\rho)+(4\rho^3-27q^2+n^2\rho^2-18n\rho q-4n^3q)=0$; если при данных n и ρ увеличивать q, то при некотором $q=q'$, z станет равным r^2, то есть будет $r^6-r^4(n^2+3\rho)+D_\rho=0$, при меньших же q, r будет уже велико и даст значение большее нуля (так как для $r=0$ получаем D_ρ, т. е. меньше нуля), таким образом в каждом из случаев $n=0$, 1, 2 надо для каждого ρ удовлетворить соответственному неравенству (2) и брать q, при котором $r^6-r^4(n^2+3\rho)+D_\rho$ меньше нуля.

8. *Нахождение второго числа базиса.* Рассмотрим какой-нибудь порядок O, дискриминант которого по абсолютной величине меньше L. Внутри найденных в предыдущих §-ах пределов для ρ и q будет находиться одно или несколько уравнений $z^3=nz^2+\rho z+q$ (где $n=0$, 1, 2), корни которых суть числа O. Для того, чтобы уравнение было таким, оно должно быть, во-первых, неприводимым. Затем его дискриминант $D_f=n^2\rho^2-18n\rho q+4\rho^3-4n^3q-27q^2$ должен отличаться от D_0 лишь на квадратный множитель. Найдем все такие уравнения, пусть корни их φ. Среди этих чисел φ будет между прочим и ближайшее к 0 число $\overline{O}$, обозначим его φ_0, его можно выбрать за X_1 базиса порядка O; но мы не знаем, какое из этих чисел φ есть φ_0, да, кроме того, кроме φ_0 могут быть среди чисел φ и другие числа, которые могут быть выбраны за X_1. Поэтому мы поступим так: будем для каждого из этих чисел φ подбирать второе число базиса X_2. Пусть число ψ есть это X_2, ψ вида $\frac{a\varphi^2+b\varphi+c}{\Delta}$, где a, b, c числа целые, а Δ индекс числа φ относительно O, т. е. $\Delta=\sqrt{\frac{D_0}{D_\varphi}}$,

при чем a здесь надо положить равным 1, так как $D_0 = D_{[1, \varphi, \psi]} = \left| 1, \varphi, \frac{a\varphi^2 + b\varphi + c}{\Delta} \right|^2 = \frac{a^2}{\Delta^2} \left| 1, \varphi, \varphi^2 \right|^2$. Итак $\psi = \frac{\varphi^2 + b\varphi + c}{\Delta}$, где Δ—некоторый квадратный делитель D_φ. Остается только найти, какие b и c можно брать для получения ψ. Для этого сделаем следующее замечание: „Если коэффициенты B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2 в равенствах $\psi^2 = B_0 + B_1\varphi + B_2\psi$; $\varphi\psi = C_0 + C_1\varphi + C_2\psi$ целые рациональные, то, какое бы то ни было φ, число ψ целое алгебраическое". Действительно, исключая из этих равенств φ, мы получаем „целое" уравнение

$$\psi^3 = (B_2 + C_1)\psi^2 + (B_0 + B_1 C_2 - B_2 C_1)\psi + B_1 C_0 - B_0 C_1$$

Если φ корень уравнения $z^3 = nz^2 + pz + q$ и $\psi = \frac{\varphi^2 + b\varphi + c}{\Delta}$, то, для того, чтобы C_0, C_1, C_2 были целые, необходимо и достаточно, чтобы

$$c \equiv b^2 + nb - p \ (mod.\ \Delta) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$b^3 + 2nb^2 + (n^2 - p)\, b - (np + q) \equiv 0 \ (mod.\ \Delta) \quad \ldots (2)$$

для того же, чтобы B_0, B_1, B_2 были целые, необходимо и достаточно, чтобы

$$3b^2 + 4bn + (n^2 - p) \equiv 0 \ (mod.\ \Delta) \quad \ldots\ldots (3)$$

$$b^3 + 2nb^2 + (n^2 - p)\, b - (np + q) \equiv 0 \ (mod.\ \Delta^2) \quad \ldots (4)$$

$$2b^4 + 5b^3 n + b^2 (4n^2 - 2p) + b\,(n^3 - 3np - 2q) -$$
$$- (n^2 p + nq) \equiv 0 \ (mod.\ \Delta^2) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Эти сравнения не независимы, так как $(5) = (4)\,(2b + n)$, то есть следствие (4); таким образом независимы только (3) и (4); сравнения (3) и (4) можно написать и так: $F'(\overline{b}) \equiv 0 \ (mod.\ \Delta)$ (3'); $F(\overline{b}) \equiv 0 \ (mod.\ \Delta^2)$ (4'), где $\overline{b} = b + n$. Таким образом, надо найти такой корень $\overline{b}$ сравнения (3'), который еще удовлетворяет сравнению (4'), при чем можно брать $0 \leqq \overline{b} < \Delta$, и тогда $b = \overline{b} - n$. Найдя такое b и затем c из (1), мы получим ψ, которое можно взять за X_2, и тогда, если $\varphi = X_1$, то $[1, X_1 X_2,]$ модуль, дискриминант которого есть D_0. Этот модуль порядок так как, по самому получению b и c, умножающие коэффициенты A_0; A_1; A_2 тоже целые, так как из $\varphi^2 = A_0 + A_1 \varphi + A_2 \frac{\varphi^2 + b\varphi + c}{\Delta}$ мы получаем $A_2 = \Delta$; $A_1 = -b$; $A_0 = -c$.

9. *Таблица действий.* Последовательность действий для вычисления таблицы порядков, расположенных по дискриминантам, следующая: 1) ограничение ρ в зависимости от выбора L (L удобно брать вида $3\gamma^4$, чтобы r вышло целое рациональное) по (2) § 7; 2) ограничение q для каждого из этих ρ по (3) § 7. Эти два вычисления надо произвести для $n = 0, 1, 2$. Таким образом получаем 3 таблички уравнений, лежащих в круге r. Эти таблички можно и прямо получить, тщательно вычертив сетки $\overline{W}_0$, $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$; 3) исключаем все приводимые уравнения; 4) вычисляем все дискриминанты D_φ оставшихся уравнений. Это действие отнимает наиболее времени. 5) Раскладываем на множители все эти дискриминанты и отчеркиваем все те, которые, за выделением наибольшего квадрата, все же по абсолютной величине больше L. 6) Находим, пользуясь (3′) и (4′) § 8, все q, соответствующие всем квадратным делителям Δ оставшихся D, и отбрасываем те, для которых $(D_0) = \left|\frac{D}{\Delta^2}\right|$ все же больше L. Таким образом, мы получаем все порядки O, дискриминанты которых меньше L, но некоторые из них могут встретиться по несколько раз, поэтому надо еще проделать действие 7) — нахождение зависимостей, которые могут существовать между теми O, у которых одинаковые D, по правилу §§ 1 и 2.

Для сокращения вычислений лучше вычислять по зонам, т. е. сначала до $L = 3 \cdot 2^4$, потом до $L = 3 \cdot 3^4$ и т. д., при чем в каждой след. зоне уже можно не рассматривать порядков с дискриминантами, принадлежащими предыдущим зонам.

Когда уже вычислена этим способом таблица порядков, так что для каждого $|D| < L$ даны все различные порядки, имеющие знаки D, т. е. даны коэффициенты n, ρ, q уравнения $z^3 = n z^2 + \rho z + q$, которому удовлетворяет φ, и числа Δ, b, c в выражении $\psi = \frac{\varphi^2 + b\varphi + c}{\Delta}$, где 1; $X_1 = \varphi$; $X_2 = \psi$ базис порядка, то можно затем, если угодно, переписать эту таблицу в виде таблицы представительниц всех классов с $|D| < L$ кубических двойничных форм. Действительно, соответствующая этому базису индексформа (A, B, C, E) имеет коэффициенты $A = -c$; $B = \frac{1}{6} F''(\bar{b})$; $C = \frac{1}{2\Delta} F'(\bar{b})$; $E = \frac{1}{\Delta^2} F(\bar{b})$, где $F(z) = z^3 - n z^2 - \rho z - q$.

Таблица кубических порядков с $|D| < 628$.

$-D$							
23	$n = 1;\ p = 0;$ $q = 1$	212	1 −4 2	356	0 7 −8	484	2 −5 6
31	0 −1 1	216	0 −3 2	364	0 −4 2	491	−4 −6 1
44	−1 −1 1	231	−4 −5 1	367	4 −7 1	492	2 −4 6
59	0 −2 1	236	2 1 2	368	2 (1, 1, 2, 1)	496	2 (1, 0, 1, 1)
76	1 −3 1	239	0 1 3	379	1 −1 4	499	0 −4 3
83	−2 −2 1	243	0 0 3	411	1 −5 2	503	(2, 5, 5, 4) auss,
87	−1 −2 1	244	5 −4 2	416	1 −5 1	515	4 −4 5
104	0 1 2	247	−3 −4 1	—	2 −1 4	516	(3, 3, 4, 2)
107	2 −4 1	255	5 −8 1	419	3 1 2	519	5 −4 3
108	0 0 2	268	7 −13 1	424	8 7 2	524	1 −3 5
116	1 0 2	279	2 −5 1	428	3 −2 4	527	0 −5 1
135	0 −3 1	283	0 −4 1	431	(2, 1, 3, 2) auss.	543	1 −2 5
139	4 −6 1	300	4 −2 2	432	0 0 4	547	4 −2 3
140	3 −5 1	304	−5 −7 1	436	3 −4 6	556	4 −3 4
152	1 2 2	307	2 −4 5	439	2 1 3	560	2 0 4
172	2 0 2	324	0 3 4	440	7 −6 2	563	2 −6 1
175	−2 −3 1	327	4 −3 3	451	5 −3 2	567	3 0 3
176	−1 −3 1	331	−2 −4 1	459	3 3 2	575	−2 −5 1
199	1 −4 1	332	1 −2 4	460	1 −5 3	588	−1 −5 1
200	2 −3 4	335	−1 −4 1	464	3 −5 7	608	5 −9 1
204	1 −1 3	339	2 0 3	—	−3 −5 1	—	1 −1 5
211	6 −10 1	351	3 −6 1	472	3 2 2	620	4 0 2

В этой таблице даны для каждого $-628 < D < 0$ все порядки; по два порядка имеется только при $D = -416, -464$ и -608. Почти для всех D таблицы имеется степенный базис $[1, \rho, \rho^2]$, и поэтому даны коэффициенты n, p, q уравнения $\rho^3 = n\rho^2 + p\rho + q$, которому удовлетворяет ρ. Только в 5-ти случаях степенного базиса нет. В двух случаях, $D = 368$ и -496, потому, что коэффициенты индексформы имеют общего делителя. В двух случаях, $D = -431$ и -503 имеется так наз. „ausserwesentlicher gemeinsamer Discriminatentheiler". Форма же (3, 3, 4, 2), как нам удалось показать при помощи нашей теории представления чисел, числа 1 не представляет, хотя и не принадлежит к двум предыдущим типам. Это таким образом форма с наименьшим дискриминантом, не представляющая 1 по нетривиальной причине.

Lösung des Aequivalenzproblems und Tabularisierung der binären cubischen Formen von negativen Discriminante.

B. Delaunay.

In § 1 wird eine neue Lösung des Aequivalenzproblems für binäre cubische Formen gegeben, welche die Reduction nicht benötigt, sondern auf der Lösung des Problems, welches inwers der Tchirnhausentransformation ist, fusst. § 2 enthält die Lösung dieses letzten Problems für den Fall von zwei cubischen Gleichungen. In § 4 ist der Zusammenhang zwischen den binären cubischen Formen und den cubischen Ringen auseinandergesetzt. § 5, 6, 7, 8, 9 enthalten eine Methode zur Berechnung einer Tabelle von binären cubischen Formen von negativen Discriminante, welche auf einfachen geometrischen Betrachtungen fusst.

К вопросу о распределении дробных долей значений функции одного переменного.

И. М. Виноградов.

В настоящей работе я решаю вопросы, связанные с распределением дробных долей значений функции $f(x)$, удовлетворяющей некоторым условиям. Выводимые мною асимптотические равенства проливают новый свет на распределение дробных долей, при чем полученные мною оценки остаточных членов в значительной степени имеют окончательный характер.

Подобным методом можно получить аналогичные результаты и в вопросе о распределении дробных долей значений функции многих переменных. Но эти результаты я постараюсь изложить в другой статье.

1°. Пусть Δ и Δ_1 два положительных числа, удовлетворяющих условию $\Delta + \Delta_1 = 1$, Рассмотрим периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом 1, определяемую равенствами:

1) $\varphi(x) = \dfrac{x}{\Delta}$ в промежутке $(0, \Delta)$,

2) $\varphi(x) = \dfrac{1-x}{\Delta_1}$ в промежутке $(\Delta, 1)$.

Эта функция разлагается в следующий тригонометрический ряд Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos 2\pi mx + B_m \sin 2\pi mx \right), \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} |A_m| &< \frac{1}{\pi^2 m^2}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta_1}\right); \quad |A_m| < \frac{2}{\pi m} \\ |B_m| &< \frac{1}{\pi^2 m^2}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta_1}\right); \quad |B_m| < \frac{2}{\pi m}. \end{aligned} \tag{2}$$

2°. Кроме указанного разложения функции $\varphi(x)$, мы будем пользоваться еще следующей леммой.

Лемма. Пусть A, U, q, r обозначают величины, удовлетворяющие следующим условиям

$$U \geqq A \geqq k,\ A \geqq 2.\ 0 < r - q \leqq U,$$

где k—постоянное число $\geqq 1$. Пусть далее $f(x)$ функция, имеющая в промежутке $q \leqq x \leqq r$ вторую производную, удовлетворяющую условиям

$$A^{-1} \leqq f''(x) \leqq kA^{-1}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\left|\sum_{x>q}^{x\leq r} e^{2\pi i f(x)}\right| < 10\, k \frac{U}{\sqrt{A}} \text{ *)}.$$

3°. Предполагая выполненными условия указанной леммы, допустим что m—некоторое число $\geqq 1$. Тогда вторая производная функции $mf(x)$ в промежутке $q \leqq x \leqq r$ будет удовлетворять условиям

$$mA^{-1} \leqq mf''(x) \leqq kmA^{-1},$$

а потому нетрудно видеть, что (при $A \geqq km$ и $A \geqq 2m$)

$$\left|\sum_{x>q}^{x\leqq r} e^{2\pi i m f(x)}\right| < 10\, k \frac{\sqrt{m}\, U}{\sqrt{A}} \tag{3}$$

(эта формула, очевидно, верна и при $A < km$, или $A < 2m$).

4°. Предполагая выполненными условия леммы 2°, будем считать r и q целыми числами и положим $r - q = n$.

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{x>q}^{x\leq r} \varphi\left(f(x)\right).$$

---

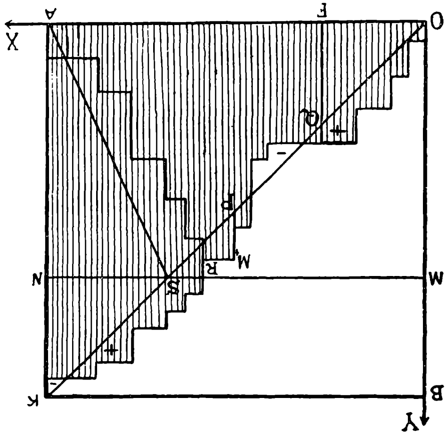
*) Доказательство этой леммы содержится в моей диссертации „О числе целых точек в области двух и трех измерений“ (представл. в физ.-мат. фак. Лнгр. У-та в мае 1920), представляющей собою развитие метода моей работы „О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя“ (Сообщ. Харьковск. М. О. 1917).

Применяя формулу (1), эту сумму можно представить так:

$$S=\frac{n}{2}+\sum_{x>q}^{x\leq r}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(A_m \cos 2\pi m f(x)+B_m \sin 2\pi m f(x)\Big),$$

что в силу формулы (3) и неравенств (2) можно представить в форме

$$S=\frac{n}{2}+O\left(\frac{U}{\sqrt{A}}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}}+\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}\right)\right) \tag{4}$$



Черт. 1.

5°. Для большей наглядности мы дадим теперь найденным результатам геометрическое истолкование. Расположив дроби

$$\{f(x)\};\quad x=q+1,\ q+2,\ \ldots,\ r\ ^{*})$$

в порядке их возрастания, получим некоторый ряд

$$\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{n-1}.$$

Каждое произведение $y_i=n\beta_i$ мы изобразим площадью прямоугольника (черт. 1), ограниченного прямыми $x=i-1$, $x=i$, $y=0$, $y=y_i$. Тогда сумма

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

изобразится заштрихованной площадью чертежа 1.

---

*) Символом $\{z\}$ мы обозначаем дробную часть числа z, то-есть разность $z-[z]$.

На этом чертеже $OA = OB = n$; OK служит диагональю квадрата, построенного на OA и OB.

Обозначим буквою C разность между зашрихованной площадью и площадью ΔOSA.

На чертеже C представится площадью, ограниченной ломаной $OHRK$ и прямою OK, при чем площади, лежащие выше OK, считаем положительными, а площади, лежащие ниже OK считаем отрицательными. Пусть теперь h—любое число, лежащее между O и n, и MN прямая с уравнением $y = h$. Тогда полагая $\Delta = \frac{h}{n}$, будем иметь $\Delta_1 = \frac{n-h}{n}$ и согласно (4), будет

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\beta_i) = \frac{n}{2} + O(H); \; H = \frac{U\sqrt{n}}{\sqrt{A}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{n-h}}\right)$$

Но при $y_i \leqq h$

$$\varphi(\beta_i) = \frac{n\beta_i}{h} = \frac{y_i}{h},$$

а при $y_i \geqq h$

$$\varphi(\beta_i) = \frac{n - n\beta_i}{n-h} = 1 - \frac{y_i - h}{n-h}.$$

Подобно тому, как выше мы изображали числа y_i, изобразим теперь числа $h\varphi(\beta_i) = z_i$.

Получим другую ломаную линию ORA, форму которой легко себе уяснить, замечая, что

$$z_i = y_i \text{ при } y_i \leqq h; \; z_i = h - \frac{(y_i - h)h}{n-h} \text{ при } y_i \geqq h.$$

Из формулы (5) следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i = \frac{hn}{2} + O(hH).$$

Левая часть этого равенства представляет собою не что иное, как площадь фигуры ORA, ограниченной сверху ломаной ORA и снизу осью OX. С другой стороны, площадь треугольника OSA равна $\frac{nh}{2}$. Таким образом, разность T между обеими площадями (ORA и OSA) будет величиною порядка hH. Обозначая буквою α часть площади C, лежащую ниже прямой

MN и буквою β часть этой площади, лежащую выше прямой MN мы можем указанную разность T представить также в форме

$$T = \alpha - \beta \frac{h}{n-h}.$$

Таким образом имеем

$$\alpha - \beta \frac{h}{n-h} = O(hH),$$

откуда, замечая, что $\alpha + \beta = C$, найдем

$$\alpha = \frac{Ch}{n} + O\left(\frac{h(n-h)}{n} H\right). \tag{6}$$

6°. Допустим для определенности, что $C \geqq 0$ и положим

$$h = \frac{U^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}}$$

Тогда окажется

$$\alpha = \frac{CU^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}} + O\left(\frac{U^{\frac{4}{3}} n^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}\right).$$

С другой стороны, из чертежа 1 ясно, что

$$\alpha \leqq \frac{1}{2} h^2 = O\left(\frac{U^{\frac{4}{3}} n^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}\right).$$

Таким образом окажется

$$C = O(L),\ L = \frac{U^{\frac{4}{3}} n^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}}.$$

Тот же результат мы получили бы, предположив, что $C < O$

7°. Нетрудно далее показать, что вся ломаная ORK лежит в полосе между двумя прямыми, параллельными OK, разность начальных ординат которых есть величина порядка Ln^{-1}. Ибо пусть точка M_1 с ординатой y_1 наиболее удаленная от OK точка ломаной ORK и пусть $\overline{PM_1} = W$. Тогда, взяв вместо функции $f(x)$ функцию $f(x) - y_1 n^{-1} = f_1(x)$, мы для функции $f_1(x)$ вместо числа C должны будем взять число $C_1 = C - Wn$, А так как функция $f_1(x)$ удовлетворяет условиям 2°, то $C_1 = O(L)$, т. е.

$$C - Wn = O(L);\ Wn = O(L);\ W = O\left(\frac{L}{n}\right),$$

что и доказывает наше утверждение.

8°. Пусть теперь n_1 любое целое число $\leqq n$.

Рассмотрим сумму

$$\Omega=\sum_{i=0}^{n_1-1} y_i.$$

Пусть n_1 на чертеже 1 изобразится отрезком OF. Положим $h=n_1$. Тогда по формуле (6) соответственное значение α представится в форме

$$\alpha_1=\frac{Cn_1}{n}+O\left(U\sqrt{\frac{n_1(n-n_1)}{A}}\right).$$

С другой стороны, в виду доказанного в 7° очевидно, что, прибавив к величине $\frac{n_1^2}{2}$ площади треугольника OFQ еще число α_1, получим число, которое будет отличаться от Ω лишь на величину порядка $(Ln^{-1})^2=U^{\frac{4}{3}}n^{\frac{2}{3}}A^{-\frac{2}{3}}$. Таким образом можем написать

$$\Omega=\frac{n_1^2}{2}+\frac{Cn_1}{n}+O\left(U\sqrt{\frac{n_1\ (n-n_1)}{A}}+\frac{U^{\frac{4}{3}}n^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}\right).$$

Найденные результаты можно формулировать следующим образом (замечая, что $y_i=n\beta_i$).

Теорема. Пусть A, U любые числа и q и r целые числа, удовлетворяющие условиям $A\geqq 2$; $U\geqq A\geqq k$; $O<r-q\leqq U$, где k постоянное число $\geqq 1$.

Пусть далее $f\ (x)$ функция, имеющая в промежутке $q\leqq x\leqq r$ вторую производную, удовлетворяющую условиям

$$A^{-1}\leqq f''\ (x)\leqq kA^{-1}$$

Тогда, располагая дроби

$$\{f\ (x)\};\ x=q+1,\ q+2,\ \ldots,\ r$$

в порядке их возрастания:

$$\beta_0\leqq\beta_1\leqq\beta_2\leqq\cdots\leqq\beta_{n-1},$$

мы при любом целом положительном $n_1\leqq n$ будем иметь

$$\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i=\frac{n_1^2}{2n}+Rn_1+O\left(\frac{U}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{n_1\ (n-n_1)}{n^2}}+\sqrt[3]{\frac{U^4n^2}{A^2}}\right),$$

где R величина порядка

$$U^{\frac{2}{3}}\ A^{-\frac{1}{3}}\ n^{-\frac{2}{3}},$$

не зависящая от n_1.

Частный случай. В частности, если отношения $\frac{U}{A}$; $\frac{U}{n}$, остаются конечными, будем иметь

$$(7) \qquad \sum_{i=0}^{n_1-1} \beta_i = \frac{n_1^2}{2n} + Rn_1 + O(\sqrt{A});\ R = O\left(A^{-\frac{1}{3}}\right).$$

Порядок $\sqrt{A}$ остаточного члена этого равенства вообще уже не может быть понижен и таким образом представляется окончательным.

9°. **Приложение**. Интересный пример, когда число R может быть выражено более определенно, представляют собою функции

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{x^2}{\rho};\quad \text{b)}\ f(x) = \frac{x^2}{\rho} + \frac{1}{4},$$

где ρ будем считать (для простоты) числом простым $\geqq 3$.

a) Рассмотрим сначала функцию $f(x) = \frac{x^2}{\rho}$, при чем возьмем $q = 0$, $r = \rho$. Тогда можно положить $A = \frac{\rho}{2}$, $k = 1$. Число R будет, очевидно, равно

$$R = \frac{1}{\rho} \sum_{x=1}^{\rho} \left\{\frac{x^2}{\rho}\right\} - \frac{1}{2},$$

что можно представить в форме тригонометрического ряда

$$R = -\frac{2}{\rho} \sum_{x=1}^{\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m \frac{x^2}{\rho}}{m}.$$

Воспользовавшись известным выражением Гауссовых сумм и обозначая символом $h(-p)$ число классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя $-\rho$, будем иметь: если ρ формы $4N+1$, то $R = O$, если же p формы $4N+3$, то

$$R = -\frac{\pi h(-\rho)}{\rho\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\rho}\right)\right)}.$$

Формула (7) примет вид

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} \beta_i = \frac{n_1^2}{2p} + Rn_1 + O(\sqrt{p}).$$

b) Теперь положим $f(x)=\frac{x^2}{p}+\frac{1}{4}$; $q=0$; $r=p$.

Тогда окажется: если p формы $4N+1$, то

$$R=-\frac{\pi h(-p)}{p}-\frac{\pi}{2p},$$

а если p формы $4N+3$, то

$$R=-\frac{2\pi h(-p)\left(\frac{2}{p}\right)\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)}{p\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{p}\right)\right)}-\frac{\pi}{2p}.$$

10°. Пусть p простое число $\geqq 3$ и c делитель числа $p-1$, превосходящий 1. Тогда из теории деления круга известно, что

$$\left|\sum_{x=1}^{p} \sin 2\pi\frac{mx^c}{p}\right|<c\sqrt{p}\ ^{*}).$$

Положим

$$\sum_{x=1}^{p} \sin 2\pi\frac{mx^c}{p}=\alpha_m c\sqrt{p}.$$

Тогда $|\alpha_m|<1$.

Пусть теперь $f(x)=\frac{ax^c}{p}$, где a целое число, не делящееся на p. Положим далее $q=0$, $r=p$.

Тогда будем иметь

$$R=-\frac{2c}{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_m}{m}.$$

---

*) Это неравенство легко выводится из известного равенства

$$\left|\sum_{z=1}^{p-1} \rho^{u\,\mathrm{ind}\,z}\, r^z\right|=\sqrt{p};\quad \rho=e^{\frac{2\pi i}{c}};\ r=e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

справедливого при u, не делящемся на $\frac{p-1}{c}$, если просуммируем на все $u=0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Остаточный член ρ в формуле

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} \beta_i = \frac{n_1^2}{2\rho} + Rn_1 + \rho$$

нам придется оценить особо, так как рассматриваемый случай не подходит к условиям теоремы 8°.

Вместо формулы (4) мы получим здесь

$$S = \frac{\rho}{2} + O\left(c\sqrt{\rho}\ lg\ \frac{1}{\Delta\Delta_1}\right).$$

Далее число H в формуле (5) можно положить равным

$$H = c\sqrt{p}\ lg\ \frac{\rho^2}{h\ (\rho - h)},$$

по формуле (6) остаточный член будет величиною порядка

$$c\ \frac{(\rho - h)\ h}{\sqrt{\rho}}\ lg\ \frac{\rho^2}{h\ (\rho - h)},$$

L можно взять равным $c\rho\ \sqrt{\rho}\ lg\ \rho$, W окажется величиною порядка $\sqrt{\rho}\ lg\ \rho$ и вместе с тем окажется

$$\rho = O\left(c\ \sqrt{\rho}\ lg\ \frac{\rho^2}{n_1\,(\rho - n_1)}\right).$$

В частности, если отношения $\frac{\rho}{n_1}$, $\frac{\rho}{p - n_1}$ остаются ограниченными, будем иметь

$$\rho = O\ (c\ \sqrt{\rho}).$$

Sur la distribution des parties fractionnaires de valeurs de la fonction d'une variable.

I. Winogradov.

L'auteur donne la demonstration de la théorème suivante: Soit A, U—nombres quelconques et q, r—nombres entiers, satisfaisants aux conditions

$$A \geq 2;\ U \geq A \geq k;\ O < r - q \leq U,$$

où k est une constante ≥ 1. Soit encore $f\ (x)$ une fonction qui admet à l'intervalle

$$q \leq x \leq r$$

la dérivée seconde satisfaisante à la condition

$$A^{-1} \leqslant f''(x) \leqslant kA^{-1}.$$

Alors, en ordonnant les fractions

$\{f(q+1)\}, \{f(q+2)\}, \ldots, \{f(r)\}$, où $\{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$, en l'ordre de leur croissance

$$\beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{n-1} \quad (n = r - q)$$

on aura $(n_1 \leqslant n)$

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} \beta_i = \frac{n_1^2}{2n} + Rn_1 + O\left(\frac{U}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{n_1(n-n_1)}{n^2}} + \sqrt[3]{\frac{U^4 n^2}{A^2}}\right),$$

où R ne dépend pas de n_1 et est la valeur d'ordre

$$U^{\frac{2}{3}} A^{-\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}}$$

Dans le cas

$$f(x) = \frac{x^2}{\rho}; \quad q = 0; \quad r = \rho \quad (\rho \text{ — prémier})$$

on a pour R l'expression

$$R = 0, \text{ si } \rho = 4N+1; \quad R = -\frac{\pi h(-\rho)}{\rho\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\rho}\right)\right)},$$

si $\rho = 4N+3$, où $h(-\rho)$ est le nombre des classes des forme quadratiques de la determinant $(-\rho)$. Le terme complementair sera dans ce cas d'ordre $O(\sqrt{\rho})$.

L'auteur considère encore les cas

$$f(x) = \frac{x^2}{\rho} + \frac{1}{4} \text{ et } f(x) = \frac{ax^c}{\rho},$$

où c est le diviseur de $(\rho - 1)$.

О неопределенных дифференциальных уравнениях. (Доклад 1-й).

Б. М. Коялович.

1. Я называю неопределенными те обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых число неизвестных больше числа уравнений. Простейшим типом таких уравнений будет тот случай, когда имеется *одно* уравнение *с двумя* неизвестными функциями y и z. Обозначая независимую переменную через x, мы будем писать его в такой форме

$$\frac{dz}{dx} = \Phi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

Начало изучению этих уравнений было положено Монжем (Histoire de l'Académie des Sciences, année 1784, p.p. 502—576). Изучение способа происхождения некоторых поверхностей привело его к установлению формы интегрального эквивалента уравнения (1). Но эти глубокие соображения оставались, повидимому, в забвении в течение более, чем века. Это особенно удивительно потому, что сам знаменитый автор, очевидно, вполне сознавая всю важность полученных результатов, совершенно определенно указывал на их большое значение и для анализа и для геометрии. Может быть, это можно несколько извинить тем, что Монж, полагаясь на свои огромные интуитивные способности, не дал себе труда обработать окончательно свои доказательства. Некоторые из его рассуждений, если брать их буквально, могут показаться даже неправильными, но это всегда относится только к их форме. Сущность же везде не только правильна, но и весьма глубока.

Честь воскрешения этих исследований принадлежит Ed. Goursat, который опубликовал в 1905 году (Bulletin de la Société mathématique de France) мемуар, содержащий обобщение результатов Монжа. Некоторые замечания по этому вопросу опубликованы Zervos'ом в Comptes Rendus того же года.

В 1913 г. (Mathem. Annalen, t. 73, p. 95) появился мемуар D. Hilbert'a, и непосредственно за ним мемуар его ученика

W. Gross'a, излагающего более подробно некоторые части этой теории.

В своем мемуаре, содержащем, как всегда, глубокие и оригинальные мысли, D. Hilbert показывает, что результаты Монжа являются частным случаем некоторой более общей теории (т. н. классов дифференциальных уравнений), которой и посвящена главным образом его статья.

Наконец, следует упомянуть недавние работы E. Cartan (Comptes Rendus t. 158; Journal für Mathem t. 145; Bull. Darboux t. 42), Zervos (Journal fur Mathem t. 143) и W. Gross (Math. Annal. t. 76).

Все эти авторы занимаются главным образом распространением результатов Монжа на системы неопределенных уравнений. Первоначальный случай одного уравнения (1), повидимому, считают уже исчерпанным. Мне кажется, однако, что и в нем есть некоторые стороны, которые до сих пор не были достаточно освещены и которые заслуживают дальнейшего изучения. Этому и посвящена настоящая статья.

2. Итак, я рассматриваю уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \Phi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

Обычный способ трактовки этого уравнения следующий: считают одну из неизвестных функций, например y, произвольною известною функциею от x *) и затем интегрируют оставшееся уравнение относительно z.

Однако, при таком способе остается в тени все существенное, что есть в разбираемом вопросе. Чтобы обнаружить это существенное, я поступаю так.

Я представляю интегральный эквивалент уравнения (1) такою системою:

$$\begin{aligned} F\ (x, y, z, u) &= \varphi\ (u) \\ F_u'\ (x, y, z, u) &= \varphi'\ (u) \\ F_u''(x, y, z, u) &= \varphi''(u), \end{aligned} \tag{2}$$

где φ произвольная функция, а u—параметр, подлежащий исключению из уравнений (2), если желаем получить прямо зависимости между x, y и z.

Мы докажем, что можно подыскать определенную функцию F так, что *все решения* уравнения (1) (кроме некоторых, особо замечательных) могут быть получены из уравнений (2), подбирая соответственным образом функцию φ. Поэтому я буду называть функцию F *резольвентою* уравнения (1), а функцию φ—*характеристическою*, ибо выбором ее определяется то решение y, z, которое мы в данный момент рассматриваем.

---

*) Или, общнее, принимают произвольную зависимость между x, y и z.

Те исключительные решения, которые не могут быть выведены из системы (2) ни при каком выборе функции φ, суть (как мы увидим) те, которые определяются системою

$$F(x, y, z, \alpha) = \beta, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = \gamma,$$

получающеюся через замену u, $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ тремя произвольными постоянными α, β, γ в двух первых уравнениях системы (2).

Существование таких исключительных решений было уже отмечено Hilbert'ом *) в его вышеупомянутой работе (хотя и с другой точки зрения), но мне кажется, что их роль не была достаточно оценена. У Hilbert'а они являются чем то второстепенным, почти паразитическим, так что могут даже быть устранены посредством некоторых преобразований (см. конец его мемуара), между тем как мои исследования показывают, что они являются как раз самыми важными, потому что из них можно получить все остальные решения простой вариацией постоянных. Отмеченный Hilbert'ом факт исчезновения этих решений имеет, по моему мнению, совсем другую причину, именно ту, что линейные уравнения не имеют особенных решений (см. ниже).

3. Дифференцируя уравнения (2), мы, очевидно, получаем

$$F'_x\,dx + F'_y\,dy + F_z\,dz = 0$$
$$F''_{xu}\,dx + F''_{yu}\,dy + F''_{zu}\,dz = 0$$

Положим для простоты **)

$$\Delta_x = F'_z\,F''_{uy} - F'_y F''_{zu}$$
$$(4) \qquad \Delta_y = F'_x\,F''_{zu} - F'_z\,F''_{xu}$$
$$\Delta_z = F'_y\,F''_{xu} - F'_x\,F''_{yu}.$$

Тогда уравнения (3) дадут:

$$\frac{dx}{\Delta_x} = \frac{dy}{\Delta_y} = \frac{dz}{\Delta_z} \text{ ***)}.$$

Подставляя в уравнение (1), мы получаем для определения резольвенты F такое уравнение второго порядка

$$(5) \qquad \Delta_z = \Phi\left(x, y, z, \frac{\Delta_y}{\Delta_x}\right)\Delta_x.$$

---

*) „Discriminierende“ или „ausgeschlossene Lösungen“.

**) Понятно, как нужно переменить анализ, если бы было $F_z' = 0$.

***) Мы предположим здесь и во всем дальнейшем, что миноры Δ_x, Δ_y, Δ_z не все нули зараз, так как иначе разрешимость системы (2) была бы под сомнением. Обращение Δ_z в нуль не опасно.

Положим еще для простоты

$$(6)\qquad \frac{F_x'}{F_z'}=G,\ \frac{F_y'}{F_z'}=H.$$

Отсюда выходит

$$\Delta_x=\frac{\partial H}{\partial u}F_z'^2,\ \Delta_y=-\frac{\partial G}{\partial u}F_z'^2,\ \Delta_z=\left(H\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial H}{\partial u}\right)F_z'^2.$$

Следовательно, подставляя в (5), получаем

$$(7)\qquad H\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial H}{\partial u}\,\Phi\left(x,\ y,\ z-\frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{\frac{\partial H}{\partial u}}\right).$$

Отбрасывая не представляющий интереса случай, когда H не содержит u, мы будем рассматривать G, как функцию от H, и тогда уравнение (7) обращается в уравнение *типа Клеро*

$$G=H\frac{\partial G}{\partial H}-\Phi\left(x,\ y,\ z-\frac{\partial G}{\partial H}\right).$$

Его общий интеграл будет

$$G=-H\,\Gamma-\Phi\,(x,\ y,\ z,\ \Gamma),$$

где произвольная постоянная Γ может быть заменена любою функцией ω от x, y, z. Это соотношение переписывается так:

$$F_x'+\omega F_y'+F_z'\,\Phi\,(x,\ y,\ z,\ \omega)=0.$$

Назовем через A и B два независимых интеграла системы

$$(8)\qquad \frac{dx}{1}=\frac{dy}{\omega}=\frac{dz}{\Phi\,(x,\ y,\ z,\ \omega)}.$$

Мы будем иметь

$$F=\Pi\,(A,\ B,\ u)\ (\Pi-\text{произвольно}).$$

Следовательно интегральный эквивалент (2) принимает вид

$$\begin{aligned}\Pi\ (A,\ B,\ u)&=\varphi\ (u)\\ \Pi'_u(A,\ B,\ u)&=\varphi'(u)\\ \Pi''_u(A,\ B,\ u)&=\varphi''(u).\end{aligned}$$

При произвольных Π и φ эти уравнения дают

$$A=Const.,\ B=Const.,\ u=Const.$$

Два первые из этих уравнений определяют y и z, как функции от x. Так как ω было произвольно, то можно выбрать по произволу A. Соответствующее ω получится из уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\omega\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}\,\Phi\,(x,\ y,\ z,\ \omega)=0,$$

а B определится, как второй независимый интеграл системы (8).

Это приводит нас к обычной методе: задать себе произвольное соотношение

$$A\,(x,\ y,\ z)=0$$

и проинтегрировать уравнение (1), принимая в расчет это соотношение,

Если данное уравнение (1) линейно, то эта метода единственная, чем и объясняется подмеченный Hilbert'ом факт исчезновения особенных решений (так как его преобразование приводит уравнение к линейному). Но, если уравнение (1) не линейное, то уравнение Клеро имеет еще *особенные* решения, и они приводят к существенно новым результатам.

Это особенное решение дается совокупностью уравнений

$$G=-H\Gamma-\Phi\,(x,\ y,\ z,\ \Gamma)$$
$$O=-H-\Phi'_{\Gamma}\,(x,\ y,\ z,\ \Gamma),$$

или

$$F'_x+\Gamma F'_y+F'_z\,\Phi\,(x,\ y,\ z,\ \Gamma)=0$$
$$(9)\qquad F'_y+F'_z\,\Phi'_{\Gamma}\,(x,y,\ z,\Gamma)=0.$$

Исключая отсюда Γ, мы получаем уже не линейное уравнение для определения резольвенты F.

Если мы найдем для этого уравнения решение, содержащее одну произвольную постоянную (не аддитивную и не мультипликативную), то, заменив ее через u, мы и получим требуемую резольвенту F.

4. Итак, если F есть резольвента и миноры Δ_x, Δ_y, Δ_z не все зараз нули, то всякая система значений x, y, z, удовлетворяющих уравнениям (2), будет удовлетворять и предложенному уравнению (1). Действительно, тогда dx, dy, dz будут пропорциональны Δ_x, Δ_y, Δ_z, и так как F удовлетворяет уравнению (5), то будет выполнено и уравнение (1).

Покажем теперь наоборот, что всякое решение уравнения (1) можно получить из системы (2), подобрав должным образом функцию φ, за исключением тех решений, которым соответствует предположение $u=Const.$ или же производная F'_z равна нулю (конечно, всегда предполагается разрешимость системы (2)).

Действительно, пусть y и z будут какие угодно функции от x, удовлетворяющие уравнению (1). Пусть $F\,(x,\ y,\ z,\ u)$

будет любая резольвента того же уравнения, удовлетворяющая только что поставленным условиям.

Оставляя в стороне неинтересный случай, когда $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ не содержит u, определим u, как функцию от x, из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} \tag{10}$$

где, понятно, y и z заменены их выражениями через x.

Случай, когда из этого уравнения получится для u постоянное число, требует особого разбора, как упомянуто выше. Мы скажем о нем несколько ниже.

Если же u окажется функцией от x, то мы затем определим характеристическую функцию $\varphi(u)$ из уравнения

$$F(x, y, z, u) = \varphi(u), \tag{11}$$

для чего, понятно, достаточно заменить x, y, z их выражениями через u.

Мы имеем тождественно

$$\Delta_z = -\frac{F_x'}{F_z'}\Delta_x - \frac{F_y'}{F_z'}\Delta_y, \tag{12}$$

и отсюда, на основании уравнения (10),

$$\Delta_z = -\frac{F_x'}{F_z'}\Delta_x - \frac{F_y'}{F_z'} \cdot \frac{dy}{dx}\Delta_x, \tag{12*}$$

и так как F, будучи резольвентой, должна удовлетворять уравнению (5), то последнее уравнение переписывается так

$$-\frac{F_x'}{F_z'} - \frac{F_y'}{F_z'} \cdot \frac{dy}{dx} = \Phi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right), \tag{12**}$$

откуда, в силу данного уравнения (1), мы и выводим

$$F_x' \, dx + F_y' \, dy + F_z' \, dz = 0. \tag{13}$$

После этого дифференцирование уравнения (11) дает

$$F_u' \, du = \varphi'(u) \, du,$$

и, так как по условию u не постоянная, то мы отсюда и выводим

$$F_u' = \varphi'(u). \tag{14}$$

Далее, из комбинации уравнений (12*), (12**) и (1) выводим

$$\frac{\Delta_z}{\Delta_\kappa} = \frac{dz}{dx}$$

и, следовательно, мы приходим к пропорциям

$$\frac{dx}{\Delta_x} = \frac{dy}{\Delta_y} = \frac{dz}{\Delta_z}. \tag{15}$$

С другой стороны, имеем тождественно

$$F_{ux}''\Delta_x + F_{uy}''\Delta_y + F_{uz}''\Delta_z = 0,$$

откуда, на основании пропорции (15),

$$F_{ux}''dx + F_{uy}''dy + F_{uz}\,dz = 0. \tag{16}$$

Если теперь продифференцировать уравнение (14), то, на основании (16), получим:

$$F_{uu}''du = \varphi''(u)\,du$$

и, следовательно,

$$F_{uu}'' = \varphi''(u).$$

Таким образом и показано, что всякая система решений уравнения (1), за вышеупомянутыми исключениями, может быть получена через решение уравнений интегрального эквивалента

$$F = \varphi(u),\ F_u' = \varphi'(u),\ F_{uu}'' = \varphi''(u)$$

при некотором подборе функции $\varphi(u)$.

Примечание 1. Те решения (если таковые существуют), которые соответствуют обращению в нуль миноров Δ_x, Δ_y, Δ_z, или производной F_z' требуют, конечно, особого детального исследования и, вообще говоря, не получаются из вышеупомянутого интегрального эквивалента.

Примечание 2. Решения, для которых $u = Const.$, получаются так.

Совершенно так же, как и выше, мы получим и для них уравнения

$$F_x'\,dx + F_y'\,dy + F_z'\,dz = 0 \tag{13}$$

$$F_{ux}''dx + F_{uy}''dy + F_{uz}''dz = 0, \tag{16}$$

но истолкование их будет совсем иное. Именно, так как теперь $u = Const.$, то, заменяя u через α, мы получим из (13) и (16) такие уравнения

$$\begin{aligned} &F(x, y, z, \alpha) = \beta \\ &F_\alpha'(x, y, z, \alpha) = \gamma, \end{aligned} \tag{17}$$

где β и γ новые произвольные постоянные.

Из этих двух уравнений мы и определяем y и z как функции от x (ср. выше стр. 70).

5. Как пример, составим уравнение резольвенты для общего уравнения второй степени

$$(18)\qquad Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + Ddxdy + Edxdz + Jdydz = 0,$$

где A, B, $C, \ldots, J$, суть функции от x, y, z.

Нужно будет различить несколько случаев.

I. C не $= 0$.

Положим для простоты

$$M = E^2 - 4AC,\ N = EJ - 2CD,\ P = J^2 - 4BC.$$

I-a. P не $= 0$. Уравнение резольвенты будет

$$2PCF_x' = (EP - JN)\ F_z' + 2CNF_y' \pm$$
$$\pm \sqrt{PM - N^2}\ \sqrt{PF_z'^2 + (JF_z' - 2\,CF_y')^2}.$$

I-b. $P = 0$. Уравнение резольвенты таково

$$4\,CNF_x' + (2\,NE - MJ)\ F_z' + 2\,MCF_y' - \frac{N^2F_z'^2}{JF_z' - 2\,CF_y'}.$$

II. $C = 0$, но J не $= 0$.

Положим для простоты

$$K = JED - AJ^2 - BE^2.$$

Получим

$$E\sqrt{JF_y' - BF_z'} \pm \sqrt{KF_z'} = \pm J\sqrt{EF_x' - AF_z'}.$$

III. $C = 0$ и $J = 0$.

$$DF_z' - EF_y' = \pm 2\sqrt{BF_z'\,(AF_z' - EF_x')}.$$

6. Даже самые простые примеры дают иногда повод к небезинтересным замечаниям. Возьмем, например, наипростейшее уравнение

$$4\,x\,dydz = dx^2.$$

Уравнение резольвенты будет

$$xF_x'^2 = F_x'F_y',$$

и можно положить

$$F = y + \frac{x}{u - z}.$$

Интегральный эквивалент будет

$$y + \frac{x}{u - z} = \varphi\ (u),\ -\frac{x}{(u-z)^2} = \varphi'\ (u),\ \frac{2x}{(u-z)^3} = \varphi''\ (u),$$

откуда

$$x = -\frac{4\,[\varphi'(u)]^3}{[\varphi''(u)]^2},\quad y = \varphi(u) - \frac{2\,[\varphi'(u)]^2}{\varphi''(u)},\quad z = u + \frac{2\varphi'(u)}{\varphi''(u)}.$$

Исключительные решения будут

$$y = \beta - \gamma\sqrt{x},\quad z = \alpha - \frac{\sqrt{x}}{\gamma}\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ — постоянные}).$$

С другой стороны можно, очевидно, представить интегральный эквивалент и в такой форме

$$y = \theta(x),\quad z = \int \frac{dx}{4x\theta'(x)}\quad (\theta \text{ — произвольно}).$$

Эта последняя форма содержит произвольную функцию от *неизменного* аргумента, но под знаком интеграла, первая же не содержит никакого интегрирования, но за то *аргумент и произвольной функции сам меняется вместе с формою этой функции* φ.

Получается такое впечатление, что произвольные функции от *переменного* аргумента могут быть равносильны интегралам, в которых подъинтегральная функция содержит произвольные функции, а может быть и их производные.

Я усматриваю здесь зародыш новой ветви анализа—учения о преобразованиях произвольных функций друг в друга. Отдельные примеры таких преобразований встречались уже давно при рассмотрении уравнений с частными производными *).

Было бы желательно попробовать развить и систематизировать эти примеры. Может быть тогда вся теория дифференциальных уравнений представилась бы в новом свете—как учение о произвольных элементах и преобразованиях их друг в друга.

7. Приведем теперь более сложный пример:

$$\frac{dz}{dx} + 2xyz + 2y^3 - \frac{5y^2}{x^2} + \frac{6y}{x^4} = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} - x^2 z - xy^2 + \frac{2}{x^3}\right).$$

Резольвенту можно взять в такой форме

$$F = x^2 y + \frac{x^3}{3u} + \log\left(uz + \frac{uy^2}{x} - \frac{2uy}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Отыскание этой резольвенты не было делом случая: это есть частный случай некоторого довольно общего исследования,

---

*) Один из наиболее тонких примеров см. у Darboux „Leçons sur la thèorie des surfaces“ III partie p. 272. § 715.

которое между прочим привело меня к такой теореме: если функция $\Pi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Pi_y'}{\Pi_z'}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Pi_x'}{\Pi_z'}\right),$$

то резольвента уравнения

$$\frac{dz}{dx}+\frac{\Pi_y'}{\Pi_z'}=\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\Pi_y'}{\Pi_z'}\right)^2$$

удовлетворяет следующим уравнениям

$$\frac{F_x'}{\Pi_z'+u\Pi_y'+u^2\Pi_x'}=\frac{F_y'}{u\Pi_z+u^2\Pi_y'}=\frac{F_z'}{u^2\Pi_z'}.$$

Наш пример и соответствует случаю

$$\Pi=e^{x^2y}\left(z+\frac{y^2}{x}-\frac{2y}{x^3}\right).$$

Он был подобран так, чтобы элементарные приемы решений не были приложимы.

8. Наконец посмотрим, как связано понятие о резольвенте с обычным приемом решения, когда, например, задается y, как функция от x, и затем определяется z.

Пусть будет дано

$$y=\theta(x) \tag{19}$$

Требуется в интегральном эквиваленте (2) определить соответствующую форму характеристической функции $\varphi(u)$. Подставляя вместо y его выражение (19), мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} &F(x, \theta(x), z, u)=\varphi(u)\\ &F_u'(x, \theta(x), z, u)=\varphi'(u)\\ &F_{uu}''(x, \theta(x)\ z, u)=\varphi''(u). \end{aligned} \tag{20}$$

Если из них исключить x и z, то мы получим уравнение (второго порядка) для определения функции $\varphi(u)$.

Казалось бы, нужно будет это уравнение проинтегрировать, но в действительности этого делать не надо, так как знание резольвенты дает возможность прямо написать общий интеграл этого уравнения, именно он будет

$$\varphi(u)=F(C, \theta(C), C_1, u), \tag{21}$$

где C и C_1—произвольные постоянные.

Действительно, достаточно сличить уравнения (20) с уравнением (21) и его производными, чтобы убедиться в том, что уравнение для $\varphi(u)$ действительно получается через исключение постоянных C и C_1.

С другой стороны ясно, что этот общий интеграл, вообще говоря, не даст нам решения задачи, ибо, сличая уравнения (21) с (20), мы видим, что получается такое решение

$$x = C,\ z = C_1,\ y = \theta\ (C),$$

при котором уравнение (1) теряет смысл.

Поэтому истинное значение $\varphi\ (u)$ дается *особенным* решением уравнения для $\varphi\ (u)$, которое получится через решение системы

$$(22)\qquad \begin{aligned} &(F_C{}' + F_\theta{}'(C))\ dC + F_{C_1}{}'\ dC_1 = 0 \\ &(F_{uC}{}'' + F_{u\theta}{}''\ \theta'(C))\ dC + F_{dC_1}{}'' = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом вопросе совершенно неожиданно выступают на первый план особенные решения.

Sur les équations différentielles indéterminées (I-re communication).

B. Kojalovitch.

L'auteur donne l'équivalent intégral de l'équation

$$(1)\qquad \frac{dz}{dx} = \Phi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx}\right)$$

sous la forme

$$(2)\qquad F\ (x,\ y,\ z,\ u) = \varphi\ (u),\ F_u{}' = \varphi'\ (u),\ F_{uu}{}'' = \varphi''\ (u)$$

et il démontre qu'on peut obtenir toutes les solutions de (1) sauf certaines solutions exceptionnelles, en faisant varier seulement la fonction $\varphi\ (u)$, dite caractéristique. Les solutions exceptionnelles correspondent à de valeurs constantes de u.

L'auteur établit l'équation que doit vérifier la fonction F (dite la résolvante) et applique cette équation à l'équation générale (1) du second dégré. Enfin il montre la liaison entre cette méthode et la méthode ordinaire.

О колебаниях согнутого стержня.

Е. Л. Николаи.

В известном сочинении Chladni „Die Akustik" *) имеется описание следующего опыта. Желая выяснить характер колебаний камертона, Ghladni, взяв прямолинейный стержень, гнул его посередине и наблюдал происходящие при гнутии стержня изменения его колебаний. Теоретического освещения эти наблюдения Chladni повидимому не получили. Некоторое отношение к этому вопросу имеет одна работа Lamb'а **), в которой рассматриваются колебания стержня, имеющего форму дуги окружности весьма малой кривизны (со свободными концами). Исследуя колебания, происходящие в плоскости изогнутого стержня, Lamb нашел, что незначительное искривление первоначально прямолинейного стержня сопровождается понижением частот его колебаний.

В настоящей заметке сделана попытка осветить вопрос о колебаниях стержня, согнутого посередине. Согнутый стержень мы рассматриваем как систему, состоящую из двух прямолинейных стержней одинаковой длины, жестко соединенных между собой под произвольным углом ***). Мы рассматриваем как колебания в плоскости согнутого стержня, так и колебания, перпендикулярные к этой плоскости. Исследование показывает, что гнутие стержня в его средней точке может сопровождаться как понижением, так и повышением частот отдельных его колебаний.

§ 1. Дифференциальные уравнения задачи.

Тонкий однородный призматический стержень M_1M_2 длины $2l$ согнут посередине в точке O (черт. 1). Обозначим угол $M_1OM_2 = 2\theta$. Плоскость, в которой лежит ось согнутого

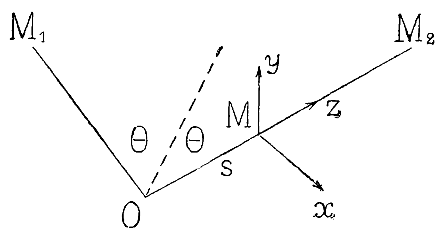
*) E. F. F. Chladni. Die Akustik (Leipzig, 1802) p. 111.

**) H. Lamb. On the flexure and the vibrations of a curved bar. Proc. of the London Math Soc. vol. 19 (1889) p. 365.

***) О колебаниях систем стержней см. H. Reissner. Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks. Zeitschr. für Bauwesen. 53 (1903) p. 135.

стержня, назовем „плоскостью оси“ стержня; мы будем предполагать, что в этой плоскости лежит одна из главных центральных осей инерции поперечных сечений стержня. Будем рассматривать согнутый стержень M_1OM_2 как систему, состоящую из двух прямолинейных стержней M_1O и OM_2, жестко соединенных в точке O, и исследуем колебания этой системы, предполагая концы стержня M_1 и M_2 свободными.

Возьмем на оси стержня точку M и обозначим расстояние $OM = s$, при чем условимся считать $s > 0$, если точка M принадлежит части стержня OM_2, и $s < 0$, если точка M лежит на части стержня M_1O. В точке M проведем взаимно перпендикулярные оси x, y, z; ось z направим по оси стержня (в сторону возрастающих s), ось x — по той главной оси инерции сечения стержня, которая лежит в плоскости оси стержня, ось y — по главной оси инерции сечения, перпендикулярной к плоскости оси стержня.



Черт. 1.

При исследуемом нами колебательном движении стержня элемент стержня, выделенный около точки M, получает ничтожно малые перемещения u, v, w, по осям x, y, z; кроме того тот же элемент стержня вращается на ничтожно малые углы (обозначим эти углы через α, β, γ) вокруг осей x, y, z. Углы α и β связаны с перемещениями u и v зависимостями

$$\alpha = -\frac{\partial v}{\partial s}, \quad \beta = \frac{\partial u}{\partial s} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Величины u, v, w, и γ удовлетворяют известным дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{B}{\rho\omega}\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{A}{\rho\omega}\frac{\partial^4 v}{\partial s^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{C}{(A+B)}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} = 0,$$

где A и B—главные жесткости стержня при изгибе, C—жесткость при кручении, E—модуль упругости, ρ—плотность,

ω—площадь поперечного сечения стержня. Первые два уравнения соответствуют поперечным колебаниям стержня, третье и четвертое уравнения—продольным и крутильным колебаниям.

§ 2. Пограничные условия.

Обратимся теперь к пограничным условиям, которым должны удовлетворять величины u, v, w и γ.

Заметим прежде всего, что, обозначая через V_x, V_y, V_z, L_x, L_y, L_z, проекции на оси x, y, z силы V (приложенной в точке M) и момента L, к которым приводятся усилия, действующие в сечении M на часть стержня M_1M со стороны части стержня MM_2, имеем зависимости

$$\left.\begin{aligned} V_x &= -B\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}, \quad V_y = -A\frac{\partial^3 v}{\partial s^3}, \quad V_z = E\omega\frac{\partial w}{\partial s} \\ L_x &= -A\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \quad L_y = B\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad L_z = C\frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(2)$$

Мы предполагаем концы стержня M_1 и M_2 свободными. Следовательно, при $s=-l$ и $s=l$ имеем условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial s^3}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial s}=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}=0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial s^3}=0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s}=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Выясним условия, которые должны быть удовлетворены в точке O (при $s=0$).

Условимся отмечать индексами 1 и 2 значения, получаемые входящими в наше рассмотрение величинами (напр. u, $\frac{\partial u}{\partial s}$ и т. д.) при $\lim s=-0$ и $\lim s=+0$. Заметим теперь, что перемещение, получаемое точкой O нашего стержня, можно рассматривать, с одной стороны, как составное из перемещений u_1, v_1, w_1; с другой стороны, то же перемещение точки O складывается из перемещений u_2, v_2, w_2. Точно так же ничтожно малое вращение элемента стержня, выделенного при точке O, можно рассматривать как составное либо из вращений α_1, β_1, γ_1, либо из вращений α_2, β_2, γ_2. Проектируя перемещение точки O, а также вращение элемента, выделенного около точки O, на биссектриссу угла M_1OM_2, на перпендикуляр к этой биссектриссе и на ось y и имея в виду зависимости (1), получаем

$$\left.\begin{aligned} (u_1+u_2)\cos\theta-(w_1-w_2)\sin\theta &= 0 \\ (u_1-u_2)\sin\theta+(w_1+w_2)\cos\theta &= 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_1-\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_1+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_2\right]\cos\theta+(\gamma_1-\gamma_2)\sin\theta=0\\ \left[\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_1-\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_2\right]\sin\theta-(\gamma_1+\gamma_2)\cos\theta=0\\ v_1-v_2=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(6)$$

С другой стороны, рассматривая условия равновесия элемента, выделенного при точке O, и имея в виду равенства (2), приходим к зависимостям

$$\left.\begin{aligned}B\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\right)_1+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\right)_2\right]\cos\theta+\\ +E\omega\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_1-\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_2\right]\sin\theta=0\\ B\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\right)_1-\left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\right)_2\right]\sin\theta-\\ -E\omega\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_1+\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_2\right]\cos\theta=0\\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)_1-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)_2=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(7)$$

$$\left.\begin{aligned}A\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_1+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_2\right]\cos\theta+\\ +C\left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}\right)_1-\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}\right)_2\right]\sin\theta=0\\ A\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_1-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_2\right]\sin\theta-\\ -C\left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}\right)_1+\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}\right)_2\right]\cos\theta=0\\ \left(\frac{\partial^3 v}{\partial s^3}\right)_1-\left(\frac{\partial^3 v}{\partial s^3}\right)_2=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(8)$$

Пограничные условия (5), (6), (7), и (8) устанавливают связь между величинами u, v, w и γ; поперечные, продольные и крутильные колебания согнутого стержня связаны между собой. Однако легко заметить, что в условия (6) и (7) входят лишь величины u и w, а в условия (6) и (8)—лишь величины v и γ. Отсюда следует, что можно различить два рода независимых друг от друга колебаний согнутого стержня. Один род колебаний характеризуется равенствами $v=0$ и $\gamma=0$; в этом случае перемещения точек оси стержня лежат в плоскости оси; назовем эти колебания „плоскими" колебаниями. Другие колебания характеризуются тем, что $u=0$ и $w=0$; перемещения точек оси стержня перпендикулярны к плоскости оси стержня; эти колебания будем называть „неплоскими“ колебаниями.

§ 3. Плоские колебания.

Положим $v=0$ и $\gamma=0$. Для определения величин u и w имеем дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{B}{\rho\omega}\frac{\partial^4 u}{\partial s^4}=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0$$

и пограничные условия (3), (5) и (7).

Желая определить главные колебания, полагаем

$$u=U\sin\lambda t,\quad w=W\sin\lambda t,$$

где U и W — функции от s, а λ—постоянное число. Введем обозначение

$$\frac{\lambda^2\rho\omega}{B}=\frac{m^4}{l^4},$$

где m — отвлеченное число; обозначим также радиус инерции сечения стержня относительно оси y через δ (т. е. положим $B=E\omega\delta^2$). Тогда будем иметь для определения нормальных функций U и W дифференциальные уравнения

$$\frac{d^4U}{ds^4}-\frac{m^4}{l^4}U=0,\ \frac{d^2W}{ds^2}+\frac{m^4\delta^2}{l^4}W=0.$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие пограничным условиям (3), суть

$$U=A_1\left[\cos h\,m\left(1+\frac{s}{l}\right)+\cos m\left(1+\frac{s}{l}\right)\right]+$$
$$+A_2\left[\sin h\,m\left(1+\frac{s}{l}\right)+\sin m\left(1+\frac{s}{l}\right)\right],\ (-l<s<0)$$
$$U=B_1\left[\cos h\,m\left(1-\frac{s}{l}\right)+\cos m\left(1-\frac{s}{l}\right)\right]+$$
$$+B_2\left[\sin h\,m\left(1-\frac{s}{l}\right)+\sin m\left(1-\frac{s}{l}\right)\right],\ (0<s<l)$$
$$W=K\cos\frac{m^2\delta}{l}\left(1+\frac{s}{l}\right),\ (-l<s<0)$$
$$W=L\cos\frac{m^2\delta}{l}\left(1-\frac{s}{l}\right),\ (0<s<l),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, K и L—постоянные произвольные.

Для определения этих постоянных имеем 6 условий (5) и (7). Легко заметить, что эти условия приводят к уравнениям между постоянными произвольными, из коих три уравнения содержат лишь величины A_1+B_1, A_2+B_2 и $K-L$, а другие три уравнения—только величины A_1-B_1, A_2-B_2 и $K+L$. Отсюда следует, что исследуемые нами главные колебания стержня распадаются на два типа (совершенно так же, как колебания прямолинейного стержня). Один тип характеризуется тем, что $A_1=B_1$, $A_2=B_2$ и $K=-L$. В этом случае в точках стержня, равноудаленных от его концов, перемещения u имеют одинаковые значения; такие колебания назовем колебаниями „симметричного" типа. Другой тип характеризуется равенствами $A_1=-B_1$, $A_2=-B_2$ и $K=L$. В таком случае точкам стержня, равноудаленным от его концов, соответствуют перемещения u, численно равные, но противоположные по знаку; эти колебания назовем колебаниями „асимметричного" типа.

§ 4. Колебания симметричного типа.

Полагаем $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, $K=-L$. Для определения постоянных A_1, A_2 и K имеем уравнения

$$[A_1 (\cos hm+\cos m)+A_2 (\sin hm+\sin m)] \cos\theta -$$

$$-K\cos\frac{m^2\delta}{l} \sin\theta=0$$

$$\frac{m\delta}{l} [A_1 (\sin hm+\sin m)+A_2 (\cos hm-\cos m)] \sin\theta+$$

$$+K\sin\frac{m^2\delta}{l} \cos\theta=0$$

$$A_1 (\sin hm-\sin m)+A_2 (\cos hm+\cos m)=0.$$

Исключение постоянных A_1, A_2 и K приводит к уравнению

$$1+\cos hm \cos m+$$

$$+\frac{m\delta}{l} \operatorname{ctg}\frac{m^2\delta}{l} (\cos hm \sin m+\sin hm \cos m) \operatorname{tg}^2\theta=0\ldots(9).$$

Этим уравнением определяются числа m, а следовательно, и частоты λ главных колебаний симметричного типа. Как видно, частоты λ зависят, как от величины отношения $\frac{\delta}{l}$, так и от величины угла θ. Изгибу первоначально прямолинейного стержня соответствует изменение угла θ от $\theta=90^\circ$ до $\theta=0$. Рассмотрим, как изменяются при этом частоты λ.

Если отношение $\frac{\delta}{l}$ весьма мало, то для не слишком больших значений m (т. е. для не слишком высоких обертонов) мы можем приближенно положить

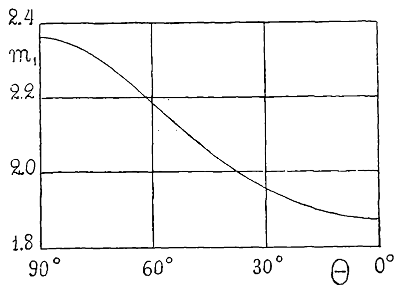
$$ctg \frac{m^2\delta}{l} = \frac{l}{m^2\delta}.$$

В таком случае уравнение (9) получает более простой вид

$$m\,(1+\cos hm\,\cos m)+(\cos hm\,\sin m+ \\ +\sin hm\,\cos m)\,tg^2\theta=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Исследуя знак производной $\frac{dm}{d\theta}$, легко заметить, что при изгибе стержня (при уменьшении угла θ от $\theta=90^\circ$ до $\theta=0$) числа m уменьшаются, т. е. частоты λ *понижаются*. Полагая $\theta=90^\circ$ (прямолинейный стержень) в уравнении (10), получаем

$$\cos hm\,\sin m+\sin hm\,\cos m=0.$$



Черт. 2.

Корни этого уравнения суть

$$m_1=2{,}3650,\ m_2=5{,}4978,\ m_3=8{,}6394,\ldots m_k=\frac{(4k-1)\pi}{4},\ldots$$

При $\theta=0$ уравнение (10) обращается в уравнение

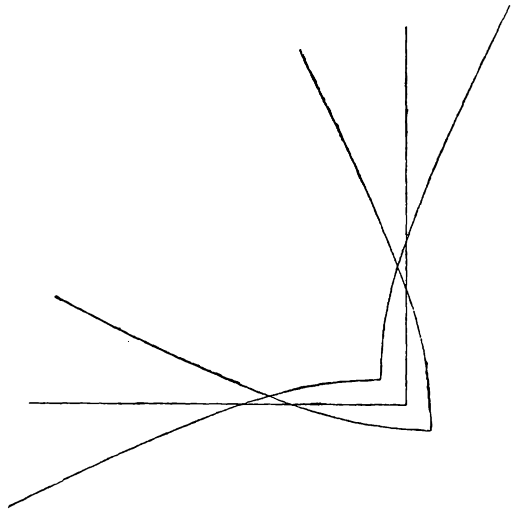
$$1+\cos hm\,\cos m=0,$$

корни которого суть

$$m_1=1{,}8751,\ m_2=4{,}6941,\ m_3=7{,}8548,\ldots m_k=\frac{(2k-1)\pi}{2},\ldots$$

На черт. 2 представлен графически ход изменения первого корня m_1 уравнения (10) при изменении угла θ от $\theta=90^\circ$ до

$\theta = 0$. На черт. 3 изображена форма вибрирующего стержня, согнутого под прямым углом ($\theta = 45°$), при колебаниях, соответствующих основному тону стержня. Заметим, что в этом случае $m_1 = 2{,}054$.



Черт. 3.

§ 5. Колебания асимметричного типа.

Положим теперь $A_1 = -B_1$, $A_2 = -B_2$, $K = L$. Условия (5) и (7) приводят к трем уравнениям между постоянными A_1, A_2 и K; исключая величины A_1, A_2 и K из этих уравнений, получаем уравнение

$$\sin hm \cos m - \cos hm \sin m + \\ + \frac{m\delta}{l} \operatorname{ctg} \frac{m^2\delta}{l} (\cos hm \cos m - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta = 0, \ldots\ldots (11)$$

которым определяются частоты колебаний асимметричного типа.

Для наинизших обертонов $\left(\frac{m^2\delta}{l} \text{— малая величина}\right)$ это уравнение может быть заменено приближенным уравнением

$$m (\sin hm \cos m - \cos hm \sin m) + \\ + (\cos hm \cos m - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

При $\theta = 90°$ корни этого уравнения суть

$$m_1' = 3{,}9266,\ m_2' = 7{,}0686, \ldots m_k' = \frac{(4k+1)\pi}{4}, \ldots\ldots$$

При $\theta = 0$ корни того же уравнения суть

$$m_1' = 4{,}7300,\ m_2' = 7{,}8532, \ldots m_k' = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \ldots\ldots$$

Как видно, при изгибе стержня частоты наинизших обертонов асимметричного типа *повышаются*. При этом колебание прямолинейного стержня с 3 узлами (соответствующее корню $m_1' = 3{,}9266$) превращается в колебание с 4 узлами (средний узел превращается в два отдельных узла); колебание с 5 узлами превращается в колебание с 6 узлами и т. д.

§ 6. Неплоские колебания.

Остановимся теперь вкратце на неплоских колебаниях нашего стержня. Мы полагаем $u = 0$ и $w = 0$. Для определения величин v и γ имеем дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{A}{\rho\omega} \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{C}{(A+B)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} = 0$$

и пограничные условия (4), (6) и (8).

Определяя главные колебания и поступая совершенно так же, как в случае плоских колебаний, убедимся, что и здесь можно различить главные колебания „симметричного" типа (перемещения v имеют одинаковые значения в точках стержня, равноудаленных от его концов) и „асимметричного" типа (в точках стержня, равноудаленных от его концов, перемещения v имеют значения численно равные, но противоположные по знаку),

Обозначим частоту главных колебаний через λ и положим

$$\frac{\lambda^2 \rho\omega}{A} = \frac{n^4}{l^4}.$$

Обозначим также радиус инерции сечения стержня относительно оси z через ε (т. е. положим $A + B = E\omega\varepsilon^2$). Тогда для определения частот λ главных колебаний „симметричного" типа будем иметь уравнение

$$1 - \cos hn\ \cos n + n \sqrt{\frac{C}{A}}\ \frac{\varepsilon}{l}\ tg\left(\frac{n^2\varepsilon}{l}\sqrt{\frac{A}{C}}\right)(\sin hn \cos n + $$
$$+ \cos hn\ \sin n)\ tg^2\theta = 0.$$

Отсюда при малых значениях $\frac{n^2\varepsilon}{l}\sqrt{\frac{A}{C}}$ получаем приближенное уравнение

$$1 - \cos hn\ \cos n + n^3 \frac{\varepsilon^2}{l^2}\ (\sin hn\ \cos n + \cos hn\ \sin n)\ tg^2\theta = 0.$$

Это уравнение дает возможность заключить, что изгиб стержня сопровождается *повышением* частот наинизших обертонов „симметричного" типа. Для основного тона величина n возрастает от $n=2{,}3650$ до $n=4{,}7300$.

Частоты главных колебаний „асимметричного" типа определяются уравнением

$$\cos hn \ \sin n - \sin hn \ \cos n +$$
$$+ n \sqrt{\frac{C}{A}} \frac{\varepsilon}{l} \ tg \left(\frac{n^2\varepsilon}{l} \sqrt{\frac{A}{C}}\right) (1 + \cos hn \ \cos n) \ ctg^2 \theta = 0$$

или при малых значениях $\frac{n^2\varepsilon}{l} \sqrt{\frac{A}{C}}$:

$$\cos hn \ \sin n - \sin hn \ \cos n +$$
$$+ n^3 \frac{\varepsilon^2}{l^2} (1 + \cos hn \ \cos n) \ ctg^2 \theta = 0 \ldots\ldots (13)$$

Здесь мы имеем *понижение* частот наинизших обертонов при изгибе стержня.

§ 7. Стержень, согнутый в двух точках.

В предыдущем изложении мы рассматривали колебания системы, состоящей из двух стержней, жестко соединенных между собой. Конечно, в действительности гнутье стержня не может быть произведено в одной точке. Попробуем оценить, какая поправка должна быть внесена в полученные результаты, если принять во внимание это обстоятельство *).

Чтобы оценить величину этой поправки, представим себе систему, состоящую из стержней M_1O_1 и O_2M_2 одинаковой длины l, которые жестко соединены с концами короткого промежуточного стержня $O_1O_2=2a$, образующего равные углы со стержнями M_1O_1 и O_2M_2 В таком случае нетрудно внести в предыдущие результаты поправку, зависящую от отношения $\frac{a}{l}$. Предполагая это отношение малым, будем пренебрегать влиянием массы и упругости части O_1O_2. Вычисление показывает, что при малых значениях отношения $\frac{a}{l}$ влияние части O_1O_2 на плоские колебания стержня, а также на неплоские колебания симметричного типа—незначительно (это влияние делается заметным при переходе к высшим обертонам). Особое положение в этом отношении занимают неплоские колебания

---

*) Указанием на необходимость внесения такой поправки я обязан Л. Г. Лойцянскому.

асимметричного типа; здесь влияние части O_1O_2 на колебания, соответствующие низшим обертонам, оказывается значительным уже при малых значениях $\frac{a}{l}$. Для случая $\theta = 0$ (части M_1O_1 и O_2M_2 параллельны) вместо уравнения

$$1 + \cos hn \cos n = 0,$$

следующего при $\theta = 0$ из уравнения (13), получаем при малых значениях $\frac{n^2 \varepsilon}{l} \sqrt{\frac{A}{C}}$

$$n\varepsilon^2 (1 + \cos hn \cos n) + a^2 (\sin hn \cos n + \cos hn \sin n) = 0$$

(где ε имеет прежнее значение). Как видно, если величины $n\varepsilon^2$ и a^2 одного порядка, то влияние части O_1O_2 на частоты упомянутых колебаний значительно; при гнутии стержня эти частоты понижаются не так сильно, как это следовало бы по формулам предыдущего §.

§ 8. Заключение.

Наблюдения Chladni относятся к плоским колебаниям согнутого стержня. Полученное нами понижение частот плоских колебаний симметричного типа при изгибе стержня вполне согласуется с наблюдениями Chladni. Такого же согласия не обнаруживается по отношению к колебаниям асимметричного типа.

Мы видели, что при $\theta = 0$ частоты плоских колебаний стержня пропорциональны квадратам следующих чисел:

$$1{,}8751,\ 4{,}6941,\ (4{,}7300),\ 7{,}8548,\ (7{,}8532),\ \ldots$$

(скобками отмечаем числа, относящиеся к колебаниям асимметричного типа). Начиная со второго члена этого ряда, эти числа с достаточной степенью точности можно считать пропорциональными нечетным числам:

$$—,\ 3,\ (3),\ 5,\ (5),\ 7,\ (7),\ \ldots$$

Chladni нашел, что частоты тех же колебаний пропорциональны квадратам чисел:

$$—,\ 3,\ (4),\ 5,\ (6),\ 7,\ \ldots$$

Интересно отметить, что Quix *) обнаружил в аналогичном случае существование колебания асимметричного типа, частота которого с достаточной точностью оказывается пропорциональной 3^2. Природа отмеченных Chladni колебаний асимметричного типа, частоты которых пропорциональны 4^2 и 6^2,

---

*) См. Winkelmann. Handbuch der Physik. Bd. II Akustik (1909) p. 353.

остается неясной. Для выяснения этого вопроса было бы весьма желательно всестороннее экспериментальное изучение колебаний согнутого стержня.

Ueber die Schwingungen eines gebogenen Stabes.

E. Nicolai.

Es werden die Schwingungen eines in der Mitte gebogenen Stabes untersucht. Zu diesem Zwecke wird der gebogene Stab als ein System von zwei gleichen Stäben, die mit einander starr verbunden sind, angesehen. Es werden die Schwingungen des Stabes in seiner Ebene, als auch die zu dieser Ebene normalen Schwingungen untersucht. Was die ebenen Schwingungen anbelangt, so ergibt sich, dass die Verbiegung des Stabes eine Verminderung der Frequenzen der niedrigeren Schwingungen vom symmetrischen Typus (was mit den benannten Beobachtungen Chladnis im Einklange steht), aber eine Vergrösserung der Frequenzen der Schwingungen vom asymmetrischen Typus zur Folge hat. Das Umgekehrte gilt für die zur Ebene des Stabes normalen Schwingungen. Es wird auch der Einfluss eines zwischen den beiden Schenneln sich befindenden kurzen Verbindungsstückes besprochen.

On the equilibrium of elastic plate, bounded by the isosceles rectangular triangle.

By *B. Galerkin.*

§ 1. We observe a thin plate in form of an isosceles rectangular triangle ABC (fig. 1), free supported and being under influence of forces normal to the plate and symmetrical relative to the axis OB (Y).

The equation of the middle surface of the right side of the bended plate OBC will be as follows:

$$
\begin{aligned}
w = f(x, y) + \Phi(x, y) = f(x, y) + \\
+ \sum A_n \Big[\cos h \frac{(2n-1)\,\pi\,(b-y)}{2b} \cos \frac{(2n-1)\,\pi x}{2b} - \\
- (-1)^{n+1} \cos h \frac{(2n-1)\,\pi x}{2b} \sin \frac{(2n-1)\,\pi y}{2b} \Big] + \\
+ \sum B_n \Big[\sin h \frac{(2n-1)\,\pi\,(b-x)}{2b} \sin \frac{(2n-1)\,\pi y}{2b} - \\
- (-1)^{n+1} \sin h \frac{(2n-1)\,\pi y}{2b} \cos \frac{(2n-1)\,\pi x}{2b} \Big] + \\
+ \sum C_n \Big[(b-y) \sin h \frac{(2n-1)\,\pi\,(b-y)}{2b} \cos \frac{(2n-1)\,\pi x}{2b} - \\
- (-1)^{n+1} x \sin h \frac{(2n-1)\,\pi x}{2b} \sin \frac{(2n-1)\,\pi y}{2b} \Big] + \\
+ \sum D_n \Big[(b-x) \cos h \frac{(2n-1)\,\pi\,(b-x)}{2b} \sin \frac{(2n-1)\,\pi y}{2b} - \\
- (-1)^{n+1} y \cos h \frac{(2n-1)\,\pi y}{2b} \cos \frac{(2n-1)\,\pi x}{2b} \Big] \quad \ldots (1^{*})
\end{aligned}
$$

The function $f(x, y)$ must be chosen as

$$\frac{Eh^3}{12\,(1-\sigma^2)} \Delta_2 \Delta_2 f = p_{xy};$$

---

*) Under the sign $\sum$ we assume every where $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}$.

h — a constant thickness of the plate, p_{xy} — load per unit-area, σ — Poisson's ratio. Since $\Phi(x, y)$ is a bigarmonic function, the differential equation of the middle surface of the plate will be satisfied, because

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=p_{xy} .$$

Since $\Phi(x, y)=0$ when $x+y-b=0$ at every value of the coefficients A_n, B_n ..., the function $f(x, y)$ must be chosen in manner to be $f(x, y)=0$ when $x+y-b=0$.

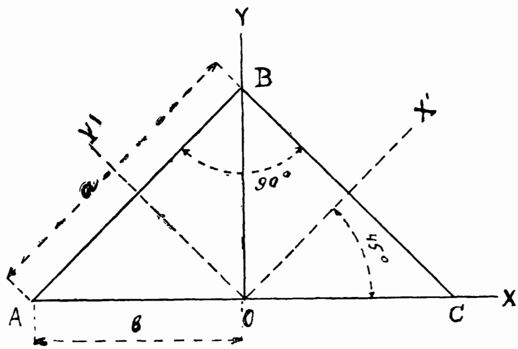


Fig. 1.

If we choose w to be $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=0$ when $x+y-b=0$ (on the cathetus), the stresses $X'_{x'}$, will be proportional to $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. But when $x+y-b=0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}=0 \text{ and } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0,$$

therefore if is needed X_x', to be equal to zero, the same must

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \text{ on the bord } x+y-b=0.$$

For the case the left side of the plate could be symmetrical to the right side, it must be assumed in the section $x=0$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{and} \quad V_{xz}=\varphi(y),$$

where V_{xz} — vertical shear per unit length in the section perpendicular to x; $\varphi(y)$ — function, representing the shear in the section $x=0$.

But

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-$$

$$-\frac{\pi}{2b}\sum A_n(2n-1)\left[\cos h\frac{(2n-1)\pi(b-y)}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2b}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\sin h\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2b}\sum B_n(2n-1)\left[-\cos h\frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\sin h\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\right]-$$

$$-\frac{\pi}{2b}\sum C_n(2n-1)\left[(b-y)\sinh\frac{(2n-1)\pi(b-y)}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2b}+\right.$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{2b}{(2n-1)\pi}\sin h\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}+$$

$$+(-1)^{n+1}x\cos h\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}-$$

$$-\frac{\pi}{2b}\sum D_n(2n-1)\left[\frac{2b}{(2n-1)\pi}\cos h\frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b}\sin\frac{(2-1]\pi y}{2b}+\right.$$

$$+(b-x)\sinh\frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}-$$

$$\left.-(-1)^{n+1}y\cos h\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\right].$$

The shearing force

$$V_{xz}=-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)=$$

$$=-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}-\right.$$

$$-\frac{\pi^2}{2b^2}\sum C_n(2n-1)^2\left[\cos h\frac{(2n-1)\pi(b-y)}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2b}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\sin h\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\right]-$$

$$-\frac{\pi^2}{2b^2}\sum D_n(2n-1)^2\left[\cos h\frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}-\right.$$

$$\left.\left.-(-1)^{n+1}\sin h\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\right]\right\}.$$

When $x=0$

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}-$$

$$-\frac{\pi}{2b}\sum B_n(2n-1)\cos h\frac{(2n-1)\pi}{2}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}-$$

$$-\frac{\pi}{2}\sum D_n(2n-1)\left(\sin h\frac{(2n-1)\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(2n-1)\pi}\cos h\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)=0\ldots\ldots\ldots(a)$$

and

$$V_{xz}=-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left[\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=0}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2}{2b}\sum D_n(2n-1)^2\cos h\frac{(2n-1)\pi}{2}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\right]=\varphi(y)\ldots(b)$$

Assume, that

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}\text{ and }\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=0}+\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\varphi(y)$$

in limits from $y=0$ to $y=b$ decompose in trigonometrical series on $\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}=\sum\alpha_n\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}$$

and

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=0}+\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\varphi(y)=\sum\beta_n\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b},$$

where

$$\alpha_n=\frac{2}{b}\int_0^b\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}dy\ldots\ldots\ldots(2),$$

$$\beta_n=\frac{2}{b}\int_0^b\left\{\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=0}+\right.$$

$$\left.+\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\varphi(y)\right\}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}dy\ldots\ldots\ldots(3)$$

The equations (a) and (b) will be decomposed as follows:

$$\alpha_n - B_n \frac{(2n-1)\pi}{2b} \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2} -$$

$$- D_n \frac{(2n-1)\pi}{2}\left(\sin h \frac{(2n-1)\pi}{2} + \frac{2}{(2n-1)\pi} \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = 0 \text{ (c)}$$

and

$$\beta_n - \frac{\pi^2}{2b^2} D_n (2n-1)^2 \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2} = 0 \ldots\ldots \text{(d)},$$

wherefrom

$$D_n = \frac{2\beta_n b^2}{(2n-1)^2 \pi^2 \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4($$

and

$$B_n = \frac{2\alpha_n b}{(2n-1)\pi \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2}} -$$

$$- \frac{2\beta_n b^3}{(2n-1)^2 \pi^2 \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2}}\left(\frac{2}{(2n-1)\pi} + tg h \frac{(2n-1)\pi}{2}\right. \quad ..(5)$$

On the edge $y = 0$

$$w = 0 \text{ and } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \text{ this gives us}$$

$$f(x, 0) + \sum A_n \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} +$$

$$+ \sum C_n b \sin h \frac{(2n-1)\pi}{2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} = 0 \ldots \text{(e)},$$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=0} + \frac{\pi^2}{4b^2} \sum A_n (2n-1)^2 \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} +$$

$$+ \frac{\pi^2}{4b} \sum C_n (2n-1)^2 \left(\sin h \frac{(2n-1)\pi}{2} +\right.$$

$$\left. + \frac{4}{(2n-1)\pi} \cos h \frac{(2n-1)\pi}{2}\right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} = 0 \ldots (f)$$

If $f(x, 0)$ and $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=0}$ can be decomposed in limits from $x = 0$ to $x = b$ in trigonometrical series:

$$f(x, 0) = \sum \gamma_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b}$$

and

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=0}=\sum \varepsilon_n \cos\frac{(2n-1)\,\pi x}{2b},$$

where

$$\gamma_n=\frac{2}{b}\int_0^b f\ (x,\,0)\cos\frac{(2n-1)\,\pi x}{2b}\,dx\ \ldots\ldots\ldots(6),$$

$$\varepsilon_n=\frac{2}{b}\int_0^b \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=0}\cos\frac{(2n-1)\,\pi x}{2b}\,dx\ldots\ldots\ldots(7).$$

The equations (e) and (*f*) will be decomposed in the equations:

$$\gamma_n+A_n\cos h\,\frac{(2n-1)\,\pi}{2}+C_n\,b\sin h\,\frac{(2n-1)\,\pi}{2}=0\ldots(g)$$

$$\varepsilon_n+A_n\frac{(2n-1)^2\,\pi^2}{4b^2}\cos h\,\frac{(2n-1)\,\pi}{2}+$$

$$+C_n\frac{(2n-1)^2\,\pi^2}{4b}\left(\sinh\frac{(2n-1)\,\pi}{2}+\frac{4}{(2n-1)\,\pi}\cos h\,\frac{(2n-1)\,\pi}{2}\right)(h)$$

herofrom

$$C_n=\left(\frac{(2n-1)\,\pi\gamma_n}{4b}-\frac{\varepsilon_n\,b}{(2n-1)\,\pi}\right)\frac{1}{\cos h\,\dfrac{(2n-1)\,\pi}{2}}\ldots(8),$$

$$A_n=-\frac{(2n-1)\,\pi\,\gamma_n}{\cos h\,\dfrac{(2n-1)\,\pi}{2}}\left(\frac{1}{(2n-1)\,\pi}+\frac{1}{4}\,tg\,h\,\frac{(2n-1)\,\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon_n\,b^2}{(2n-1)\,\pi}\,\frac{tg\,h\,\dfrac{(2n-1)\,\pi}{2}}{\cos h\,\dfrac{(2n-1)\,\pi}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots(9).$$

We shall apply these form. to the peculiar cases: 1) the forces are concentrated on the axis of symmetria and 2) the forces are uniformly distributed on the plate.

§ 2. *The forces are concentrated on the axis of symmetria.* We observe the case, when the forces p are uniformly distributed on the axis of symmetria from $y=e$ to $y=e+b_1$.

Let be $f(x, y) = 0$; in this case

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right|_{x=0} = 0.$$

On the axis of symmetria $V_{xz} = \varphi(y)$; in limites

$$\begin{aligned} &\text{from } y = 0 \text{ to } y = e && \varphi(y) = 0, \\ &\text{from } y = e \text{ to } y = e + b_1 && \varphi(y) = -\frac{\rho}{2}, \\ &\text{from } y = e + b_1 \text{ to } y = b && \varphi(y) = 0. \end{aligned}$$

The form. (2), (3), (6) and (7) give

$$\alpha_n = 0,$$

$$\beta_n = \frac{24\,(1-\sigma^2)}{Eh^3 b} \int_0^b \varphi(y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b}\, dy =$$

$$= -\frac{12\,(1-\sigma^2)\rho}{Eh^3 b} \int_e^{e+b_1} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b}\, dy =$$

$$= \frac{48\,(1-\sigma^2)\,\rho}{Eh^3\,(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi b_1}{4b} \sin \frac{(2n-1)\pi\,(2e+b_1)}{4b},$$

$$\gamma_n = 0,$$

$$\varepsilon_n = 0.$$

From the form. (4), (5), (8) and (9) we receive:

$$D_n = -\frac{96\,(1-\sigma^2)\,pb^2}{(2n-1)^3\pi^3 Eh^3} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi b_1}{4b} \sin \frac{(2n-1)\pi(b_1+2e)}{4b}}{\cos h \frac{(2n-1)\pi}{2}},$$

$$B_n = \frac{96\,(1-\sigma^2)\,pb^3}{(2n-1)^3\pi^3 Eh^3} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi b_1}{4b} \sin \frac{(2n-1)\pi(b_1+2e)}{4b}}{\cos h \frac{(2n-1)\pi}{2}} \left(\frac{2}{(2n-1)\pi} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{tg} h \frac{(2n-1)\pi}{2}\right),$$

$$C_n = 0,$$

$$A_n = 0.$$

The equation of elastic surface w can be presented as follows:

$$w = \frac{96(1-\sigma^2)\rho b^3}{Eh^3\pi^3} \sum \left\{ \frac{\sin\frac{(2n-1)\pi b_1}{4b} \sin\frac{(2n-1)\pi(b_1+2e)}{4b}}{(2n-1)^3 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2}} \times \right.$$

$$\times \left[\left(\sin h \frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b} \quad \sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b} - \right.\right.$$

$$- (-1)^{n+1} \sin h \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \Bigg) \left(\frac{2}{(2n-1)\pi} + tgh \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) -$$

$$- \frac{b-x}{b} \cos h \frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b} \quad \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} +$$

$$\left.\left. + (-1)^{n+1} \frac{y}{b} \cos h \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \quad \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \right] \right\} \ldots\ldots\ldots (10)$$

When the forces ρ are uniformly distributed along the axis of symmetria, i. e. $e = 0$ and $b_1 = b$,

$$w = \frac{48(1-\sigma^2)\rho b^3}{Eh^3\pi^3} \sum \left\{ \frac{1}{(2n-1)^3 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2}} \times \right.$$

$$\times \left[\left(\sinh \frac{(2n-1)\pi(b-y)}{2b} \sin \quad \frac{(2n-1)\pi y}{2b} - \right.\right.$$

$$- (-1)^{n+1} \sin h \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \Bigg) \left(\frac{2}{(2n-1)\pi} + tg\,h \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) -$$

$$- \frac{b-x}{2b} \cos h \frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b} \quad \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} +$$

$$\left.\left. + (-1)^{n+1} \frac{y}{b} \cos h \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \quad \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \right] \right\} \ldots\ldots\ldots (10'$$

If we let b_1 be an infinitely small quantity and assume $\rho b_1 = P$ the equation (10) will be transformed in:

$$w = \frac{24(1-\sigma^2) P b^2}{Eh^3\pi^2} \sum \left\{ \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi e}{2b}}{(2n-1)^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2}} \times \right.$$

$$\times \left[\left(\sin h \frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b} \quad \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} - \right.\right.$$

$$- (-1)^{n+1} \sin h \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \Bigg) \left(\frac{2}{(2n-1)\pi} + tg\,h \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) -$$

$$- \frac{b-x}{b} \cos h \frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b} \quad \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} +$$

$$\left.\left. + (-1)^{n+1} \frac{y}{b} \cos h \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \quad \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \right] \right\} \ldots\ldots (10'')$$

We receive a solution for a case, when the force P is concentrated in a point $(x=0,\ y=e)$.

§ 3. *The forces are uniformly distributed on the whole plate.*

Assume $f\ (x,\ y)=$

$$=\frac{(1-\sigma^2)\ \rho}{8Eh^3}[(x+y-b)^4+4b\,(x+y-b)^3-8b^3\,(x+y-b)].\ (11)$$

$f\ (x,\ y)$ satisfy the equation:

$$\frac{Eh^3}{12\ (1-\sigma^2)}\ \Delta_2\Delta_2 f=\rho;$$

$\rho=$ load per unit-area.

When $x+y-b=0$

$$f\ (x,\ y)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\ \text{ and }\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{(1-\sigma^2)\ \rho}{2Eh^3}[(y-b)^3+3b(y-b)^2-2b^3].$$

From form. (2) we receive:

$$\alpha_n=\frac{(1-\sigma^2)\ \rho}{Eh^3 b}\int_0^b[(y-b)^3+3b\ (y-b)^3-2b^3]sin\,\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\,dy=$$

$$=-\frac{96\ (1-\sigma^2)\ \rho b^3\ (-1)^{n+1}}{(2n-1)^4\,\pi^4\,Eh^3}.$$

Along the axis of symmetria $(x=0)$ there are none of concentrated loads, therefore $\varphi\ (y)=0$.

Since

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=0}=\frac{6\,(1-\sigma^2)\ \rho y}{Eh^3},$$

we obtain from the eq. (3):

$$\beta_n=\frac{12\,(1-\sigma^2)\,\rho}{Eh^3 b}\int_0^b y\ sin\,\frac{(2n-1)\ \pi y}{2b}\,dy=\frac{48\ (1-\sigma^2)\ b\,(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\,\pi^2\,Eh^3}.$$

Substituting the values α_n and β_n in the eq. (4) and (5), we receive:

$$D_n = \frac{96\ (1-\sigma^2)\, \rho b^3\ (-1)^{n+1}}{Eh^3 (2n-1)^4 \pi^4 \cos h\, \frac{(2n-1)\pi}{2}},$$

$$B_n = -\frac{384\, (1-\sigma^2)\, pb^4\, (-1)^{n+1}}{Eh^3 (2n-1)^4 \pi^4 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2}} \left(\frac{1}{(2n-1)\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\ tg\, h\ \frac{(2n-1)\pi}{2} \right).$$

On the edge $y=0$ the function $f\ (x,\ y)$ gives:

$$f\ (x,\ 0) = \frac{(1-\sigma^2)\, \rho}{8Eh^3} \left[(x-b)^4 + 4b\, (x-b)^3 - 8b^3\, (x-b) \right] \text{ and}$$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{y=0} = \frac{3\ (1-\sigma^2)\, \rho}{2}\ (x^2 - b^2).$$

With form. (6) and (7) we obtain:

$$\gamma_n = \frac{(1-\sigma^2)\, \rho}{4b} \int_0^b \left[(x-b)^4 + 4b\, (x-b)^3 - 8b^3\, (x-b \right] \cos \frac{(2n-1)\, \pi x}{2b}\, dx =$$

$$= \frac{192\ (1-\sigma^2)\, \rho b^4\, (-1)^{n+1}}{(2n-1)^5\, \pi^5}.$$

$$\varepsilon_n = \frac{3\, (1-\sigma^2)\, \rho}{b} \int_0^b (x^2 - b^2) \cos \frac{(2n-1)\ \pi x}{2b} =$$

$$= -\frac{48\ (1-\sigma^2)\ \rho b^3\, (-1)^{n+1}}{(2n-1)^3\, \pi^3}.$$

Substituting the values γ_n and ε_n in the eq. (8) and (9), we receive:

$$C_n = \frac{96\ (1-\sigma^2)\ pb^3\, (-1)^{n+1}}{(2n-1)^4\, \pi^4 \cos h\, \frac{(2n-1)\pi}{2}};$$

$$A_n = -\frac{192\, (1-\sigma^2)\ \rho b^4\, (-1)^{n+1}}{(2n-1)^4\, \pi^4} \left(\frac{1}{(2n-1)\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ tg\, h\ \frac{(2n-1)\ \pi}{2} \right).$$

Substituting as the values A_n, C_n, B_u and D_n, as $f(x, y)$ from the form. (11) in the eq. (1), we receive:

$$w = \frac{(1-\sigma^2)\rho b^4}{Eh^3}\left\{\frac{(x+y-b)^4+4b(x+y-b)^3-8b^3(x+y-b)}{8b^4}-\right.$$

$$-\frac{192}{\pi^4}\sum\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^4\cos h\frac{(2n-1)\pi}{2}}\left[\left(\cosh\frac{(2n-1)\pi(b-y)}{2b}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2b}-\right.\right.$$

$$-(-1)^{n+1}\cos h\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\Bigg)\left(\frac{1}{(2n-1)\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,tg\,h\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)+$$

$$+\left(\sin h\frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}-\right.$$

$$-(-1)^{n+1}\sin h\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\Bigg)\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,tg\,h\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{b-y}{2b}\sin h\frac{(2n-1)\pi(b-y)}{2b}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2b}+$$

$$+\frac{x}{2b}(-1)^{n+1}\sin h\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}-$$

$$-\frac{b-x}{2b}\cos h\frac{(2n-1)\pi(b-x)}{2b}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}+$$

$$\left.\left.+(-1)^{n+1}\frac{y}{2b}\cos h\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\right]\right\}.$$

Summary.

The case of triangular plate under the action of a force P, concentrated in a point, is analysed here for the first time *). In our other papers namely: „Investigation of triangular plates" **) and „On the flexion of triangular plates" ***) we gaveth e solution for the cases of uniformly distributed load and for concentrated load along the axis of symmetria, different from that communicated

---

*) Brief abstract sec C. R. 1925 t. 181, p. 369.
**) Bulletin of the Russian Academy of Sciences, Petrograd 1919.
***) Annals of the Polytechnical Institute, Petrograd, 1919 vol. XXVIII.

here. In the above mentiohed papers were named the cases of fiexion of the plates under another distribution of forces (when the forces are unsymmetrical relative the axis y), also were calculated the stresses of the plates for all possible distribution of forces, investigated therein *).

---

*) In the paper „Investigation of triangular plates“ is also analysed the question on the equilibrium of triangular plate, bounded by an isosceles rectangular triangle under the influence of forces, compressing the plate.

Равновесие упругой пластинки, ограниченной равнобедренным прямоугольным треугольником.

Б. Г. Галеркин.

В этой статье рассматривается изгиб пластинки под действием сил, нормальных к ее плоскости и симметрично расположенных относительно оси симметрии. За уравнение упругой поверхности правой половины пластинки (фиг. 1) берем:

$$w = f(x, y) + \Phi(x, y).$$

$f(x, y)$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \Delta_2\Delta_2 f = \rho_{xy},$$

где ρ_{xy} — сила на ед. площади; $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_2\Delta_2\Phi = 0$ и содержит ряды с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты эти определяются из следующих условий:

1) При $x = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ и } V_{xz} = -\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$—перерезывающая сила по сечению $x = 0$.

2) При $y = 0$, $w = 0$ и $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Общие выводы применены к случаю, когда пластинка находится под действием сил, равномерно распределенных по оси симметрии на некотором протяжении b_1 (§ 2). Полагая $b_1 = b$, получим решение для случая, когда вся ось симметрии находится под действием сил равномерно распределенных; полагая $b_1 = 0$, получаем решение для случая сосредоточенной силы.

В § 3 дано решение для случая сил, равномерно распределенных по всей пластинке.

Статья эта расширяет несколько решения, данные автором в „Известиях Академии Наук“ за 1919 г. и „Известиях Политехнического Института“ за 1919 г.

О механизмах для построения функций комплексного переменного.

С. А. Гершгорин.

Если имеем какой-нибудь плоский механизм, то положение каждой его точки можно охарактеризовать некоторым комплексным числом $z = x + iy$, где x и y—обыкновенные Декартовы координаты этой точки. Если при движении определенной точки такого механизма, к которой отнесено число z, некоторая другая точка будет двигаться так, что соответствующее ей комплексное число W будет аналитической функцией от z, т. е.,

$$W = f(z),$$

то мы скажем, что механизм дает функцию комплексного переменного $f(z)$ или, иначе, что он производит конформное отображение, определяемое функцией $f(z)$.

До сих пор были известны некоторые шарнирные механизмы, которые давали простейшие функции комплексного переменного, напр., $z + a$, az и $\frac{a}{z}$, где a—комплексная постоянная. Таковы, напр., пантографы Шейнера и Сильвестера, инверсор Посселье-Липкина и др. В настоящей работе дается общее решение задачи построения подобных механизмов для любой алгебраической функции, при чем доказывается, что эти механизмы могут быть выполнены чисто шарнирно.

§ 1. В дальнейшем нам придется пользоваться некоторыми основными шарнирными механизмами. Изложим вкратце их теорию.

Реверсор-Кемпе *)—прибор для получения равных углов—изображен жирными линиями на чертеже 1**). В шарнирных антипараллелограммах $OACB$ и $OBGD$ сходственные стороны пропорциональны, т. е. $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OD}$.

*) Koenigs. Leçons de Cinématique.

**) См. отдельный лист в конце книги.

Так как угол B у них общий, то обе фигуры подобны во всех положениях и, следовательно, $\angle\, aOa' = \angle\, a'Oa''$. Этот механизм может служить для удвоения углов, и, обратно, для деления данного угла на две равные части.

Мультипликаторы Кемпе. Дальнейшим присоединением антипараллелограммов можно построить механизмы для получения любых кратных углов. Так, например, прибавляя к реверсору (черт. 1) стержни OE и EF, получим механизм, служащий для утроения и, обратно, для триссекции углов.

Сумматор Кемпе—прибор для сложения углов. Пусть требуется сложить углы aOa' и aOa''. С помощью реверсора строим стержень Ob, делящий пополам $\angle\, a'Oa''$. С помощью второго реверсора заставляем стержень Oa и новый стержень Oa''' быть симметричными относительно Ob. В таком случае

$$\angle\, aOa''' = \angle\, aOa' + \angle\, aOa''.$$

§ 2. Сложение комплексных чисел. Сложение двух комплексных чисел $z_1 = ae^{i\varphi}$ и $z_2 = be^{i\psi}$ с переменными аргументами, но постоянными модулями a и b, производится при помощи шарнирного параллелограмма $OABC$ (черт. 2) со сторонами длины a и b и с вершиной O, помещенной в начале координат. Сумма дается точкой C.

Для сложения двух произвольных комплексных чисел мною в дальнейшем применяется обыкновенный пантограф Шейнера. В таком пантографе (черт. 3) точка D всегда делит в постоянном отношении отрезок AB, так что $\frac{AD}{AB} = \alpha = Const.$

Поэтому, между комплексными числами z_1, z_2 и z', соответствующими точкам B, A и D, имеет место соотношение

$$z' = \alpha z_1 + (1 - \alpha)\, z_2 \dots\dots\dots\dots (1)$$

В частности, если $\alpha = \frac{1}{2}$, получим

$$z' = \frac{1}{2}\,(z_1 + z_2) \dots\dots\dots\dots (2).$$

Мы видим, что в этом случае $z = z_1 + z_2$ лишь постоянным множителем отличается от числа z', изображающего положение точки D. Заметим, однако, раз навсегда, что постоянные множители не имеют для нас существенного значения, так как их всегда можно компенсировать подходящим выбором масштаба для отсчета z. В этом, именно, смысле (т. е., отсчитывая z в соответствующем масштабе) можем применять описанный механизм для суммирования двух комплексных чисел.

Выражения более общего вида

$$z = az_1 + b\, z_2 \dots\dots\dots\dots (3)$$

где a и b произвольные вещественные постоянные, также могут быть построены при помощи пантографа при соответствующем соотношении длин сторон. Действительно, z отличается лишь постоянным множителем от числа z', связанного с z_1 и z_2 зависимостью

$$z' = \frac{a}{a+b} z_1 + \frac{b}{a+b} z_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

идентичною с зависимостью (1)

Примечание. Если в выражении (3) $a > 0$ и $b > 0$, то

$$0 < \alpha < 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Обычно пантографы так строятся, что могут быть установлены на любое значение α, удовлетворяющее неравенствам (5). При помощи одного такого пантографа можем, следовательно, осуществить любую зависимоеть вида (3) при положительных a и b.

При помощи системы из $(n-1)$ пантографов можно строить выражения вида

$$z = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

где a_k — вещественные постоянные.

Пусть, для примера, нужно построить выражение

$$z = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3.$$

При помощи первого пантографа строим комплексное число

$$z'' = \frac{a_1}{a_1 + a_2} z_1 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} z_2,$$

а при помощи второго — число

$$z' = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + a_3} z'' + \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3} z_3 = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3}{a_1 + a_2 + a_3},$$

отличающееся лишь постоянным множителем от искомого z. Аналогично поступаем и при большем числе слагаемых. Подобные механизмы, составленные из одного или нескольких пантографов, будем в дальнейшем называть сумматорами.

§ 3. Представление комплексного переменного в виде суммы двух других с постоянными модулями. Каждое комплексное число z, модуль которого удовлетворяет условиям:

$$a - b < |z| < a + b,$$

может быть представлено в виде суммы двух других с постоянными модулями, т. е., в виде

$$z = z_1 + z_2 = ae^{i\varphi} + be^{i\psi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Формула (7) дает в сущности особое представление переменного, которое здесь характеризуется двумя вещественными числами φ и ψ (как в других случаях оно характеризуется числами x и y или r и θ).

Требуемое разложение z на сумму чисел z_1 и z_2 производится при помощи параллелограмма $OABC$ (черт. 2), одна вершина O которого находится в начале координат, а противоположная C устанавливается в точке z. Указанное представление независимой переменной является основным в нашей работе.

После приведенных вводных замечаний можем перейти к непосредственно интересующему нас вопросу.

§ 4. Механизм, дающий функцию $W=z^2$. Рассмотрим прежде всего механизм для функции $W=z^2$. При представлении независимой переменной z в форме (7), задача о построении такого механизма разрешается с необыкновенной простотой.

Пусть

$$z=ae^{i\varphi}+ae^{i\psi}=z_1+z_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Тогда

$$W=(ae^{i\varphi}+ae^{i\psi})^2=a^2e^{i2\varphi}+a^2e^{i2\psi}+2a^2e^{i(\varphi+\psi)}=W_1+W_2+W_3.$$

Мы видим, что $W=z^2$ представилось, как сумма трех комплексных чисел W_1, W_2, W_3 с постоянными модулями, или, выражаясь геометрически, как сумма трех векторов постоянной длины W_1, W_2, W_3. Все сводится, таким образом, к построению этих последних и к их последующему сложению. Для этого поступаем следующим образом (черт. 4).

При помощи шарнирного ромба $OABC$ со сторонами длины a, вершина C которого помещается в точке z, разлагаем число на сумму по формуле (8).

При этом

$$\angle\, xOA=\varphi, \text{ а } \angle\, xOB=\psi.$$

Стержень OD длины a^2, соединенный при помощи реверсора Кемпе (I) со стержнем OA так, чтобы $\angle\, xOD=\varphi_1=2\varphi=2\angle\, xOA$, дает нам вектор W_1. Аналогично получаем при помощи реверсора (II) вектор W_2 в виде стержня OE, образующего с осью x угол $\psi_1=2\psi$. На стержнях OD и OE строим шарнирный ромб $ODFE$, вершина F которого дает нам сумму W' чисел W_1 и W_2. Остается прибавить к W' вектор $W_3=2a^2e^{i(\varphi+\psi)}=2a^2e^{i\frac{\varphi_1+\psi_1}{2}}$, для чего присоединяем к точке F стержень FG длины $2a^2$, который делит пополам $\angle EFD$ при помощи третьего реверсора Кемпе. Очевидно, что угол, образованный этим стержнем с осью x, будет как раз равен $\frac{\varphi_1+\psi_1}{2}$, т. е., аргументу числа W_3, следовательно, точка G и даст нам искомое $W = W_1 + W_2 + W_3 = z^2$. Очевидно, тот же механизм может служить для извлечения квадратного корня из комплексных чисел ($z = \sqrt{W}$).

Остановимся несколько подробнее на полученном механизме, для чего разберем несколько частных его положений (черт. 5). Для ясности чертежа реверсоры Кемпе опущены.

Если z находится на положительной части вещественной оси, то и W будет вещественно и положительно (положение a). С уменьшением z, W будет двигаться налево, пока они оба не достигнут нуля одновременно. Если же z, оставаясь вещественным, перейдет на отрицательную ось, то точка W повернет направо, и, следовательно, W останется положительным (положение b).

Если заставить W описать полуокружность вокруг полюса O в положительном направлении, то W перейдет на отрицательную ось, а z на мнимую положительную ось (положение c).

Если же W, продолжая двигаться в том же направлении, опишет еще полную окружность вокруг O и вернется к исходному отрицательному значению, то z перейдет на отрицательную мнимую ось (положение c, пунктиром).

Вообще, если W опишет замкнутый контур, не содержащий внутри точки O, то z тоже опишет замкнутый контур и вернется в исходное положение. Если же контур содержит внутри полюс O, то z к исходному положению не вернется и даст второе значение двузначной функции $z = \sqrt{W}$, соответствующее данному значению W.

§ 5. Механизм для функции $W = z^3$. Покажем еще, как строится по тому же методу механизм для функции $W = z^3$. Положив,

$$z = z_1 + z_2 = ae^{i\varphi} + ae^{i\psi} \dots \dots \dots \dots \dots (9)$$

имеем

$$W = (ae^{i\varphi} + ae^{i\psi})^3 = a^3e^{i3\varphi} + a^3e^{i3\psi} + 3a^3e^{i(2\psi+\varphi)} +$$
$$+ 3a^3e^{i(\varphi+2\psi)} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4.$$

Получается механизм, изображенный на чертеже 6. Здесь стержни OE и OD длины a^3, соединенные со сторонами основного ромба $OACB$ мультипликаторами Кемпе (на чертеже не показанными), изображают векторы W_1 и W_2. Вершина F ромба $OEFD$ дает их сумму. Стержни FH и FG (длины $3a^3$), делящие на 3 равные части $\angle LFK = \angle DOE$ при помощи мультипликатора III, представляют, как не трудно видеть, векторы

$$W_3 = 3a^3e^{i(2\varphi+\psi)} \text{ и } W_4 = 3a^3e^{i(\varphi+2\psi)}.$$

Точка I, вершина шарнирного ромба $FGIH$, и дает нам искомое $W = z^3$. Этот же механизм, очевидно, дает функцию $z = \sqrt[3]{W}$, и здесь последовательно могут быть получены все 3 значения этой функции.

Совершенно таким же образом можно получить механизмы, возвышающие z в любую целую степень (и извлекающие корень любой целой степени).

§ 6. Механизм для умножения комплексных чисел. Тем же методом можно построить шарнирный механизм, который давал бы произведение двух комплексных чисел z_1 и z_2.

Положив

$$z_1 = ae^{i\varphi_1} + ae^{i\psi_1}; \; z_2 = ae^{i\varphi_2} + ae^{i\psi_2},$$

имеем

$$W = z_1 z_2 = a^2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + a^2 e^{i(\varphi_1 + \psi_2)} + a^2 e^{i(\psi_1 + \varphi_2)} + \\ + a^2 e^{i(\psi_1 + \psi_2)} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4.$$

Таким образом, W представляется в виде суммы четырех векторов постоянной длины a^2. Каждый из соответствующих им стержней должен быть связан со сторонами основных ромбов посредством сумматоров Кемпе для получения нужных сумм углов. Последующее же сложение этих векторов не представляет затруднений. Полученный механизм естественно может быть применен и для деления комплексных чисел.

§ 7. Теорема о возможности построения любой алгебраической функции. Мы убедились из предыдущего исследования, что возможно произвести с помощью шарнирных механизмов любое из первых четырех действий и извлечение корня, а следовательно, что возможно построить всякое выражение, содержащее любую последовательность этих действий над одной или несколькими комплексными переменными. Отсюда, однако, следует, что мы в состоянии строить любую алгебраическую функцию.

Действительно, такая функция W в общем случае определяется уравнением вида

$$FW(, z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

где $U = F\,(W, z_1, z_2, \ldots z_n)$ есть целая функция от переменных $W, z_1, z_2, \ldots z_n$. Построив механизм для этой функции U и закрепив в нем точку U в начале координат ($U = 0$), осуществим требуемую зависимость (10) между этими переменными. Можно, конечно, выполнить и несколько таких зависимостей.

Таким образом, мы вправе высказать следующую общую теорему.

Теорема I. Всегда возможно построить такой шарнирный механизм, который осуществлял бы любую наперед заданную систему алгебраических зависимостей (уравнений) между произвольным конечным числом комплексных переменных, изображающих положение на плоскости некоторых определенных точек этого механизма *).

В частности, можно построить любую наперед заданную алгебраическую функцию $W = F(z)$ от одной независимой переменной или, иначе, осуществить при помощи механизма любое алгебраическое конформное отображение. При этом практически нет надобности для каждой функции строить отдельный механизм. Мы увидим впоследствии, что можно построить механизмы для целых классов алгебраических функций, например, для полиномов степени, не свыше заданной, для дробных рациональных функций и т. д.

Эти же механизмы, очевидно, могут служить для численного решения алгебраических уравнений. Пусть дано уравнение

$$F(z) = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Берем механизм для функции $W = F(z)$ и устанавливаем точку W в точке a плоскости. Соответствующее значение z и представляет корень уравнения (11). Остальные корни могут быть получены так, как объяснено дальше, в параграфе о многозначных функциях.

§ 8. Практическое выполнение механизмов. Все описанные механизмы в действительности представляют значительную сложность. Уже простейшие из них, механизмы для z^2 и z^3, содержат соответственно 18 и 26 стержней. Механизм для умножения содержит 48 стержней и потому практически в предложенном виде почти непригоден. Сложность этих механизмов главным образом обусловливается сложностью тех мультипликаторов и сумматоров Кемпе, которые в них входят, как вспомогательные части для получения кратных углов и их сложения. Главным недостатком последних является не столько количество стержней, сколько то, что стержни эти мешают друг другу, следствием чего является способность этих механизмов функционировать лишь в сравнительно ограниченных пределах изменения углов.

Поэтому при практическом осуществлении указанных механизмов полезно отказаться от чисто - шарнирного выполнения, представляющего лишь теоретический интерес, и применить передачу вращения между соответствующими стержнями при помощи зубчатых колес, которая свободна от упомянутых недостатков. Применение последней в частном случае механизма для $W' = z^3$ показано на чертеже 7.

Здесь начало координат плоскости z находится в точке O, а начало координат плоскости W' сдвинуто в O'. Стержень

---

*) Заметим, что изложенными рассуждениями не только доказывается существование таких механизмов, но и дается самый метод их построения.

OA (z_1) жестко соединен через ось O_1 с зубчатым колесом I, расположенным под доской, на которой помещен прибор (на чертеже доска не показана). От колеса I вращение передается с отношением угловых скоростей $1:3$ через промежуточное колесо II колесу III и соединенному с ним стержню $O'E$ (W_1). Стержень OB, в свою очередь, соединен неподвижно с колесом I', лежащим под колесом I, посредством оси O_2, проходящей через ось O_1, для чего последняя сделана полой. От колеса I' вращение передается колесу III', соединенному со стержнем OD (W_2). Все остальное оставлено в прежнем виде (мультипликатор III опущен для ясности чертежа).

Если присоединить к точкам z и $W'=z^3$ пантограф (сумматор) $IMKCNS$ с переменным отношением α, то, на основании сказанного в § 2, можем при его помощи строить кубические многочлены вида

$$W = az^3 + bz \qquad (12)$$

при любых положительных a и b, при чем каждой совокупности a и b будет соответствовать свой масштаб и свое положение начала координат плоскости W, которые нетрудно найти.

Легко, однако, показать, что и при любых комплексных a и b (в частности отрицательных вещественных) можно строить выражение (12), при помощи того же пантографа, как это пояснено далее. Пусть, например, $a=ce^{i\theta}$, где c — уже число вещественное положительное.

Тогда

$$W_1 = c\,(e^{i\theta}\,.\,z^3) + bz \qquad (13)$$

Если при неподвижном z расцепим стержни OE и OD с колесами III и III' и, повернув их на угол θ в положительном направлении относительно этих колес, снова жестко соединим их с последними, то точка I будет давать после этого не z^3, а $e^{i\theta}\,.\,z^3$, а точка S пантографа даст выражение (13).

Прибор, изображенный на чертеже 7, есть, следовательно, универсальный прибор для построения функций вида

$$W = az^3 + bz.$$

При его помощи можно произвести любое конформное отображение этого типа, а также решить любое трехчленное кубическое уравнение

$$az^3 + bz = c,$$

как это объяснено в § 7.

Совершенно таким же способом можно было бы построить механизм для полиномов 3-й степени более общего вида (содержащих член с z^2). Для этого следовало бы еще построить функцию $W'' = z^2$, передав вращение с отношением $1:2$ на новую ось O'', и добавить один пантограф для суммирования. Аналогично строятся механизмы для полиномов более высоких степеней.

Что касается механизма для умножения (и деления) комплексных чисел, то и ему можно придать приемлемую на практике форму применением эпициклических зубчатых соединений для суммирования углов. Недостаток места не позволяет мне дать здесь описание этого механизма, который является необходимой составной частью в механизмах для построения дробных рациональных функций, а также алгебраических функций наиболее общего вида. Если числителем является постоянное число, можно применять для деления обыкновенный инверсор, помня, однако, что он дает не самое частное, а число, с ним сопряженное.

§ 9. Многозначные функции. Остается сказать несколько слов по поводу многозначных функций. Алгебраическая функция W, определяемая уравнением:

$$F(z, W) = 0, \qquad (14)$$

есть функция, вообще говоря, многозначная. Возникает вопрос, сможет ли механизм, осуществляющий зависимость (14), дать все n значений W, соответствующих некоторому определенному значению z. Механизм устанавливает между W и z непрерывное соответствие, вполне отвечающее тому, которое между ними существует при аналитическом продолжении. Мы можем себе представить, как это, вообще, принято, что точка z механизма движется по определенной n-листной Римановой поверхности R, соответствующей соотношению (14). Пока z описывает один лист этой поверхности, W будет описывать лишь одну ветвь функции. Но если z, обойдя кругом некоторой точки разветвления, попадет на другой лист, W начнет давать значения другой ветви. Так постепенно, обводя точку z по определенным замкнутым контурам (петлям) вокруг точек разветвления соответствующих листов поверхности R, мы сможем перевести W на любую из ее ветвей, и, следовательно, получить все значения функции, соответствующие данному z (конечно, посколько они находятся в пределах досягаемости механизма). Многозначности функции отвечает, таким образом, многозначность положений механизма, соответствующих одному определенному положению ведущей точки z. Точки разветвления—это мертвые положения механизма. В них нарушается кинематическая принужденность движения.

При разыскании указанным выше образом всех значений W, соответствующих определенному z, нет надобности знать действительного положения точек разветвления. Более подробное исследование показывает, что сам механизм в состоянии указать те замкнутые контуры, по которым следует вести z для перевода W на другую ветвь. На этом, как и на связанных с этим чисто теоретических вопросах, я предполагаю остановиться в одной из последующих статей.

§ 10. Упрощенные механизмы для построения функций комплексного переменного. Можно получить очень простые механизмы, если поставить себе целью не полное и непрерывное отображение плоскости z на W, а лишь последовательное отображение всевозможных кривых определенного типа, например, окружностей, эллипсов и прямых и т. д. Ограничимся рассмотрением того случая, когда W есть функция целая, т. е.

$$W = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

1) Механизмы для отображения окружностей плоскости z. Введем вспомогательный вещественный параметр φ и положим, что

$$z = z_0 + re^{i\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

При изменении φ точка z описывает окружность C радиуса r с центром в точке z_0. Подставив это значение z в выражение (15), получим для W выражение вида:

$$W = c_0 c^{in\varphi} + c_1 e^{i(n-1)\varphi} + \ldots + c_n, \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

которым определяется кривая L, представляющая отображения на плоскость W окружности C. Коэффициенты c_k в выражении (17) представляют собою комплексные постоянные, которые для каждой окружности C должны быть подсчитаны особо. Задача построения L сводится согласно выражению (17) к суммированию ряда векторов постоянной длины, вращающихся в положительном направлении с постоянным отношением угловых скоростей. Устройство механизма для этой цели не представляет затруднений и пояснено на чертеже 8, где изображен механизм для полного полинома 3-й степени. В этом случае выражение (18) будем иметь вид:

$$W = c_0 e^{i3\varphi} + c_1 e^{i2\varphi} + c_2 e^{i\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

(постоянный член c_3 в виду его несущественной роли опускаем).

Положим

$$c_0 = \alpha_0 e^{i\Theta_0},\ c_1 = \alpha_1 e^{i\Theta_1} \text{ и } c_2 = \alpha_2 e^{i\Theta_2}.$$

Тогда

$$W = \alpha_0 e^{i(\Theta_0 + 3\varphi)} + \alpha_1 e^{i(\Theta_1 + 2\varphi)} + \alpha_2 e^{i(\Theta_2 + \varphi)} = W_1 + W_2 + W_3 \ldots (19).$$

На осях O_1, O_2 и O_3 вращаются диски I, II, III, жестко соединенные через оси с одноименными зубчатыми колесами, помещенными под доской (на чертеже не показанной) и вращающимися в одну сторону с отношением угловых скоростей $1:2:3$. Вместе с дисками вращаются пластинки 1, 2, 3, которые устанавливаются и закрепляются под желаемым углом θ_k по отношению к этим последним. В прорезах пластин перемещаются ползушки A, B и C, закрепляемые на расстояниях r_k от соответствующих осей. К точкам A, B и G присоединяется сумматор $ABDCE$, точка E которого опишет при одном обороте диска I кривую L. В случае полиномов более высоких степеней соответственно увеличивается число зубчатых колес и пантографов. Механизмы этого рода, помимо основного своего назначения, могут иметь еще ряд других применений, одно из которых мы найдем далее.

2) Механизмы для отображения эллипсов и прямых.

Положим, что

$$z = z_0 + r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{-i\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

где z_0, r_1 и r_2 — комплексные постоянные, а φ — вещественный параметр. Точка z описывает при изменении φ эллипс, с центром в z_0, осями $|r_1|+|r_2|$ и $|r_1|-|r_2|$, при чем ось $|r_1|+|r_2|$ направлена по отношению к оси x под углом $\dfrac{arg\, r_1 + arg\, r_2}{2}$.

(В частности, при $|r_1| = |r_2|$ этот эллипс переходит в отрезок прямой). Выражение для W при этом принимает вид:

$$W = c_0 e^{in\varphi} + d_0 e^{-in\varphi} + c_1 e^{i(n-1)\varphi} + d_1 e^{-i(n-1)\varphi} + \ldots\ldots \quad (21)$$

Получается механизм, аналогичный предыдущему, только с двойным числом осей, вращающихся в разные стороны.

Рассмотрим частный случай, когда все коэффициенты a_k в выражении (15) вещественны, и положим при этом, что

$$z = a + \frac{h}{2}\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = a + h\cos\varphi, \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

т. е., что z движется по вещественной оси, в промежутке $(a-h,\ a+h)$ (a и h — вещественны).

В этом случае выражение (21) примет вид

$$W = b_0 \cos n\varphi + b_1 \cos (n-1)\varphi + \ldots + b_n, \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

где b_k — вещественные коэффициенты. Даваемое формулой (23) значение W может быть рассматриваемо, как вещественная часть комплексного числа W_1, определяемого уравнением:

$$W_1 = b_0 e^{in\varphi} + b_1 e^{i(n-1)\varphi} + \ldots + b_{n-1} e^{i\varphi} \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

(постоянный член b_n опускаем), которое строится при помощи механизма типа, изображенного на чертеже 8. Расстояние точки E этого механизма до оси y даст нам значения полинома (15) для всех вещественных значений независимой переменной в промежутке $(a-h,\ a+h)$. Приведя точку W_1 на прямую $x=-b_n$, найдем один из вещественных корней полинома (15), равный

$$z_1 = a + h\cos\varphi_1,$$

(где φ_1 — соответствующий угол поворота диска I) и лежащий в промежутке $(a-h,\ a+h)$. Таким образом приведенный механизм может служить и для нахождения вещественных корней численных уравнений высших степеней. Сверх того, как уже было указано, он может иметь ряд других интересных применений, на которых я не буду здесь останавливаться.

Über die Darstellung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit Hilfe der Mechanismen.

S. Gerschgorin.

In dieser Arbeit wird der Beweis eines allgemeinen Lehrsatzes dargelegt, welcher die Möglichkeit aufstellt für jede beliebig angegebene algebraische Funktion der komplexen Veränderlichen ein entsprechendes Gelenkmechanismus zu konstruieren. Dabei wird eine Methode gegeben, solche Mechanismen wirklich zu konstruieren, die wesentlich auf der Darstellung der unabhängigen Veränderlichen als Summe zweier Zahlen mit konstanten Moduln beruht.

Endlich wird eine vereinfachte Variante der oben angegebenen Mechanismen aufgestellt, welche ausser anderen Anwendungen, auch zur Berechnung reeller Wurzeln der numerischen Gleichungen höheren Grades dienlich sind.

Ленинград,
Технологический Институт.

Об одной двойной сумме.

Н. Н. Семенов.

Настоящая статья содержит весьма элементарное доказательство одной теоремы, сообщенной мне проф. И. И. Ивановым.

Теорема. Имеют место следующие равенства:

$$(A)\qquad \sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \frac{\sin\dfrac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin\dfrac{k\pi}{a}} = -\frac{\varphi(a)}{2}\quad (a\text{ — нечетное}).$$

$$(B)\qquad \sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-2}{2}} \frac{\sin\dfrac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin\dfrac{k\pi}{a}} = 0\quad (a\text{ — четное}).$$

В приведенных формулах суммирование по b распространяется на все целые числа от 1 до a, взаимно-простые с числом a; суммирование по k—на все натуральные числа в указанных выше пределах; $\varphi(a)$ — функция Euler'а, выражающая число (натуральных) чисел меньших a и с a взаимно-простых.

Доказательство. Докажем сначала справедливость равенства (A). С этою целью вспомним известную из элементарного анализа формулу

$$(*)\qquad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \cos k\xi = \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}\xi}{2\sin\dfrac{\xi}{2}}.$$

Пользуясь этою формулой, мы преобразуем левую часть равенства (A) в некоторую тройную сумму. Применяя формулу (*) в обратном порядке, находим

$$\frac{\sin \frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin \frac{k\pi}{a}} = 2\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{j=b} \cos \frac{2k\pi}{a} j\right].$$

Значит

$$\sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \frac{\sin \frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin \frac{k\pi}{a}} =$$

$$= \sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} 2\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{j=b} \cos \frac{2k\pi}{a} j\right] =$$

$$= \sum_{\substack{b=1 \\ (\psi(k)=1)}}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \psi(k) + 2 \sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{j=b} \cos \frac{2k\pi}{a} j\right).$$

В правой части последнего равенства для сокращения записи мы ввели обозначение $\psi(k) = 1$ при всяком k. Очевидно что

$$\sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \psi(k) = \frac{a-1}{2} \varphi(a)$$

($\varphi(a)$ означает функцию Euler'a). Следовательно,

$$(**) \qquad \sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \frac{\sin \frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin \frac{k\pi}{a}} =$$

$$= \frac{a-1}{2} \varphi(a) + 2 \sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{j=b} \cos \frac{2k\pi}{a} j\right)$$

Переставим теперь в тройной сумме правой части порядок суммирований по k и j. Применяя формулу (*), легко находим, что

$$\sum_{b=1}^{b<a} \sum_{j=1}^{j=b} \left(\sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \cos \frac{2k\pi}{a} j \right) =$$

$$= -\sum_{b=1}^{b<a} \sum_{j=1}^{j=b} \chi(j, b) = -\frac{1}{2} \sum_{b=1}^{b<a} b.$$

$$\left(\chi(j, b) = \frac{1}{2}\right)$$

Здесь $\sum\limits_{b=1}^{b<a} b$ есть сумма всех чисел b, меньших a и с a взаимно-простых. Так как $\sum\limits_{b=1}^{b<a} b = \frac{1}{2} a\varphi(a)$, то наша тройная сумма равна $-\frac{1}{4} a\varphi(a)$.

Подставляя найденное значение тройной суммы в правую часть равенства (**), находим

$$\sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \frac{\sin \frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin \frac{k\pi}{a}} =$$

$$= \frac{a-1}{2} \varphi(a) - \frac{a\varphi(a)}{2} = -\frac{\varphi(a)}{2}.$$

Формула (A) таким образом доказана.

При доказательстве второй части теоремы мы можем, применяя формулу (*), преобразовать левую часть равенства (B) следующим образом:

$$\sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-2}{2}} \frac{\sin \frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin \frac{k\pi}{a}} =$$

$$=\sum_{b=1}^{b<a}\ \sum_{k=1}^{k=\frac{a-2}{2}} 2\left[\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{l=b}\cos\frac{2k\pi l}{a}\right]=$$

$$=\frac{a-2}{2}\varphi(a)+2\sum_{b=1}^{b<a}\ \sum_{k=1}^{k=\frac{a-2}{2}}\left(\sum_{l=1}^{l=b}\cos\frac{2k\pi l}{a}\right).$$

Изменяя порядок двух внутренних суммирований в правой части на обратный и применяя формулу (*), получаем

$$\sum_{b=1}^{b<a}\ \sum_{k=1}^{k=\frac{a-2}{2}}\frac{\sin\frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin\frac{k\pi}{a}}=$$

$$=\frac{a-2}{2}\varphi(a)+\sum_{b=1}^{b<a}\ \sum_{l=1}^{l=b}\left((-1)^{l+1}-1\right)=$$

$$=\frac{a-2}{2}\varphi(a)-\sum_{b=1}^{b<a}b+$$

$$+\sum_{b=1}^{b<a}\left[(-1)^2+(-1)^3+\ldots\ldots+(-1)^{b+1}\right].$$

Не трудно убедиться, что

$$\sum_{b=1}^{b<a}\ \sum_{l=1}^{l=b}(-1)^{l+1}=\sum_{b=1}^{b<a}(-1)^{b+1}=\varphi(a).$$

Следовательно,

$$\sum_{b=1}^{b<a}\ \sum_{k=1}^{k=\frac{a-2}{2}}\frac{\sin\frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin\frac{k\pi}{a}}=$$

$$=\frac{a-2}{a}\varphi(a)+\varphi(a)-\frac{a\varphi(a)}{2}=0,$$

и формула (B) таким образом доказана.

Замечание. К равенствам (A) и (B) можно придти, определяя истинное значение дроби $\frac{x^b-1}{x^a-1}$ при $x=1$ и суммируя затем по всем числам b, меньшим a и с a взаимно-простым.

Über eine Doppelsumme.

N. Semenoff.

Diese kleine Mitteilung enthält einen sehr einfachen Beweis der nächstfolgenden Formeln:

$$(A) \qquad \sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-1}{2}} \frac{\sin \frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin \frac{k\pi}{a}} = -\frac{\varphi(a)}{2}.$$

(Wenn a eine ungerade Zahl ist).

$$(B) \qquad \sum_{b=1}^{b<a} \sum_{k=1}^{k=\frac{a-2}{2}} \frac{\sin \frac{(2b+1)k\pi}{a}}{\sin \frac{k\pi}{a}} = 0.$$

(Wenn a eine gerade Zahl ist).

In diesen Formeln (A) und (B) wird die Summation nach b auf alle natürlichen Zahlen von 1 bis a, welche zu a teilerfremd (relativ prim) sind, erweitert; die Summation nach k erfolgt nach allen natürlichen Zahlen, welche zwischen den in den Formeln gezeigten Grenzen liegen; unter $\varphi(a)$ verstehen wir die bekannte Eulersche Funktion—die Anzahl aller ganzen Zahlen, welche kleiner als a und zu a teilerfremd sind.

К неевклидовой геометрии кругов.

О. К. Житомирский.

Известные мне работы по неевклидовой геометрии кругов основаны или на методе координат на плоскости, или на методе проекции из трехмерного пространства. В предлагаемой работе я стремлюсь выяснить некоторые вопросы этой теории с помощью более прямого в данном случае метода проективной метрики на плоскости.

Прежде всего я вывожу известные основные свойства кругов и их систем и получаю некоторые новые. К последним относятся свойства пучков с изотропной радикальной осью и фокальные свойства ортогональных кругов. Затем я упрощаю полученные соотношения с помощью ориентировки кругов, после чего геометрия кругов оказывается совпадающей с геометрией полярного пространства. Такой прием уже неоднократно применялся с аналогичной целью в евклидовой геометрии. В работах же по неевклидовой геометрии кругов геометрия полярного пространства принималась за исходную точку для исследования свойств систем кругов. За основную поверхность полярного пространства всегда принималась при этом вещественная нелинейчатая поверхность. Выбранный мною обратный путь показывает, однако, что с точки зрения проективной метрики такое полярное пространство недостаточно для изображения всех кругов. Остальной части кругов соответствует в эллиптическом случае полярное пространство с мнимой основной поверхностью, а в гиперболическом случае полярное пространство с линейчатой основной поверхностью. В заключение я рассматриваю геометрию ориентированных точек на плоскости, как эквивалент геометрии на основной поверхности. Эта геометрия находится к геометрии неориентированных точек в том же отношении, как сферическая геометрия к эллиптической *).

---

*) Эпитеты «эллиптический», «гиперболический», «абсолютный», «радикальный», и «двойной» в дальнейшем обычно заменяются сокращениями «элл.», «гип.», «абс.», «р.», «дв.».

§ 1. Из проективной метрики.

В проективной метрике метрические свойства рассматриваются как проективные отношения к *абсолюту* S. В эллиптической геометрии S есть мнимое коническое сечение, в гиперболической — вещественное невырождающееся.

В гип. геометрии точки разбиваются на *собственные* — внутри S, *бесконечно удаленные* — на контуре S и *идеальные* — вне S.

Равенство есть коллинеация, сохраняющая S. Всякое равенство сохраняет некоторую точку O и ее абсолютную поляру o. *Симметрия* есть гармоническая гомология с центром O и осью o. O называется *центром*, o — *осью* симметрии.

Перпендикулярами к прямой o называются прямые, проходящие через ее абсолютный полюс O. Касательные к абсолюту перпендикулярны к себе самим и называются *изотропными* прямыми.

Круг K есть коническое сечение, имеющее с S в общих точках I, J общие касательные i, j. Точки I, J называются *основными точками*, прямые i, j — *основными касательными*, точка $O \equiv ij$ — центром, прямая $o \equiv IJ$ — осью или *направляющей* круга

I, J мы будем предполагать вещественными или мнимо-сопряженными, так что центр O всегда будет вещественным. Таким образом круги с мнимым центром исключаются из рассмотрения. Но мы не исключаем из рассмотрения кругов с мнимым или идеальным контуром.

В гип. геометрии круги разбиваются на *обыкновенные* — с собственным центром, *предельные* — с бесконечно удаленным центром, и *сверхпредельные* — с идеальным центром. В случае предельного круга имеем $I \equiv J \equiv O$, $i \equiv j \equiv o$, и касание 1-го порядка в точках I, J обращается в касание 3-го порядка в точке O.

Круг K может вырождаться в пару прямых ij, или двойную точку $O^2{}_2$ и в пару точек IJ, или двойную прямую o^2; вырождение предельного круга есть одновременно пара прямых ij и двойная прямая o^2.

Вырождение в дв. прямую обычно приводит к исключениям из общих предложений. Поэтому в дальнейшем при доказательствах предполагается, что рассматриваемые круги не вырождаются в дв. прямые. Случаи вырождения рассматриваются отдельно.

Абсолют S рассматривается как круг с произвольным центром.

Везде сохраняется обозначение S для абсолюта, $K, K_1, K_2 \ldots$ для кругов, O, O_1 $O_2, \ldots$ для их центров, o, o_1, $o_2, \ldots$ для их направляющих, и т. д.

§ 2. Данные, определяющие круг.

Совокупность кругов с данным центром O представляет собою пучок кривых II порядка; этот пучок всегда содержит дв. прямую o^2 и абсолют S. Отсюда нетрудно вывести:

1. Когда K описывает пучок концентрических кругов $o^2 S$, то поляра относительно K точки P, отличной от O и не лежащей на o, описывает проективный $o^2 S$ пучок прямых с центром в абс. полюсе диаметра OP.

Как следствие, получим: круг K вполне определяется, если принять произвольную точку O за центр K, задать произвольную точку P, отличную от O и не лежащую на ее абс. поляре o, и принять произвольную прямую p, перпендикулярную к прямой OP, за поляру P относительно K.

2. Когда K описывает пучок концентрических кругов $o^2 S$, то пара точек пересечения K с прямой p, отличной от i, j и o, описывает проективную инволюцию на прямой p.

Отсюда получим следствие: круг K вполне определяется, если принять произвольную точку O за центр K и какую-нибудь пару вещественных или мнимо-сопряженных точек, симметричную относительно произвольной неизотропной прямой пучка O, за пару точек K.

§ 3. Радикальные оси и центры.

Основные принадлежащие сюда соотношения были найдены Plücker'ом при помощи введенного им самим и Bobillier способа сокращенных обозначений *). Я применяю линейные свойства системы кривых II порядка, т.-е. в сущности тот же способ в геометрической форме. При чтении соответствующих доказательств следует мысленно заменить кривые и пучки кривых II порядка соответственно точками и прямыми.

1. Радикальной осью двух эксцентрических кругов называется общая хорда их, перпендикулярная к линии центров.

Пусть будут K_1, K_2 два эксцентрических круга. Так как пучки $o_1^2 S$, $o_2^2 S$ имеют общую кривую S, то и пучки $K_1 K_2$, $o_1^2\, o_2^2$ имеют общую кривую R_{12}. Как известно пучок $o_1^2\, o_2^2$ есть инволюция пар прямых с двойными элементами o_1^2, o_2^2. Отсюда ясно, что R_{12} есть пара общих хорд K_1, K_2, проходящая через вершину $o_1 o_2$ их общего полярного треугольника. Таким образом, р. оси кругов K_1, K_2 суть составляющие прямые пары R_{12}.

Если K_1, не $\equiv o_1^2$, K_2 не $\equiv o_2^2$, то R_{12} не $\equiv o_1^2$, o_2^2; р. оси суть две различные прямые, гармонически разделяющие прямые o_1, o_2. Если $K_1 \equiv o_1^2$, K_2 не $\equiv o_2^2$, то $R_{12} \equiv o_1^2$; р. оси сли-

*) J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, nn⁰ 384, 385.

ваются с прямой o_1. Если $K_1 \equiv o_1^2$, $K_2 \equiv o_2^2$, то R_{12} становится неопределенной; все прямые пучка $o_1 o_2$ суть р. оси.

2. Рассмотрим подробнее случай K_1 не $\equiv o_1^2$, K_2 не $\equiv o_2^2$, R_{12} не $\equiv o_1^2$, o_2^2. При этих условиях K_1, K^2, R_{12} определяют некоторые отрезки $o_1^2 K_1 S$, $o_2^2 K_2 S$, $o_1^2 R_{12} o_2^2$ пучков $o_1^2 S$, $o_2^2\ S$, $o_1^2 o_2^2$. Каждый из этих отрезков вполне определяется двумя другими и связан с ними так, что при замене одного из них дополнительным он сам заменяется дополнительным, и следовательно при замене обоих дополнительными он остается без изменения.

Как известно, дв. прямые o_1^2, o_2^2 отделяют в пучке $o_1^2 o_2^2$ пары вещественных различных прямых от пар мнимо-сопряженных. Вещественность или мнимость R_{12} зависит, таким образом, только от принадлежности K_1, K_2 к тем или иным отрезкам пучков $o_1^2 S$, $o_2^2 S$.

Состав отрезков пучка $o^2 S$ при данном взаимном положении o, S легко вывести из рассмотрения инволюции, производимой им на каком-нибудь неизотропном диаметре, если проективно перенести эту инволюцию на вспомогательную кривую II порядка и воспользоваться проективностью этой инволюции с пучком прямых, проходящих через ее центр.

В элл. геометрии один из отрезков $o^2 S$ окажется состоящим из вещественных кругов пучка $o^2 S$ и части мнимых, а другой из остальных мнимых. Круги двух отрезков 1-го рода имеют вещественные р. оси, так как всякий вещественный круг одного из этих отрезков пересекает бесчисленное множество вещественных кругов другого, и следовательно наверное имеет с ними вещественные р. оси. Отсюда, в свою очередь, следует, что круги двух отрезков 2-го рода также имеют вещественные р. оси, а круги двух отрезков разного рода имеют мнимые р. оси. Соединяя все отрезки одного рода в один класс, мы разобьем все круги плоскости, кроме дв. прямых и абсолюта, на такие два класса, что два эксцентрических круга одного и того же класса имеют вещественные р. оси, а два эксцентрических круга разных классов имеют мнимые р. оси. 1-ый класс состоит из вещественных кругов и части мнимых, а 2-ой из остальных мнимых.

В гип. геометрии получим такую же разбивку на два класса, при чем 1-ый класс состоит из мнимых кругов и вещественных с собственным контуром, а 2-ой из вещественных с идеальным контуром.

В обоих случаях дв. прямые и абсолют образуют общую границу этих двух классов.

3. За р. ось двух концентрических кругов принимается их общая направляющая. В этом случае все общие диаметры могут рассматриваться как линии центров, и направляющая ко всем им перпендикулярна.

4. Если задан круг K_1 не $\equiv o_1^2$ и пара прямых R_{12}, пересекающих направляющую o_1 в общей точке или совпадающих

с нею, то тем самым вполне определяется круг K_2, имеющий с кругом K_1 пару р. осей R_{12}. Направляющая O_2 определится как прямая, гармонически отделяющая прямую o_1 от пары прямых R_{12}, и сам круг K_2 определится как общая кривая пучков $K_1 R_{12}$, $o_1{}^2 S$.

5. Радикальным центром трех кругов называется общая точка р. осей трех различных пар этих кругов.

Пусть будут K_1, K_2, K_3 три эксцентрических круга. Так как пучки $o_1{}^2 S$, $o^2{}_2 S$, $o^2{}_3 S$ имеют общую кривую S, то общие кривые R_{12}, R_{13}, R_{23} пучков $K_1 K_2, K_1 K_3$, $K_2 K_3$ с пучками $o_1{}^2\, o_2{}^2$, $o_2{}^2\, o_3{}^2$, $o_2{}^2\, o_3{}^2$ принадлежат одному пучку. Р. центры K_1, K_2, K_3 суть основные точки этого пучка.

Если K_1 не $\equiv o_1{}^2$, K_2 не $\equiv o_2{}^2$, K_3 не $\equiv o_3{}^2$, то R_{12}, R_{13}, R_{23} не $\equiv o_1{}^2$, $o_2{}^2$, $o_3{}^2$. Если O_1, O_2, O_3 не лежат на одной прямой, то o_1, o_2, o_3 не пересекаются в одной точке, и R_{12}, R_{13}, R_{23}, суть пары противоположных сторон четырехугольника, диагонали которого суть o_1, o_2, o_3; р. центры суть вершины этого четырехугольника. Если O_1, O_2, O_3 лежат на одной прямой, то o_1, o_2, o_3 пересекаются в одной точке P, и R_{12}, R_{13}, R_{23} суть пары инволюции в пучке прямых P. Если R_{12}, R_{13}, R_{23} не имеют общей прямой, то инволюция не вырождается; P есть единственный р. центр. Если R_{12}, R_{13} имеют общую прямую, то инволюция вырождается, и R_{23} также содержит эту прямую; все точки этой прямой суть р. центры.

Если $K_1 \equiv o_1{}^2$, K_2 не $\equiv o_2{}^2$, K_3 не $\equiv o_3{}^2$, то R_{12}, $R_{13} \equiv o_1{}^2$, R_{23} не $\equiv o_2{}^2$, $o_3{}^2$; р. центры суть общие точки o_1 с R_{23}. Если O_1, O_2, O_3 не лежат на одной прямой, то o_1 не проходит через $P \equiv o_2\, o_3$ и пересекает R_{12} в двух точках; р. центры суть эти точки. Если O_1, O_2, O_3 лежат на одной прямой, то o_1 проходит через P. Если o_1 не принадлежит R_{23}, то P есть единственный р. центр. Если же o_1 принадлежит R_{23}, то все точки o_1 суть р. центры.

Если $K_1 \equiv o_1{}^2$, $K_2 \equiv o_2{}^2$, K_3 не $\equiv o_3{}^2$, то $R_{13} \equiv o_1{}^2$, $R_{23} \equiv o_2{}^2$ и R_{12} есть произвольная пара пучка $o_1{}^2\, o_2{}^2$; р. центр есть $P \equiv o_2\, o_3$.

Если $K_1 \equiv o_1{}^2$, $K_2 \equiv o_2{}^2$, $K_3 \equiv o_3{}^2$, то R_{12}, $R_{13}\, R_{23}$ суть произвольные пары пучков $o_1{}^2\, o_2{}^2$, $o_1{}^2\, o_3{}^2$, $o_2{}^2\, o_3{}^2$; все точки плоскости суть р. центры.

Остается рассмотреть случай, когда круги K_1, K_2, K_3 не эксцентричны. Если $o_1 \equiv o_2$ не $\equiv o_3$, то р. центр есть $P \equiv o_1\, o_3$. Если $o_1 \equiv o_2 \equiv o_3$, то все точки o_1 суть р. центры.

§ 4. Пучки и сети кругов.

1. Решим задачу: дан круг K_0 не $\equiv o_0{}^2$ и прямая r; найти круг K, имеющий с кругом K_0 р. ось r.

Если r мнимая прямая, то сопряженная прямая r' есть вторая р. ось кругов K_0, K; K_0 и пара р. осей rr' вполне определяют K (§ 3, 4).

Если r вещественная прямая и пересекает o_0 в точке P, то за вторую р. ось можно принять любую отличную от o_0 прямую r'; лишь тогда вполне определится K. Когда r' описывает пучек прямых P, за исключением o_0, то направляющая o круга K также описывает пучек P, за исключением o_0 (§ 3, 4), и центр O круга K описывает абс. поляру p точки P. Присоединив к кругам K и круг K_0, получим совокупность кругов, центры которых однократно покрывают прямую p. Круги этой совокупности попарно имеют р. ось r, так как каждый круг K имеет с кругом K_0 р. ось r, и вследствие этого два различных круга K и между собою имеют р. ось r (§ 3, 5).

Если $r \equiv o_0$, то круги K и круг K_0 образуют пучек концентрических кругов $o_0{}^2S$.

Полученный результат оправдывает следующее определение:

Пучком кругов называется совокупность кругов, попарно имеющих заданную вещественную р. ось r; прямая r называется *р. осью* пучка.

Пучок кругов вполне определяется своей р. осью r и каким-нибудь своим кругом K_0 не $\equiv o_0$ и отличным от прямой r_0. Если r не $\equiv o_0$, пучок называется *эксцентрическим*, если $r \equiv o_0$—*концентрическим.*

Легко оправдать и следующее определение:

Сетью кругов называется совокупность кругов, попарно имеющих вещественные р. оси r, проходящие через заданную вещественную точку R; точка R называется *р. центром* пучка.

Действительно, если задан вещественный пучок R прямых r и круг K_0 не $\equiv o_0$ и отличный от дв. прямых r^2, то тем самым определяется ∞^1 пучков кругов, заключающих в себе круг K_0 и имеющих р. оси r, и следовательно ∞^1 кругов, имеющих с кругом K_0 р. оси r; эти ∞^1 кругов и между собой имеют р. оси r (§§ 4, 5) и, следовательно вместе с кругом K_0. образуют сеть кругов.

Если R не лежит на o_0, то всякая точка плоскости O есть центр одного круга сети; Действительно: если $O \equiv O_0$, то $K \equiv K_0$, так как всякий другой круг с центром O_0 имеет с K. р ось o_0, не проходящую через R; если же O не $\equiv O_0$, то o не $\equiv o_0$ пересекает o_0 в точке P, одна р. ось кругов K_0, K есть $r \equiv PR$ не $\equiv o_0$, другая, гармонически отделяющая r от o_0, o, есть r' не $\equiv o$, и круг K вполне определен кругом K_0 и парой р. осей с ним r, r' (§ 3, 4). Такая сеть называется *эксцентрической.* Если R лежит на o_0, то сеть состоит из всех кругов с центрами на абс. поляре R. Действительно, если круг K принадлежит сети, то он имеет с кругом K_0 ось r, проходящую через R; при r не $\equiv o_0$ направляющая o не $\equiv o_0$ и проходит через $R \equiv ro_0$; при $r \equiv o_0$ направляющая $o \equiv o_0$; в обоих случаях центр O лежит на абс. поляре точки R; но все круги с центром на абс. поляре точки R действительно принадлежат сети, так как они попарно имеют р. оси, проходящие через R. Такая сеть называется *концентрической*.

Рассматривая пучки и сети, мы предполагали до сих пор, что круг K_0 не вырождается в дв. прямую. В этом последнем случае пучки и сети вырождаются в совокупности дв. прямых. Пучек вырождается при $K_0 \equiv o_0^2$ в совокупность дв. прямых, проходящих через точку $P \equiv o_0 r$; все прямые пучка P суть его р. оси. Сеть вырождается при $K_0 \equiv o_0^2$ в совокупность всех дв. прямых плоскости; все точки плоскости суть ее р. оси.

Окончательно получаем: пучок вполне определяется р. осью r и кругом K_0 не $\equiv r^2$; сеть вполне определяется р. центром R и кругом K_0, отличным от прямых r пучка R.

Эксцентрические пучки и сети имеют с общей границей обоих классов кругов (§ 3, 2) общие дв. прямые; остальные круги их всегда принадлежат одному из классов, так как они эксцентричны и имеют вещественные р. оси. Концентрические пучки и сети имеют общим с границей классов еще и абсолют; они разбиваются границей на части, принадлежащие разным классам; каждую такую часть мы будем называть концентрическим пучком или сетью *соответствующего класса*. Выродившиеся пучки и сети целиком принадлежат границе.

2. Невыродившиеся пучки одного класса разбиваются на типы по относительному положению своих кругов.

Пусть пучок определен кругом K_0 не $\equiv o_0^2$ и р. осью r. Возможны следующие случаи.

A. r пересекает K_0 в паре различных точек MN не $\equiv IJ$. Всякие два круга пучка пересекаются в точках M, N.

B. r пересекает K_0 в паре различных точек $MN \equiv IJ$. Всякие два круга пучка, кроме r^2, имеют в точках M, N касание 1-го порядка.

C. r касается K_0 в точке M не $\equiv I, J$. Всякие два круга пучка имеют в точке M касание 1-го порядка.

Этим исчерпываются возможные случаи в элл. геометрии, так как касательные к K_0 в точках I, J мнимые, и r не может касаться K_0 в точках I, J. Но в гип. геометрии возможны еще следующие случаи:

D. K_0—сверхпредельный круг и $r \equiv i_0$. Направляющие всех кругов пучка образуют пучок прямых I_0, и, следовательно, все круги пучка сверхпредельные, кроме $i_0 j_0$. Вторая р. ось r' двух сверхпредельных кругов пучка K_1, K_2 гармонически отделяет r от их направляющих o_1, o_2 не $\equiv i_0$, и, следовательно, пересекает круги K_1, K_2 в точке I_0 и еще в одной точке M. Таким образом, круги K_1, K_2 имеют только общие точки I_0, M, и, следовательно, имеют в точке I_0 касание 2-го порядка. Круги K_1, K_2 равны, так как симметрия относительно $r' \equiv I_0 M$ сохраняет M и превращает o_1, o_2 друг в друга, и следовательно превращает и круги K_1, K_2 друг в друга.

E. K_0—предельный круг и $r \equiv o_0 \equiv i_0 \equiv j_0$. Все круги пучка предельные, кроме o_0^2. Всякие два предельных круга пучка имеют в точке $O_0 \equiv I_0 \equiv J_0$ касание 3-го порядка и равны между собой.

В 1-м классе гип. геометрии этим и исчерпываются возможные случаи. Но во 2-м классе возможен еще случай

F. K_0 есть пара вещественных прямых $i_0 j_0$ и $r \equiv i_0$. Пучок состоит из пар вещественных прямых $i_0 j$, где j—произвольная изотропная прямая. Всякие две пары имеют общую прямую i_0 и равны между собой.

§ 5. Ортогональность.

1. Легко доказать следующее предложение:

Если два круга пересекаются в некоторой точке под прямым углом, то они эксцентричны, и перпендикуляр из точки пересечения к линии центров есть поляра центра каждого из кругов относительно другого. Наоборот, если два круга эксцентричны, и поляры центров каждого из кругов относительно другого совпадают с некоторым перпендикуляром к линии центров, то круги пересекаются в некоторой точке этого перпендикуляра под прямым углом.

Отсюда вытекает следующее построение круга K с заданным центром O, пересекающего под прямым углом заданный круг K_0, центр которого O_0 отличен от O: находим поляру p точки O относительно круга K_0 и затем находим круг K по центру O и паре взаимных поляр O, p (§ 2, 1).

Если определить ортогональность двух кругов как пересечение их в некоторой точке под прямым углом, то определение будет неприменимо к концентрическим кругам, которые в общих точках только касаются. Если в этом последнем случае ограничиться требованием перпендикулярности касательтельных в общих точках, то в отличие от предыдущего однозначного построения пришлось бы считать ортогональными к заданному кругу все концентрические с ним круги, так как концентрические круги имеют в общих точках касательные, перпендикулярные к себе самим. Нужно найти такое определение ортогональности двух кругов, которое в случае эксцентрических кругов было бы равносильно условию пересечения их под прямым углом, а в случае концентрических кругов приводило бы к однозначной определимости одного из них другим. Рассмотрим предварительно свойства одной фигуры.

2. Две пары вещественных или мнимо-сопряженных касательных к абсолюту образуют описанный около абсолюта четырехсторонник. В первом случае все три пары противоположных вершин четырехсторонника вещественны, во втором одна из них вещественна, а две других мнимо-сопряженные. В обоих случаях все три диагонали его вещественны. Эти диа-

гонали образуют вещественный полярный треугольник абсолюта. Абсолют и пары противоположных вершин четырехсторонника принадлежат некоторому пучку конфокальных кривых II-го класса. Как известно, две прямые, сопряженные относительно двух каких-нибудь кривых пучка кривых II класса, сопряжены относительно всех остальных. Отсюда следует, что две прямые, перпендикулярные и гармонически разделяющие одну пару противоположных вершин четырехсторонника, гармонически разделяют две другие пары, и что две прямые, гармонически разделяющие две пары противоположных вершин четырехсторонника, гармонически разделяют и третью и перпендикулярны между собой.

Пусть, наоборот, пара вещественных перпендикулярных прямых пересекает стороны вещественного полярного треугольника абсолюта в отличных от его вершин парах точек. По крайней мере одна из этих пар не разделяет соответствующей пары вершин и определяет вместе с нею инволюцию, двойные точки которой вещественны. В случае гиперболической геометрии эти двойные точки обе обыкновенные или обе идеальные, так как они гармонически разделяют пару вершин полярного треугольника абсолюта, и следовательно не разделяют пары точек пересечения соответствующей стороны этого треугольника с абсолютом. Пары касательных из этих двойных точек к абсолюту образуют четырехсторонник только что рассмотренного типа. Диагональный треугольник этого четырехсторонника совпадает с рассматриваемым полярным треугольником абсолюта, а две остальные пары противоположных вершин его суть пары двойных точек инволюций, определяемых двумя остальными парами точек пересечения рассматриваемых перпендикулярных прямых и соответствующими парами вершин этого треугольника.

Заметив, что упомянутые инволюции суть симметрии относительно сторон полярного треугольника абсолюта, и приняв во внимание, что всякая пара неизотропных перпендикулярных прямых есть пара сторон некоторого полярного треугольника абсолюта, мы легко выведем из предыдущего следующее необходимое и достаточное условие конфокальности двух пар вещественных или мнимо-сопряженных точек:

Две пары точек конфокальны, если они лежат на перпендикулярных неизотропных прямых, симметричны относительно этих прямых, и гармонически разделяются другой парой перпендикулярных прямых.

3. Докажем теперь следующее предложение:

Пары точек пересечения пересекающихся под прямым углом кругов K_1, K_2 с неизотропными перпендикулярными диаметрами соотв. кругов K_2, K_1 конфокальны между собой.

Пусть будет $p \equiv o_1\, o_2$ линия центров, g общая поляра, d_1, d_2 диаметры, $K_1 d_2$, $K_2 d_1$ пары точек пересечения.

Исключим пока случай, когда один из диаметров совпадает с линией центров. Тогда для доказательства достаточно заметить, что пары точек K_1d_2, K_2d_1 лежат на перпендикулярных прямых d_2, d_1, симметричны относительно прямых d_1, d_2 и гармонически разделяются перпендикулярными прямыми p, g. Последнее вытекает из того, что точки O_1, O_2 прямой p суть полюсы прямой g соотв. относительно кругов K_2, K_1.

В исключенном случае $d_1 = p$ можно заменить перпендикулярные прямые p, g некоторым наклонным к p диаметром круга K_1 и перпендикуляром к нему из точки pg, относительно которых столь же легко доказать, что они гармонически разделяют пары точек K_1d_2, K_2d_1.

Обратный ход рассуждений приводит к обратному предложению:

Если эксцентричные круги K_1, K_2 пересекаются двумя неизотропными перпендикулярными диаметрами соотв. кругов K_2, K_1 в конфокальных парах точек, то круги K_1, K_2 пересекаются под прямым углом.

Соединяя оба предложения, получим:

Если эксцентричные круги K_1, K_2 пересекаются двумя неизотропными перпендикулярными диаметрами кругов K_2, K_1 в конфокальных парах точек, то они любыми двумя такими диаметрами пересекаются в конфокальных парах точек.

Последнее предложение остается верным и для концентричных кругов K_1, K_2, так как в этом случае всикую пару неизотропных перпендикулярных диаметров кругов K_1, K_2 можно совместить со всякой другой так, чтобы круги K_1, K_2 совместились сами с собой.

Полученные результаты оправдывают следующее определение ортогональности:

Круги K_1, K_2 называются ортогональными, если они пересекаются всякими двумя неизотропными перпендикулярными диаметрами кругов K_2, K_1 в конфокальных парах точек.

Равносильность этого определения в случае эксцентричности кругов K_1, K_2 с требованием пересечения под прямым углом ясна из предыдущего. В случае концентричности кругов K_1, K_2 каждый из них вполне определяет другой: выбрав какую-нибудь пару неизотропных перпендикулярных диаметров d_1, d_2 заданного круга K_1 определяем пару точек пересечения $K_1 d_2$, затем конфокальную пару K_2d_1 и наконец круг K_2 (§ 2, 2).

Таким образом, полученное определение удовлетворяет выставленным в начале § условиям.

4. Пара прямых ортогональна к кругу, когда ее центр лежит на круге; это предполагает вещественность круга. В частности две пары прямых ортогональны, когда они совпадают.

К дв. прямым предыдущие рассуждения неприменимы. Вводим дополнительное определение.

Дв. прямая ортогональна к кругу, когда она проходит через его центр. В частности две дв. прямые ортогональны, когда они перпендикулярны, и всякая дв прямая ортогональна к абсолюту.

5. Условимся обозначать: ортогональность кругов K_1, K_2— символом $\perp$; пучок кругов с р. осью r, содержащий круг K не $\equiv r^2$, — символом (rK); сеть кругов с р. центром R, содержащую круг K, отличный от дв. прямых r^2, проходящих через R, — символом $[RK]$.

Введем определение: круг K_1 и сеть $[R_2K_2]$ называются ортогональными, если круг K_1 ортогонален ко всем кругам сети $[R_2K_2]$.

Это определение оправдывается следующим предложением:

Для ортогональности круга K_1 и сети $[R_2K_2]$ необходимо и достаточно, чтобы р. центр R_2 был центром круга K_1 и чтобы круги K_1, K_2 были ортогональны.

Необходимость первого условия следует из того, что K_1 должен быть ортогонален ко всем r^2, а необходимость второго— прямо из определения. Остается для всякого круга сети K_2', не $\equiv r^2$, K_2, доказать $K_1 \perp K_2'$. Рассмотрим три случая:

A. $[R_2K_2]$ эксцентрическая сеть. Пусть будет r p. ось K_1, K_2, проходящая через R, и $p \equiv O_1 O_2$. Из $K_1 \perp K_2$, и $r \perp p$ следует конфокальность пар точек $K_1\, p$ и $K_2\, r$, после чего из $K_2r \equiv K_2'r$ следует $K_1 \perp K_2'$.

B. $[R_2\ K_2]$ концентрическая сеть. Если p—абс. поляра точки R_2, то из $K_1 \perp K_2$ следует $K_1 \equiv p^2$, а отсюда следует $K_1 \perp K_2'$.

C. $[R_2K_2]$ вырождается в сеть дв. прямых. Тогда $K_2 \equiv o_2^2$ $K_2' \equiv o_2'^2$. Из $K_1 \perp o_2^2$ не $\equiv r^2$ следует $K_1 \equiv S$, а отсюда следует $K_1 \perp o_2'^2$.

Круг K_1 и сеть $[R_2K_2]$ вполне определяют друг друга. Если задана сеть $[R_2K_2]$, то круг K_1 вполне определяется по центру $O_1 \equiv R_2$ и ортогональному кругу K_2. Если задан круг K_1 то сеть $[R_2K_2]$ также вполне определится. Для доказательства достаточно заметить, что она состоит из всех кругов, ортогональных к кругу K_1. Действительно, при K_1 не $\equiv o_1^2$ это видно из того, что центры кругов, ортогональных к кругу K_1, заполняют всю плоскость, а при $K_1 \equiv o_1^2$ очевидно.

Теперь введем определение: Пучки (r_1K_1), (r_2K_2) называются ортогональными, если все круги пучка (r_1K_1) ортогональны ко всем кругам пучка (r_2K_2).

Это определение оправдывается следующим предложением:

Для ортогональности пучков (r_1K_1), (r_2K_2) необходимо и достаточно, чтобы р. оси r_1, r_2 были перпендикулярны, чтобы центры кругов K_1, K_2 лежали соотв. на р. осях r_2, r_1 и чтобы круги K_1, K_2 были ортогональны.

Указанные условия можно представить в виде $r_1^2 \perp r_2^2$, $r_1^2 \perp K_2$, $r_2^2 \perp K_1$ (§ 5, 4) и $K_1 \perp K_2$, откуда ясна их необходимость. Для доказательства их достаточности заметим, что в силу этих условий пучок принадлежит сети $[O_2K_1]$, ортогональной к кругу K_2, и следовательно круг K_2 ортогонален ко всякому кругу K_1' пучка (r_1K_1), откуда точно также заключим, что круг K_1' ортогонален ко всякому кругу K_2' пучка (r_2K_2).

Если пучок (r_1K_1) эксцентрический, то пучок (r_2K_2) также эксцентрический: он состоит из кругов с центрами на прямой r_1, ортогональных к кругу K_1. Если пучок (r_1K_1) концентрический, то пучок (r_2K_2) есть пучок дв. прямых, проходящих через точку O_1. Если пучок (r_1K_1) есть пучок дв. прямых, проходящих через точку r_1o_1, то пучок (r_2K_2) концентрический с центром в точке r_1o_1.

Во всех случаях пучок (r_1K_1) вполне определяет пучок (r_2K_2).

Если пучок (r_1K_1) экцентрический, то его тип (§ 4,2) вполне определяет тип пучка (r_2K_2). Возможны следующие случаи:

A. (r_1K_1) есть пучок типа A. Тогда пара точек K_1r_1 не сливается с точкой r_1r_2, конфокальная пара точек K_2r_2 также не сливается с точкой r_1r_2, и (r_2K_2) есть пучок того же типа.

C. (r_1K_1) есть пучок типа C. Тогда пара точек K_1r_1 сливается с точкой $r_1r_2 \equiv M$, пара точек K_2r_2 также сливается с точкой M, и (r_2K_2) есть пучок того же типа.

D. (r_1K_1) есть пучок типа D. Тогда $r_1 \equiv i \equiv r_2$, и (r_2K_2) есть пучок того же типа. Расстояния p_1, p_2 кругов K_1, K_2 от своих направляющих o_1, o_2 связаны соотношением

$$\Pi(p_1) + \Pi(p_2) = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, перпендикуляры из точки пересечения M кругов K_1, K_2 на соотв. направляющие o_1, o_2 образуют угол $\frac{\pi}{2}$, который делится параллельной к направляющим o_1, o_2 прямою MJ на части $\Pi(p_1)$, $\Pi(p_2)$.

F. (r_1K_1) есть пучок типа F. Тогда (r_2K_2) совпадает с (r_1K_1),

6. Если ссть $[R_2K_2]$ эксцентрическая, то все ее непограничные круги принадлежат к тому же классу, что и круг K_1, так как имеют с ним вещественную ρ. ось—общую поляру центров (§ 5, 1). Если же сеть (R_2K_2) концентрическая, то она распадается на две сети разных классов, и мы будем называть каждую из них ортогональной к K_1 сетью *соответствующего класса*. Точно также, если пучок (r_2K_2) эксцентрический, то и ортогональный пучок (r_1K_1) эксцентрический, и все непограничные круги обоих пучков принадлежат к одному и тому же классу. Если же пучок (r_2K_2) концентрический, то он распадается на два пучка разных классов, и мы будем называть каждый из них ортогональным к (r_1K_1) пучком *соответствующего класса*.

§ 6. Свойства сопряжения.

В этом § рассматриваются круги одного какого-нибудь класса.

1. Если два круга не вырождаются одновременно в дв. прямые, то они принадлежат стольким пучкам, сколько имеют р. осей, а при одновременном вырождении—одному пучку дв. прямых, хотя имеют ∞^1 р. осей. Точно также, если три круга, не принадлежащие одному и тому же пучку, не вырождаются одновременно в дв. прямые, то они принадлежат стольким сетям, сколько имеют р. центров, а при одновременном вырождении—только сети дв. прямых хотя имеют ∞^2 р. центров. Отсюда найдем:

Два круга, определяют один или два пучка.

Три круга, не принадлежащие одному и тому же пучку, определяют одну, две или четыре сети.

Пусть будут $(r_1 K_1)$ и K_2 пучок и непринадлежащий ему круг. Круги r_1^2, K_1, K_2 принадлежат одной или двум сетям, и этим сетям принадлежит и пучок $(r_1 K_1)$. Таким образом:

Пучок и не принадлежащий ему круг определяют одну или две сети.

2. Применяя эти предложения к образам, ортогональным к задаваемым, получим взаимные предложения:

Две сети имеют один или два общих пучка.

Три сети, не содержащие одного и того же пучка, имеют один, два или четыре общих круга.

Пучок и не содержащая его сеть имеют один или два общих круга.

§ 7. Ориентировка класса.

Изложенные свойства сопряжения аналогичны соответствующим евклидовым, но отличаются от них своей неоднозначностью. Это различие можно устранить ориентировкой непограничных кругов класса и соответствующим изменением некоторых определений.

1. Чтобы охватить также и случай мнимых кругов, мы будем задавать ориентировку круга ориентировкой его центра или направляющей. В тех случаях, где нам придется пользоваться обеими ориентировками одновременно, мы будем считать их связанными между собой полярностью относительно абсолюта.

2. В ближайших §§ мы будем задавать ориентировку круга K ориентировкой его направляющей o. Ориентированный круг с его ориентированной направляющей будем обозначать через $\bar{K}$, $\bar{o}$, а при противоположной ориентировке через $\underline{K}$, $\underline{o}$. В связи с этим рассмотрим некоторые свойства ориентированных прямых.

Когда точка M описывает прямую o в некотором направлении; то прямая PM, соединяющая ее с не лежащей на прямой o точкой P, описывает пучок P в некотором соответствующем направлении, причем перемена первого направления влечет за собой перемену второго. Таким образом, ориентированная прямая $\bar{o}$ определяет во всякой не лежащей на ней точке некоторую ориентировку.

Как известно, две ориентированные прямые $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ определяют в двух нележащих на них точках P_1, P_2 одну и ту же ориентировку, когда P_1, P_2 не разделяют o_1 o_2, и противоположные, когда P_1, P_2 разделяют o_1, o_2, *). Таким образом $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ определяют во всякой точке P одной из ограниченных ими двуугольных областей o_1 o_2 одинаковую ориентировку, а во всякой точке P другой — противоположные ориентировки. Первую из этих областей мы обозначим через $\bar{o}_1$ $\bar{o}_2$. Перемена ориентировки одной из прямых влечет за собой замену определяемой ими двуугольной области дополнительной, а перемена ориентировки обеих прямых оставляет ее без изменения.

Три прямые $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$, $\bar{o}_3$ определяют три области $\bar{o}_1$ $\bar{o}_2$, $\bar{o}_1$ $\bar{o}_3$, $\bar{o}_2$ $\bar{o}_3$. Из определения ясно, что всякая общая точка двух из этих областей принадлежит и третьей. Если прямые o_1, o_2, o_3 пересекаются в одной точке, то области $\bar{o}_1$ $\bar{o}_2$, $\bar{o}_1$ $\bar{o}_3$, $\bar{o}_2$ $\bar{o}_3$, или не имеют общей части, или имеют одну и ту же общую часть. Если прямые o_1, o_2, o_3 не пересекаются в одной точке, то области $\bar{o}_1$ $\bar{o}_2$, $\bar{o}_1$ $\bar{o}_3$, $\bar{o}_2$ $\bar{o}_3$ имеют одну общую треугольную область. Эту область мы обозначим через $\bar{o}_1$ $\bar{o}_2$ $\bar{o}_3$. Перемена ориентировки одной из прямых влечет за собой замену определяемой ими треугольной области соседней вдоль этой прямой, перемена ориентировки двух прямых — замену ее соседней вдоль третьей прямой, а перемена ориентировки всех трех прямых оставляет ее без изменения.

3. Мы не будем давать пограничным кругам класса никакой ориентировки. Знаки $\bar{K}$, $\underline{K}$ в дальнейшем всегда обозначают противоположно ориентированные круги, совпадающие с кругом K. Совокупность всех кругов $\bar{K}$, $\underline{K}$ вместе с совокупностью пограничных образует *ориентированный класс*. Дальнейшие рассуждения относятся к кругам ориентированного класса.

Если даны два эксцентрических круга $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$, то из двух р. осей кругов K_1, K_2 только одна принадлежит области $\bar{o}_1$ $\bar{o}_2$, так как эти р. оси гармонически разделяют прямые o_1, o_2. Эту ось мы и будем считать р. осью кругов $\bar{K}_1$ $\bar{K}_2$. Если дан-

*) K. C. G. v. Staudt, Beitrage zur Geometrie der Lage, в гл. Vom Sinne.

ные круги концентрические, или хотя бы один из них вырождается в дв. прямую, то мы оставляем в силе прежнее определение р. оси. При этих соглашениях два круга всегда будут иметь одну р. ось, кроме случая одновременного вырождения в дв. прямые (§ 3, 1).

Если даны три круга $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$, центры которых не лежат на одной прямой, то из четырех р. центров кругов K_1, K_2, K_3 только один принадлежит области $\overline{o_1}\,\overline{o_2}\,\overline{o_3}$, так как эти р. центры суть вершины полного четырехугольника с диагональным трехсторонником $o_1 o_2 o_3$. Этот центр мы и будем считать р. центром кругов $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$. Р. оси кругов $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$ пересекаются именно в этом центре, так как область $\overline{o_1}\,\overline{o_2}\,\overline{o_3}$ есть общая часть областей $\overline{o_1}\,\overline{o_2}$, $\overline{o_1}\,\overline{o_3}$, $\overline{o_2}\,\overline{o_3}$.

Если даны два круга $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ и дв. прямая $o_3{}^2$, центры которых не лежат на одной прямой, то из двух р. центров кругов K_1, K_2, $o_3{}^2$ только один принадлежит р. оси кругов $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, так как эти центры суть точки пересечения р. осей кругов K_1, K_2 с прямой o_3. Р. оси кругов $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $o_3{}^2$ проходят все три только через этот центр, так как р. оси кругов $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, с кругом $o_3{}^2$ совпадают с прямой o_3. Этот центр мы и будем считать р. центром кругов $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $o_3{}^2$. Если центры данных кругов лежат на одной прямой, или более чем один из них вырождается в дв. прямую, то мы сохраняем прежнее определение р. центра. При этих соглашениях три круга всегда будут иметь или один р. центр, или одну линию р. центров, кроме случая одновременного вырождения в дв. прямые (§ 3, 5).

4. Ориентированные пучки и сети мы определим так же, как ранее неориентированные. Докажем, что они действительно существуют.

Ясно, что все круги ориентированного пучка с р. осью r, содержащего круг $\overline{K}_0$, должны совпадать с кругами пучка (rK_0). Кроме того всякий круг $\overline{K}$ этого ориентированного пучка должен быть ориентирован так, чтобы р. осью его с кругом $\overline{K}_0$, была прямая r. Если пучок (rK_0) эксцентрический, то ориентировка круга $\overline{K}$ этим вполне определяется, так как в этом случае K_0, K имеют две р. оси r, r', и круг $\overline{K}$ только при одной ориентировке имеет с кругом $\overline{K}_0$ р. ось r. При такой ориентировке кругов $\overline{K}$ каждые два из них $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ и между собой имеют р. ось r, так как прямая r, принадлежа областям $\overline{o_0}\,\overline{o_1}$, $\overline{o_0}\,\overline{o_2}$, будет принадлежать и области $\overline{o_1}\,\overline{o_2}$ (§ 7, 2) Если пучок $(r\ K_0)$ концентрический, то ориентировка круга $\overline{K}$ не определяется ориентировкой круга K_0. В этом случае ориентированный пучок состоит из пограничных кругов $o_0{}^2$, S и двояко ориентированных кругов пучка $(o_0^2\ S)$. Если пучок $(r\ K_0)$ есть пучок дв. прямых, то соответствующий ориентированный пучок $(r\ o_0^2)$ не отличается от неориентированного.

Из рассуждения видно, что ориентированный пучок с р. осью r, содержащий круг $\bar{K}_0$, вполне определяется этими данными и может быть обозначен через $(r\bar{K}_0)$. Ясно также, что в эксцентрических пучках $(r\bar{K}_0)$, $(r\underline{K}_0)$ круги ориентированы противоположно, кроме пограничного круга r^2.

Так же найдем:

Круги ориентированной сети с р. центром R, содержащей круг $\bar{K}_0$, совпадают с кругами сети $[RK_0]$. Если сеть $[RK_0]$ эксцентрическая, то ориентировка всех ее непограничных кругов определяется ориентировкой круга $\bar{K}_0$. Если сеть $[RK_0]$ концентрическая, то ориентировка ее непограничных кругов двоякая. Если сеть $[RK_0]$ есть сеть дв. прямых, то соответствующая ориентированная сеть не отличается от неориентированной. Ориентированная сеть с центром R, содержащая круг $\bar{K}_0$, вполне определяется этими данными и может быть обозначена через $[R\bar{K}_0]$. В эксцентрических сетях $[R\bar{K}_0]$, $[R\underline{K}_0]$ все круги ориентированы противоположно, кроме пограничных кругов r^2.

5. Пусть будут K_1, K_2 непограничные ортогональные круги и $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ совпадающие с ними как-нибудь ориентированные круги. Если круги K_1, K_2 эксцентрические, то мы будем считать круги $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ ортогональными только тогда, когда их р. ось совпадает с общей полярой (§ 5, 1). Если круги K_1, K_2 концентрические, то мы будем считать круги $\bar{K}_1$ $\bar{K}_2$ ортогональными только тогда, когда они ориентированы одинаково.

Для ортогональности пограничного круга к непограничному или двух пограничных кругов оставим в силе старые условия.

Ортогональность круга и сети или двух пучков ориентированного класса определим так же, как ранее для неориентированного.

Нетрудно проверить, что при этих соглашениях результаты § 5, п.п. 5, 6 остаются верными и в ориентированном классе.

6. Из полученных результатов непосредственно вытекают следующие свойства сопряжения в ориентированном классе:

Два круга определяют один пучок; три круга, не принадлежащие к одному и тому же пучку, определяют одну сеть; пучок и непринадлежащий ему круг определяют одну сеть; две сети имеют один общий пучок; три сети, не содержащие одного и того же пучка, имеют один общий круг; пучок и несодержащая его сеть имеют один общий круг.

Эти свойства не отличаются от соответствующих евклидовых.

§ 8. Абстрактные полярные пространства.

Если рассматривать круги, пучки и сети ориентированного класса соответственно как точки, прямые и плоскости абстрактного пространства X_3, то в отношении свойств сопряжения *) пространство X_3 будет проективным (§ 7, 6). Чтобы доказать, что пространство X_3 действительно проективно, нужно еще показать, что в пространстве X_3 также имеют место проективные свойства расположения и непрерывности, для чего должно быть предварительно определено расположение в классе $\overline{C}$.

Из аксиом расположения и непрерывности можно исключить понятие об естественном расположении в пучке прямых, если аксиомы расположения и непрерывности на прямой и в пучке прямых высказать только для прямой, а плоскую аксиому расположения заменить следующей:

Если две прямые перспективны одному и тому же пучку, то естественному расположению точек на одной из них соответствует естественное расположение точек на другой.

После этого естественное расположение прямых в пучке может быть определено как расположение, соответствующее естественному расположению точек любой перспективной прямой, и аксиомы расположения и непрерывности в пучке прямых могут быть доказаны.

Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением расположения кругов в пучке.

Пусть будет $\overline{g}$ пучок кругов, $\overline{K}_0$—не принадлежащий ему круг, R—р. центр определяемой ими сети. Каждому кругу пучка $\overline{g}$ соответствует определенная прямая r пучка R—р. ось этого круга с кругом $\overline{K}_0$. Наоборот, каждой прямой r пучка R соответствует определенный круг пучка $\overline{g}$—общий круг этого пучка с пучком $(r\ \overline{K}_0)$.

Таким образом, круг $\overline{K}$ устанавливает между пучком кругов $\overline{g}$ и пучком прямых R взаимно-однозначное соответствие. Поэтому мы можем определить естественное расположение кругов в пучке $\overline{g}$ как расположение, соответствующее естественному расположению прямых в пучке $\overline{g}$. Тогда в пучке кругов $\overline{g}$, рассматриваемом как прямая пространства X_3, будут иметь место проективные аксиомы расположения и непрерывности на прямой.

Пусть будет $\overline{\varepsilon}$ сеть кругов и $\overline{K}_0$—непринадлежащий ей круг. Каждому кругу сети соответствует определенная прямая r—р. ось этого круга с кругом $\overline{K}_0$. Наоборот, каждой прямой r со-

---

*) F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie.

ответствует определенный круг сети $\bar{\varepsilon}$—общий круг этой сети с пучком $(r\bar{K}_0)$. Таким образом, круг $\bar{K}_0$ устанавливает между сетью $\bar{\varepsilon}$ и плоской системой прямых η взаимно-однозначное соответствие. В этом соответствии пучки кругов сети $\bar{\varepsilon}$ и пучки прямых плоской системы η, по предыдущему, соответствуют друг другу. Следовательно, сеть $\bar{\varepsilon}$, рассматриваемая как плоскость пространства X_3, проективна плоской системе прямых η. Если мы определим естественное расположение кругов во всех пучках сети $\bar{\varepsilon}$ как соответствующее естественному расположению прямых в соответствующих пучках плоской системы η, то, по предыдущему, в этих пучках, рассматриваемых как прямые пространства X_3, будут иметь место проективные аксиомы расположения для прямой, а в силу доказанной проективности сети $\bar{\varepsilon}$, рассматриваемой как плоскость пространства X_3, с плоской системой прямых η для каждых двух пучков сети $\bar{\varepsilon}$, рассматриваемых как прямые пространства X_3, будет иметь место и плоская аксиома расположения.

Чтобы доказать аксиомы расположения и непрерывности для всего пространства X_3, нужно еще показать независимость предыдущего определения расположения кругов в пучке от выбора круга $\bar{K}_0$, так как невозможно выбрать круг $\bar{K}_0$ так, чтобы он не принадлежал ни одному пучку кругов.

Если дан пучок кругов $\bar{g}$ и не содержащийся в нем круг $\bar{K}_0$, то, по предыдущему, между пучком $\bar{g}$ и некоторым пучком прямых R устанавливается некоторое соответствие. Это соответствие содержится в соответствии между любой сетью $\bar{\varepsilon}$, содержащей пучок $\bar{g}$ и не содержащей круга $\bar{K}_0$, и соответствующей плоской системой прямых η. Так как сеть $\bar{\varepsilon}$ проективна плоской системе η, то и пучок $\bar{g}$ проективен пучку прямых R. При другом положении $\bar{K}_0'$ круга $\bar{K}_0$ пучок $\bar{g}$ будет проективен другому пучку прямых R', и следовательно, пучки прямых R, R' будут проективны между собой. Вследствие этого естественные расположения прямых в пучках R, R' соответствуют друг другу, и обоим соответствует одно и то же естественное расположение кругов в пучке $\bar{g}$.

Нетрудно удостовериться и непосредственно, что определение естественного расположения кругов в пучке не зависит от вспомогательного круга $\bar{K}_0$. В случае эксцентрического пучка легко видеть, что естественное расположение кругов в пучке, соответствует естественному расположению их центров на линии центров пучка. Рассмотрим случай концентрического пучка.

Возьмем сначала неориентированный концентрический пучок $(o_1^2\ S)$, т. е. отрезок пучка кривых II порядка $o_1{}^2S$, ограниченный дв. прямой $o_1{}^2$ и абсолютом S (§ 4, 1). Когда круг K

описывает пучок $(o_1{}^2S)$ в направлении $o_1{}^2S$, то пара р. осей его с кругом K_0 описывает один из отрезков инволюции $o_1{}^2o_0{}^2$, ограниченных дв. прямым, $o_1{}^2$, $o_0{}^2$, в направлении $o_1{}^2o_0{}^2$ (§ 3, 1). Перенеся эту инволюцию на вспомогательную кривую II порядка, убедимся, что каждая из р. осей описывает при этом один из углов $o_1\ o_0$. Если сообщим всем непограничным кругам пучка $(o_1{}^2S)$ некоторую общую ориентировку $\overline{o}_1$, то р. осью их с кругом $\overline{K}_0$ будет только та, которая остается в двуугольной области $o_1\ o_0$, а при противоположной ориентировке $\overline{o}_1$, только та, которая остается в дополнительной двуугольной области $\underline{o_1}\ \overline{o}_0$ (§ 7, 3). Следовательно, ориентированный концентрический пучок разбивается пограничными кругами на два противоположно ориентированных отрезка, в каждом из которых естественное расположение кругов совпадает с естественным расположением их как элементов отрезка пучка кривых II порядка

2. Мы убедились, таким образом, что ориентированный класс $\overline{C}$ можно рассматривать как проективное пространство X_3. Легко видеть, что ортогональным кругам соответствуют в пространстве X_3 точки, сопряженные относительно некоторой полярности Для доказательства достаточно выразить в терминах абстрактного пространства X_3 уже известные предложения: круги, ортогональные к кругу $\overline{K}$, образуют семь $\overline{\varepsilon}$; и наоборот, сети, ортогональные к кругам сети ε содержат круг $\overline{K}$. По отношению к этой полярности круг и ортогональная сеть представляются как полюс и полярная плоскость, а пара ортогональных пучков как пара взаимных поляр.

Характер полярности для данного класса C не зависим от его ориентировки, так как при перемене ориентировки класса ориентировка всех кругов меняется одновременно. Мы можем поэтому подразумевать под $\overline{C}$ класс, ориентированный каким-нибудь определенным образом. Но характер полярности, или определяемой ею поверхности II порядка F, различен для различных классов C. Условимся отличать эллиптическую и гиперболическую геометрию значками ${}_{E,\,H}$, а в каждой из них первый и второй класс значками ^{1}, ^{2}. Точки, прямые и плоскости пространства X_3 будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие круги, пучки и сети; в частности S обозначает точку, соответствующую абсолюту. Буквой σ будем обозначать сеть дв. прямых и полярную плоскость точки S относительно поверхности F, которая этой сети соответствует. Вещественные точки поверхности F соответствуют кругам класса C, вырождающимся в пары прямых, как самоортогональным (§ 3, 3). Если класс C содержит пары прямых, то F—вещественная поверхность, если нет — мнимая. Вещественные прямолинейные образующие поверхности F соответствуют пучкам пар прямых, как самоортогональным (§ 5, 6, F). Если класс C содержит такие пучки, то F—линейчатая поверхность, если нет — нелинейчатая. Ни в одном случае поверхность F не вырождается, так как по доказанному в § 3, п. 5 всякая точка имеет относительно нее вполне определенную полярную плоскость.

Принимая во внимание результаты § 3, п. 2 и § 4, п. 2, найдем: F_E^1 и F_H^1 суть вещественные нелинейчатые поверхности, F_E^2 — мнимая поверхность, F_H^2 — линейчатая поверхность II порядка.

Обоим 1-ым классам соответствует вещественная нелинейчатая поверхность. Но в $\ddot{C}_E^1$ дв. прямая o^2 никогда не бывает в то же время парой прямых ij, и следовательно σ не имеет с F_E^1 вещественных общих точек; напротив, в C_H^1 дв. прямая o^2 есть в то же время пара прямых ij, если прямая o изотропная (§ 1), и следовательно σ пересекает F_H^1. Соответственно этому S_E есть внутренняя точка F_E^1, а S_H— внешняя точка F_H^1.

3. Евклидовой геометрии кругов также соответствует вещественная нелинейчатая поверхность F_P*), при чем S_p лежит на F_P. Евклидову геометрию кругов можно поэтому рассматривать как вырождение геометрий обоих 1-ых неевклидовых классов кругов.

Вследствие этого, геометрия 1-ых классов имеет с евклидовой, кроме уже рассмотренных, еще одну общую группу свойств, в которой геометрия 2-ых классов уже расходится с евклидовой. Рассмотрим один пример. Так как поверхность F в этих случаях вещественная нелинейчатая, то из двух взаимных поляр или одна пересекает, а другая не пересекает поверхности F, или обе касательны к поверхности F в одной и той же точке. Соответственно этому, из двух ортогональных пучков или один содержит два круга, выродившихся в пару прямых, а другой не содержит ни одного, или оба содержат один и тот же круг, выродившийся в пару прямых. Или, в терминах евклидовой геометрии, из двух ортогональных пучков или один эллиптический, а другой гиперболический, или оба параболические. Напротив, в C_H^2 точно так же найдем, что оба пучка всегда одного рода, т. е. или оба эллиптические, или оба гиперболические, или оба параболические, а в C_E^2 оба пучка эллиптические.

Случай, когда поверхность F линейчатая и точка S лежит на ней, можно рассматривать как вырождение C_H^2. Этому случаю соответствует параболическая геометрия с веществен-

---

*) См., напр., Е. С. Федоров, «Точное изображение точек пространства на плоскости». Записки Горн. Инст., т. I.

ными циклическими точками, применяемая в теории неопределенных форм.

§ 9. Геометрия ориентированных точек.

1. Если поверхность F вещественна, то класс $\overline{C}$ содержит пары прямых. Непограничная пара прямых ij вполне определяется своим центром и ориентировкой; последнюю можно задать ориентировкой центра O (§ 7, 1). Тогда непограничная пара прямых вполне определяется своим ориентированным центром $\overline{O}$; мы будем иначе называть ее *ориентированной точкой* $\overline{O}$.

Ориентированные точки двукратно покрывают в классе $\overline{C}_E^1$ всю плоскость, в классе $\overline{C}_H^1$ — область внутренних точек абсолюта, в классе $\overline{C}_H^2$ — область внешних точек; точки самого абсолюта не ориентированы, как центры пограничных пар прямых — двойных изотропных прямых. Совокупность ориентированных точек класс $\overline{C}$ и точек абсолюта, если он вещественный, будем называть *ориентированным классом точек* $\overline{P}$.

Тогда точкам поверхности F будут соответствовать точки ориентированного класса $\overline{P}$ (§ 8, 2).

H. Poincaré назвал осуществление неевклидовой геометрии на вещественной поверхности II порядка *квадратичной геометрией* *).

Для согласования с его обозначениями введем в пространстве X_3 евклидово мероопределение и притом так, чтобы S стало центром поверхности F. Тогда F_E^1 превратится в эллипсоид, F_H^1 — в двуполый гиперболоид, F_H^2 — в однополый гиперболоид.

В квадратичной геометрии на поверхности II порядка H. Poincaré называет *точками* вещественные точки поверхности, *прямыми* — вещественные диаметральные сечения, *отрезками* — дуги этих диаметральных сечений, *кругами* — вещественные недиаметральные сечения. Введем эти определения на наших поверхностях F и перенесем их на соответствующие ориентированные классы точек; каждой квадратичной геометрии будет тогда соответствовать *геометрия одного из этих классов*.

При данном мероопределении в пространстве X_3 диаметры и диаметральные плоскости поверхности F изображают концентрические пучки и сети, остальные прямые и плоскости — эксцентрические пучки и сети. Бесконечно удаленная плоскость σ изображает сеть дв. прямых, бесконечно удаленные прямые —

*) См. сборник „Об основаниях геометрии", Казань, 1895 г.

пучки дв. прямых. Конечные прямые изображают невыродившиеся пучки, их бесконечно удаленные точки — двойные р. оси этих пучков. Конечный отрезок изображает отрезок пучка, не содержащий его двойной р. оси.

Точки пересечения прямой g с поверхностью F изображают содержащиеся в пучке $\bar{g}$ ориентированные точки $\overline{O}_1, \overline{O}_2$. В частности, диаметрально противоположные точки изображают совпадающие, но противоположно ориентированные точки $\overline{O}$, $\underline{O}$.

Линия пересечения плоскости $\bar{\varepsilon}$ с поверхностью F изображает совокупность содержащихся в сети $\bar{\varepsilon}$ ориентированных точек O. Точки $\overline{O}$ ортогональны к ортогональному кругу сети и, следовательно, лежат на нем (§ 5, 4). Если сечение недиаметральное, то ортогональный круг есть ориентированный круг $\overline{K}$ и всякая точка O ориентирована так, что р. ось ее с кругом $\overline{K}$ есть касательная к кругу $\overline{K}$ в точке O. Если сечение диаметральное, то ортогональный круг есть дв. прямая p^2, и точки $\overline{O}$ ориентированы двояко. Отсюда вытекают определения прямой и круга в геометрии ориентированного класса точек:

В классе $\overline{P}_E^1$ прямая есть совокупность всех двояко ориентированных точек прямой p; в классе P_H^1 прямая есть совокупность двояко ориентированных точек отрезка прямой p внутри абсолюта, в классе P_H^2 прямая есть совокупность всех двояко ориентированных точек прямой p вне абсолюта.

Круг есть совокупность всех точек круга $\overline{K}$ ориентированных так, что р. оси их с кругом $\overline{K}$ суть касательные в них к кругу K. Рассмотрим связь, устанавливаемую ориентировкой круга $\overline{K}$ между ориентировками двух его точек $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$.

С этой целью заменим вообще ориентировку круга по направляющей ориентировкой по центру; так как последняя полярна первой относительно абсолюта, то нам придется все связанные с ориентировкой определения заменить полярными,

Если теперь круг $\overline{K}$ ортогонален к точкам $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ то его центр O лежит на р. оси точек $\overline{O}_1, \overline{O}_2$. Согласно определению р. оси (§ 7, 3) и двуугольной области (§ 7, 2), направляющие $\bar{o}_1$, $\bar{o}_2$ сообщают центру O одинаковую ориентировку. Поляризируя относительно абсолюта, заключаем отсюда, что точки $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ сообщают направляющей o одинаковую ориентировку. т. е. что точки пересечения o с прямыми, описывающими пучки O_1, O_2 в направлении ориентировки точек $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$, описывают o в одинаковом направлении. Если $\overline{K}$ есть круг класса P_E^1 или несверхпредельный круг одного из классов P_H, то o не пересекает его, и точки $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ таким же образом сообщают контуру круга K одинаковую ориентировку. Если же K есть сверхпредельный круг, то o пересекает его и делит на две равноотстоящие линии, и точки $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ сообщают контуру круга $\overline{K}$ одинаковые ориентировки, если лежат на одной и той же равноотстоящей, и противоположные, если лежат на разных равноотстоящих.

Отсюда видно, что ориентировка всех точек несверхпредельного круга может быть графически задана стрелкой, указывающей ориентировку его контура, а ориентировка всех точек каждой равноотстоящей сверхпредельного круга — стрелкой на этой равноотстоящей, показывающей ориентировку контура, сообщаемую ему этими точками.

Когда точка $\overline{O}$ поверхности F описывает дугу диаметрального сечения $\overline{O}_1\ \overline{O}_2$, конечную и несодержащую диаметрально противоположных точек, в направлении $\overline{O}_1\ \overline{O}_2$, точка пересечения $\overline{K}$ луча $S\overline{O}$ с прямой $\overline{O}_1\ \overline{O}_2$ описывает конечный отрезок $\overline{O}_1\ \overline{O}_2$ в направлении $\overline{O}_1\ \overline{O}_2$. Это означает, что круг K с центром O описывает в направлении $\overline{O}_1\ \overline{O}_2$ тот отрезок эксцентрического пучка $\overline{O}_1\ \overline{O}_2$, который не содержит двойной р. оси. При этом центр O описывает в направлении $O_1\ O_2$ тот отрезок прямой $O_1\ O_2$, который не содержит центра двойной р. оси, т. е, абс, полюса р. оси. Поляризируя сказанное в § 7, п. 4 об ориентировке кругов эксцентрического пучка, найдем, что ориентировка центра O во всех его положениях сообщает всякой прямой, пересекающей прямую $O_1\ O_2$ в абс полюсе р. оси, одну и ту же ориентировку. Преобразуя дуально первое свойство, доказанное в § 7, п. 2, увидим, что ориентировка центра O во всех его положениях сообщает одну и ту же ориентировку всякой прямой, пересекающей прямую $O_1\ O_2$ вне отрезка $O_1\ O_2$, описываемого центром O. Ориентировка точки $\overline{O}$ совпадает с ориентировкой центра O, так как в пространстве X_3 точки $\overline{O}$, $\overline{K}$ лежат на прямой $S\overline{O}$ по одну сторону от точки S, что очевидно означает принадлежность кругов $\overline{O}$, K, к одному и тому же отрезку одинаково ориентированных кругов концентрического пучка. Отсюда определение:

В ориентированном классе точек отрезок, не содержащий точек абсолюта и противоположно ориентированных точек, по положению и расположению точек не отличается от обыкновенного отрезка, и точки его ориентированы так, что сообщают всякой прямой, пересекающей дополнительный отрезок, одну и ту же ориентировку.

Примером такого отрезка может служить отрезок на евклидовой плоскости, все точки которого ориентированы по часовой стрелке.

Если, в соответствии с квадратичной геометрией, условимся считать связной такую область ориентированных точек, в которой всякие две точки могут быть соединены цепью отрезков только что определенного рода, то класс $\overline{P}_E^1$ представится как замкнутая двухлистная поверхность, покрывающая всю проективную плоскость, класс $\overline{P}_H^1$ — как пара листов, покрывающих область внутренних точек абсолюта *), и класс $\overline{P}_H^2$ — как связная двухлистная поверхность, покрывающая область внешних точек абсолюта. Последние две поверхности имеют разрез вдоль абсолюта. Если соединить края разрезов, то все три поверхности будут иметь связность соответствующих поверхностей F в проективном пространстве, т. е. первые две — связность шара, а третья — связность тора.

2. Проективные преобразования поверхности F в себя изображают точечные круговые преобразования в ориентированном классе $\overline{P}$ **). Этими преобразованиями по F. Klein'у вполне определяется геометрия кругов. Так как F_E^1 и F_H^1 обе вещественные нелинейчатые поверхности, то геометрии кругов в классах $\overline{P}_E^1$ и $\overline{P}_H^1$ совпадают. По той же причине геометрия кругов в классах $\overline{P}_E^1$ и $\overline{P}_H^1$ совпадает с евклидовой геометрией кругов. Во всех трех геометриях имеем, например:

Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит один круг; трех кругов в общем случае касаются восемь кругов.

Соответствующие предложения неориентированной геометрии можно получить, комбинируя ориентировки заданных кругов. Например: через три точки, не лежащие на одной прямой, проходят четыре круга, соответственно восьми попарно противоположным комбинациям ориентировок этих точек; трех кругов касаются в общем случае тридцать два круга ***), соответственно восьми попарно противоположным комбинациям ориентировок этих кругов.

С точки зрения геометрии кругов, каждая из неевклидовых геометрий естественно разделяется на неориентированную и ориентированную. В случае Римановой геометрии это разделение совпадает с разделением на эллиптическую и сферическую. Следовательно, геометрия ориентированного класса P_H^1 есть аналог сферической геометрии в геометрии Лобачевского.

---

*) Рассматривается у F. Haussdorff'a, Ber. der. K. S. G. der Wissen schaften, 1899, стр. 194, с аналитической точки зрения.

**) Работы по неевклидовым круговым преобразованиям: F. Haussdorff, ibidem; H. Liebmann, Ber. der K. S. G. der Wissenschaften, 1902, стр. 244—260; W. Ludwig, „Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nichteuiclidischen geometrie", Karlsruhe, 1904.

***) Ср. A. Cayley—„Sur le problème des contacts", Crelle's Journal, том 39.

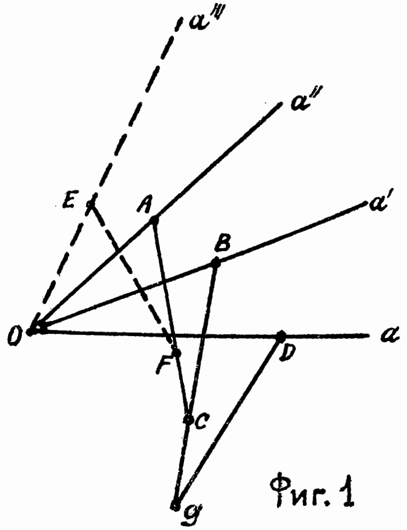
Zur nichteuklidischen Kreisgeometrie.

O. Žitomirskij.

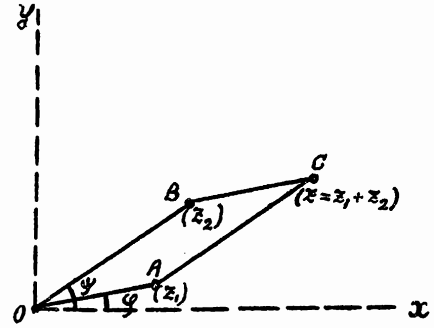
Der Inbegriff aller Kreise mit reellen Mittelpunkten zerfällt im ellyptischen Falle in zwei Klassen C_E^1, C_E^2, im hyperbolischen Falle in zwei Klassen C_H^1, C_H^2, von der Beschaffenheit, dass zwei nichtkonzentrische Kreise nur dann reelle Radikalaxen haben, wenn sie einer und derselben Klasse angehören. Innerhalb einer Klasse C lässt sich eine der euklidischen analoge Kreisgeometrie aufstellen. Zu den gemeinsamen Eigenschaften jener Kreisgeometrien gehören diejenigen der „Verknüpfung"; von den euklidischen sind aber auch diese verschieden: es bestimmen, z. B., zwei Kreise im Allgemeinen zwei Kreisbüschel. Einer Klasse C enspricht aber eine Klasse $\overline{C}$ von „orientierten" Kreisen, welche sich bei geeigneten Festsetzungen genau wie das euklidische Kreissystem auf den projektiven Raum abbilden lässt. Der Orthogonalität in $\overline{C}$ entspricht dabei die Polarität in Bezug auf eine Fläche II Ordnung F. Die Flächen F_E^1, F_H^1 sind reell und nicht geradlinig; der Bildpunkt des absoluten Kegelschnittes ist für die erste ein innerer, für die zweite ein äusserer Punkt. Die Fläche F_E^2 ist imaginär, die Fläche F_H^2 geradlinig. Den reellen Flächen F_E^1, F_H^1, F_H^2 entsprechen die zweiblättrigen Flächen von „orientierten" Punkten $\overline{P}_E^1$, $\overline{P}_H^1$, $\overline{P}_H^2$, velche bzw. die ganze ellyptische Ebene, das eigentliche, und das ideale Gebiet der hyperbolischen Ebene überdecken. Die Kreisgeometrien auf den Flächen $\overline{P}_E^1$, $\overline{P}_H^1$ sind mit der euclidischen Kreisgeomerie identisch. Die Geometrie auf der Fläche $\overline{P}_E^1$ ist aber keine andere, als die sphärische; die Geometrie auf der Fläche P_H^1 erscheint also als ein hyperbolisches Analogon der sphärischen Geometrie.

ОГЛАВЛЕНИЕ

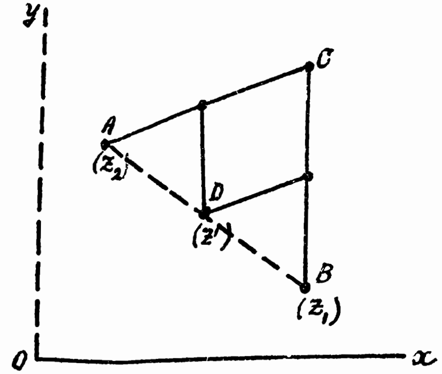
К статье С.А.Гершгорина.



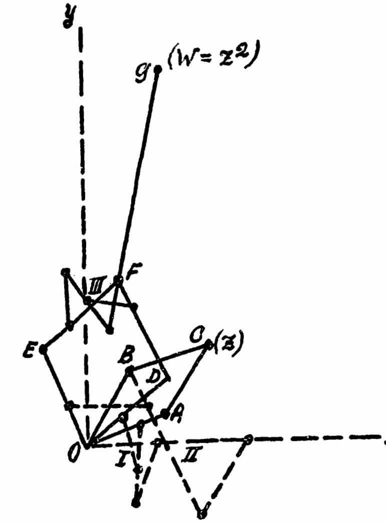
Фиг. 1



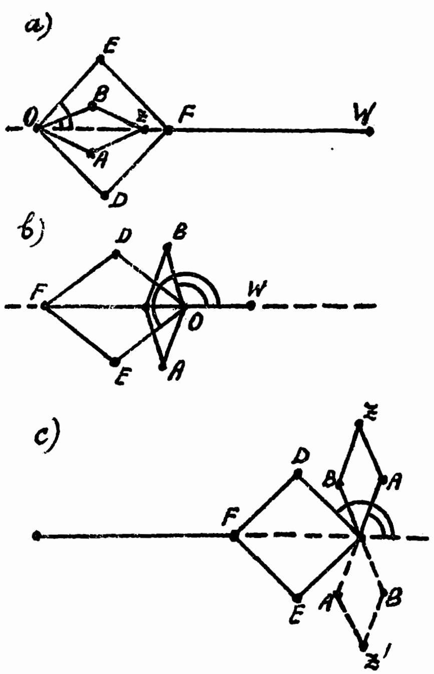
Фиг. 2



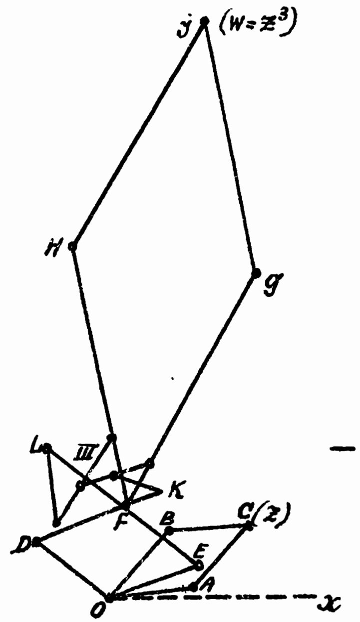
Фиг. 3



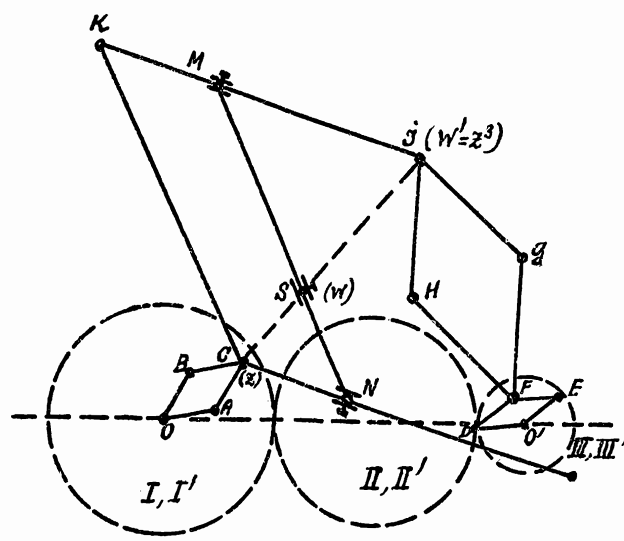
Фиг. 4



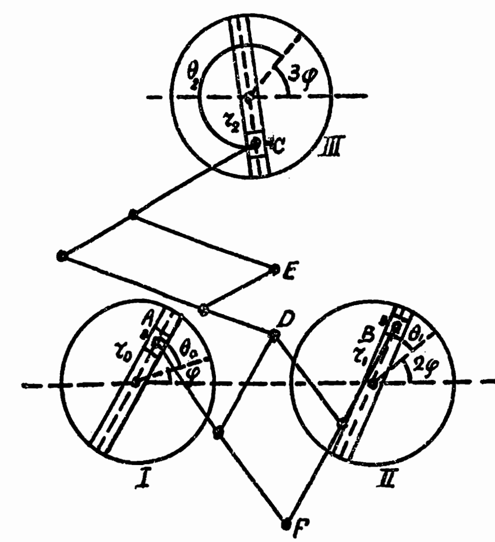
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8