Journal de la Société Physico-Mathématique
de Léningrade
t. I

ЖУРНАЛ
ЛЕНИНГРАДСКОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОСНОВАН
академиком В. А. СТЕКЛОВЫМ

Том I

ИЗДАНИЕ ГЛАВНАУКИ
1927

О конформном изображении четырехугольника с нулевыми углами на полуплоскость.

В. А. Фок.

Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (черт. 1), составленный из дуг касающихся кругов. Конформное изображение его на полуплоскость дается, как известно, отношением двух интегралов линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(1) \qquad \frac{d}{dx_1}\left[(x_1-a)(x_1-b)(x_1-c)\frac{dy_1}{dx_1}\right]+(x_1+\lambda)\,y_1=0.$$

Задача приводится, следовательно, к определению постоянных a, b, c, λ по параметрам, характеризующим четырехугольник, и к интегрированию уравнения (1). Исследованием этого уравнения занимались многие авторы *); подробные указания литературы вопроса можно найти в диссертации В. И. Смирнова **).

Доказано, что для каждого четырехугольника существуют соответствующие значения постоянных a, b, c, λ. Вопрос об определении этих постоянных и интегралов уравнения (1) нельзя, однако, считать вполне решенным, в виду того, что для них не было указано аналитических выражений, пригодных для вычислений. Настоящая работа представляет попытку решения этого вопроса.

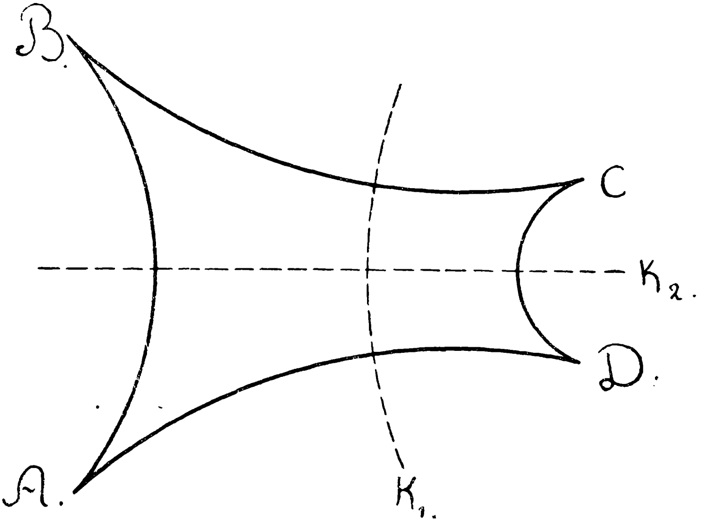
1. Мы будем искать изображения на полуплоскость не всего четырехугольника, а одной четверти его, получаемой следующим образом. Проведем два круга K_1 и K_2 так, чтобы сторона DC являлась отражением стороны AB в круге K_1, а сторона AD отражением DC в круге K_2.

---

*) См. напр., D. Hilbert. Crundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, p. 258. Teubner. Leipzig—Berlin, 1912.

**) В. И. Смирнов. Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками. Петроград, 1918 г.

Четырехугольник $ABCD$ разобьется таким образом на 4 четверти, из которых каждая представляет четырехугольник с тремя прямыми углами и одним углом, равным нулю. Чтобы



Черт. 1.

получить изображение этого четырехугольника на полуплоскость, составим оператор Шварца:

$$\{s,\ x\} = \frac{d^2}{dx^2}\, lg \frac{ds}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\, lg \frac{ds}{dx}\right)^2.$$

В нашем случае он будет равен:

$$\{s,\ x\} = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{(x-e_1)^2} + \frac{1}{(x-e_2)^2} + \frac{1}{(x-e_3)^2}\right] - \tag{2}$$
$$- \frac{5x + C}{8\,(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3)},$$

где e_1, e_2, e_3, C — вещественные постоянные, при чем можно считать, что $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Для дальнейшего будет удобнее искать конформное изображение нашего четырехугольника не на полуплоскость комплексной переменной x, а на прямоугольник комплексной переменной w, так, чтобы углы четырехугольника переходили в углы прямоугольника.

Произведем подстановку

$$x = \wp\,(w);\ w = \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4\,(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3)}}, \tag{3}$$

при чем будем считать, что вещественный и мнимый периоды функции $\wp(w)$ равны $2K$ и $2iK'$. Уравнение (2) примет вид:

$$\{s, w\} = \frac{1}{2}\wp(w) - 2C. \tag{4}$$

Прямоугольник плоскости w представляет одну четверть параллелограмма периодичности функции $\wp(w)$. Нетрудно убедиться, что изображением исходного четырехугольника $ABCD$ будет весь параллелограмм периодичности $\wp(w)$. Функцию $s(w)$ можно представить, как отношение двух интегралов линейного уравнения

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dw^2} = -\frac{1}{4}\wp(w) + C, \tag{5}$$

представляющего частный случай уравнения Ламэ:

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dw^2} = n(n+1)\wp(w) + const.$$

при $n = -\frac{1}{2}$.

Отметим здесь два преобразования уравнения (5). Подстановка

$$\wp\left(\frac{1}{2}w\right) = x_1; \quad y\sqrt{\wp'\left(\frac{1}{2}w\right)} = y_1 \tag{6}$$

приводит уравнение (5) к виду (1), а подстановка

$$\frac{y}{\sqrt{\mathrm{H}(w)}} = Y, \tag{7}$$

где $\mathrm{H}(w) = \vartheta_{11}\left(\frac{w}{2K}\right)$ — Якобиевская функция, приводит уравнение (5) к виду:

$$\mathrm{H}(w)\frac{d^2Y}{dw^2} + \mathrm{H}'(w)\frac{dY}{dw} + \left[\frac{1}{4}\mathrm{H}''(w) - c_1\mathrm{H}(w)\right]Y = 0, \tag{8}$$

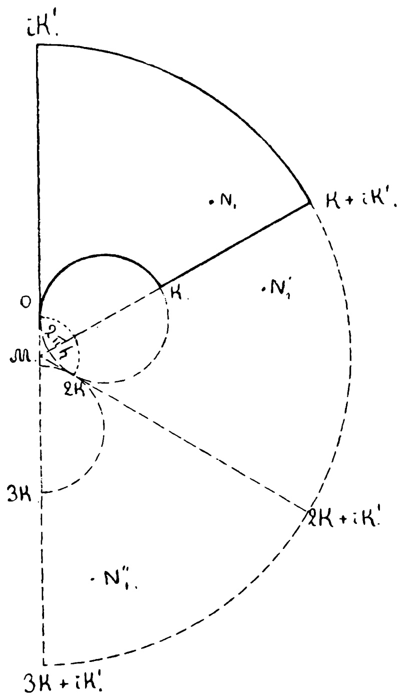
где положено для краткости

$$c_1 = C + \frac{1+\varkappa^2}{12} - \frac{K-E}{4K}. \tag{9}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться видом (5), хотя в некоторых отношениях вид (8) является более удобным.

2. Уравнение (5) содержит две постоянные, а именно отношение периодов функции $\wp(w)$ и постоянную C. С другой стороны, четырехугольник $ABCD$ характеризуется, как известно, также двумя параметрами, и наша задача состоит в том, чтобы по этим параметрам найти постоянные, входящие в урав-

нение. В качестве параметров мы возьмем величины, характеризующие взаимное положение двух пар противоположных сторон четырехугольника.



Черт. 2.

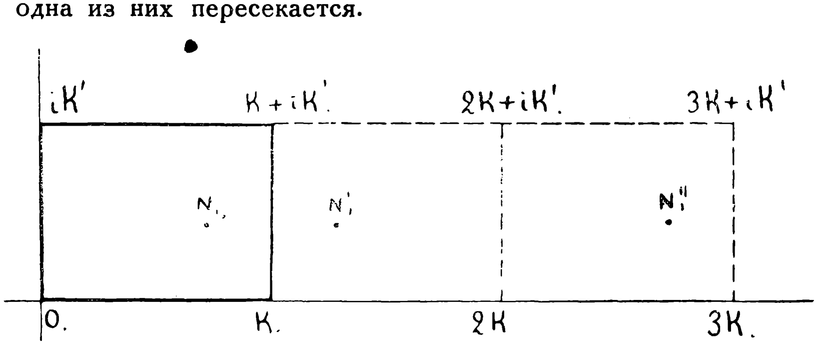
Если две противоположные стороны, будучи продолжены, пересекутся, мы будем их характеризовать углом пересечения (углом между касательными к кругам в точке пересечения), который мы обозначим через

$$(10) \qquad 2\pi h.$$

Если же при продолжении круги, образующие противоположные стороны, не пересекутся, то они могут быть дробно-линейной подстановкой преобразованы в концентрические круги. В этом случае параметром будет служить логарифм отношения радиусов этих кругов; мы его обозначим через

$$(10^*) \qquad 2\pi p = lg\frac{r_2}{r_1}.$$

Таким образом, четырехугольник $ABCD$ будет характеризоваться параметрами p и p', если обе пары противоположных сторон не пересекаются, и параметрами h и p', если одна из них пересекается.



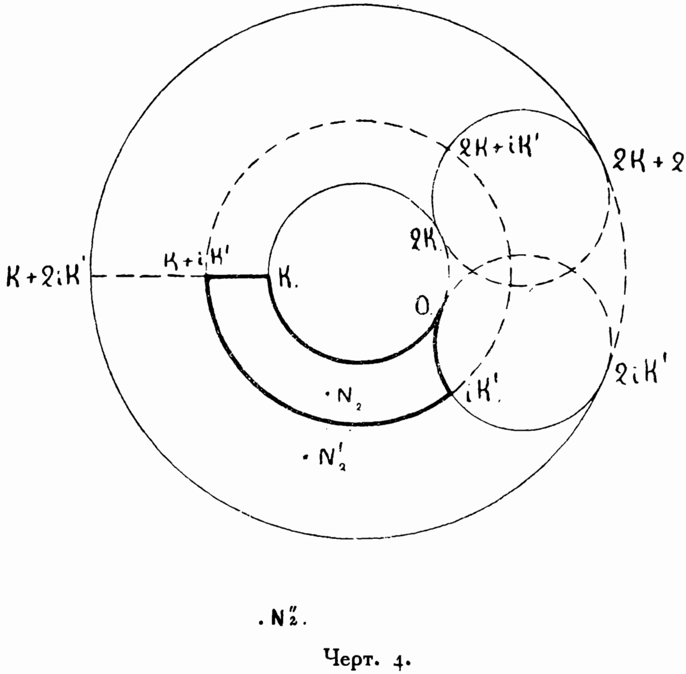
Черт. 3.

Выбранные нами параметры инвариантны по отношению к дробно-линейным преобразованиям плоскости четырехугольника

3, Перейдем теперь к соображениям, позволяющим связать постоянные, входящие в уравнение, с параметрами h и p'.

Предположим, что две противоположные стороны пересекаются, и рассмотрим сперва эти две стороны. Перенесем посредством дробно-линейной подстановки точки их пересечения в точки 0 и ∞. Наш четырехугольник примет вид, указанный на чертеже 2. Точки O, K, $K+iK'$, iK' чертежа 2 будут соответствовать одноименным точкам чертежа 3, представляющего плоскость w.

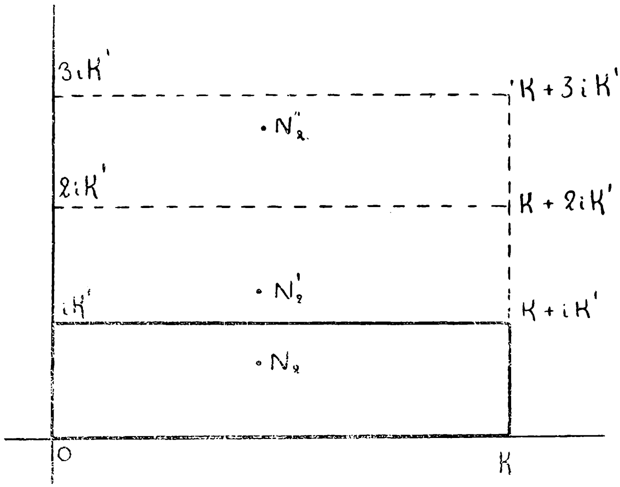
Рассмотрим какую-нибудь точку (N_1) в нашем четырехугольнике; если мы ее отразим сперва от прямой (M, $K+iK'$), а затем от прямой (M, $2K+iK'$), то в результате она повернется на угол, равный $2\pi h$ вокруг начала координат (M), иначе говоря, комплексная переменная s получит множитель $e^{-2\pi i h}$.



Черт. 4.

Изображение же этой точки в плоскости w (черт. 3) перейдет из положения N_1 в положение N_1'', т. е. вещественная часть увеличится на период $2K$.

Рассмотрим теперь две другие, непересекающиеся стороны; посредством дробно-линейной подстановки можно преобразовать четырехугольник так, чтобы они обратились в концентрические круги. Пусть начало координат плоскости s лежит в центре этих кругов; наш четырехугольник примет вид, указанный на чертеже 4. Точки O, K, $K+iK'$, iK' чертежа 5 будут соответствовать одноименным точкам чертежа 4. Рассмотрим какую-нибудь точку (N_2) в нашем четырехугольнике; если мы отразим ее сперва от круга (iK', $2K+iK'$), а затем от круга ($2iK'$, $2K+2iK'$), то в результате она останется на том же радиусе-векторе, а расстояние ее от начала координат увеличится в отношении $e^{2\pi p} : 1$; иначе говоря, комплексная переменная s получит множитель $e^{2\pi p}$. Изображение же этой



Черт. 5.

точки в плоскости w (черт. 5) перейдет из положения N_2 в положение N_2'', т. е. мнимая часть w увеличится на период $2iK'$.

Рассмотрим, с другой стороны, уравнение (5), как уравнение, коэффициенты которого имеют период $2K$; известно, что общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$y = A_1 e^{-i\pi\bar{h}\frac{w}{2K}} \varphi_1(w) + A_2 e^{i\pi\bar{h}\frac{w}{2K}} \varphi_2(w), \tag{11}$$

где $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$ — периодические функции с периодом $2K$.

Чтобы можно было подобрать независимые частные интегралы уравнения (5) так, чтобы их отношение получило множитель $e^{-2\pi i h}$ при увеличении w на $2K$, необходимо, чтобы величина $\bar{h}$ формулы (11) равнялась нашему параметру h.

Если мы будем рассматривать уравнение (5), как уравнение, коэффициенты которого имеют период $2iK'$, то общий интеграл его будет вида

$$y = A_1 e^{\pi\bar{p}\frac{w}{2iK'}} \psi_1(w) + A_2 e^{-\pi\bar{p}\frac{w}{2iK'}} \psi_2(w), \tag{11*}$$

где $\psi_1(w)$ и $\psi_2(w)$ имеют период $2iK'$. Аналогично предыдущему, заключаем, что величина p должна равняться нашему параметру p'.

Из приведенных рассуждений ясно, что величины h^2 и $-p^2$ играют вполне аналогичную роль, так что формулы, выведенные для случая пересекающихся сторон, остаются справедливыми и для случая непересекающихся сторон, если в них заменить h на ip.

4. Переходя к интегрированию уравнения (5), положим

$$\frac{\pi w}{2K} = w_1 \tag{12}$$

и воспользуемся известным разложением функции $\wp(w)$ в тригонометрический ряд. Мы будем иметь

$$\wp(w) - 4C = -4c_1 + \frac{\pi^2}{4K^2}\left\{\frac{1}{\sin^2 w_1} - \right.$$

$$\left. -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos 2nw_1\right\},$$

где $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, а c_1 имеет значение (9).

Расположим этот ряд по степеням q, положив

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos 2nw_1 = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}\psi_n(\sin^2 w_1), \tag{13}$$

так что ψ_n есть полином степени n от $\sin^2 w_1$.

Кроме того, мы предположим, что постоянная c_1, вернее величина $\frac{4K^2}{\pi^2}c_1$, может быть разложена в ряд по степеням q^2, а именно

$$\frac{4K^2}{\pi^2}c = f(h, q), \tag{14}$$

где

$$f(h, q) = -h^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(h)\, q^{2n}, \tag{14*}$$

при чем коэффициенты $\alpha_n(h)$ пока неизвестны.

Тогда уравнение (5) может быть написано в виде

$$
\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dw_1{}^2} = -h^2 - \frac{1}{4\,sin^2 w_1} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}\,[\psi_n\,(sin^2 w_1) + \alpha_n\,(h)]. \tag{15}
$$

Положив

$$
sin^2 w_1 = t;\ y = \bar{y}\sqrt[4]{t}\,, \tag{16}
$$

получим

$$
t\,(1-t)\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + \left(1 - \frac{3}{2}\,t\right)\frac{d\bar{y}}{dt} - \left(\frac{1}{16} - \frac{h^2}{4}\right)\bar{y} = \bar{y}\cdot\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}\,[\psi_n\,(t) + \alpha_n]. \tag{17}
$$

Обозначим через Φ_1 интеграл уравнения (17), не содержащий lgt, и будем искать разложение его в ряд вида

$$
\Phi_1 = \varphi_0 + q^2\varphi_1 + q^4\varphi_2 + \ldots \tag{18}
$$

Подставляя это разложение в уравнение (12) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях q, получим ряд равенств

$$
\begin{aligned}
&\Delta\varphi_0 = 0,\\
&\Delta\varphi_1 = \varphi_0\cdot\frac{\psi_1+\alpha_1}{4},\\
&\Delta\varphi_2 = \varphi_0\,\frac{\psi_2+\alpha_2}{4} + \varphi_1\,\frac{\psi_1+\alpha_1}{4},
\end{aligned} \tag{19}
$$

где для сокращения через $\Delta\varphi$ обозначена операция

$$
\Delta\varphi = t\,(1-t)\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + [1-(\alpha+\beta+1)\,t]\,\frac{d\varphi}{dt} - \alpha\beta\varphi, \tag{20}
$$

при чем

$$
\alpha = \frac{1}{4} + \frac{h}{2};\quad \beta = \frac{1}{4} - \frac{h}{2}.
$$

Покажем, что уравнения (19) могут быть, при надлежащем выборе постоянных α_n (h), последовательно проинтегрированы при помощи функций

(21)
$$f_1\ (h,\ k,\ t)= \\ = t^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k\right)}{\Gamma(k+1)}\cdot \\ \cdot F\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{2},\frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k,\ k+1,t\right),$$

где h есть целое положительное число или нуль, а F — знак гипергеометрической функции *).

Решение однородного уравнения

(19-a)
$$\Delta\varphi_0=0$$

есть очевидно

(22)
$$\varphi_0=f_1\ (h,\ 0,\ t).$$

Рассмотрим решение уравнения с последним членом

(19-b)
$$\Delta\varphi=f,$$

где f есть степенной ряд, который мы напишем в виде

(23)
$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma^2(n+1)}\ g_n\ t^n.$$

Легко проверить, что функция

(24)
$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma^2(n+1)}\,c_n\,t^n$$

удовлетворяет уравнению (19-b), если коэффициенты c_n удовлетворяют уравнению в конечных разностях

(25)
$$c_{n+1}-c_n=g_n.$$

Правая часть второго из уравнений (19) может быть, очевидно, представлена в виде (23), при чем коэффициент $g_n^{(1)}$ (ко-

*) Отметим здесь известное преобразование

$$F\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{2},\frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k,\ k+1,\ \sin^2 w_1\right)= \\ =F\left(\frac{1}{2}+h,\ \frac{1}{2}-h+2k,\ k+1,\ \sin^2\frac{w_1}{2}\right),$$

увеличивающее быстроту сходимости ряда для f_1.

торый мы обозначили значком 1 наверху, чтобы показать, что он относится к функции φ_1) будет рациональной функцией от n, а именно

$$g_n^{(1)} = -\frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{h}{2}\right)^2}{h(1-h)}\left[\frac{1}{n+\alpha}-\frac{1}{n+\alpha-1}\right]+$$

$$+\frac{1}{4h}\left[\frac{1}{2(1-h^2)}-\alpha_1(h)\right]\frac{1}{n+\alpha}+etc,$$

где etc, означает аналогичное выражение с заменой h на $-h$ и α на β. Если мы положим

$$\alpha_1(h), = \frac{1}{2(1-h^2)}, \tag{26}$$

то $c_n^{(1)}$ также будет рациональной функцией от n, а функция φ_1 будет равна

$$\varphi_1 = -\frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{h}{2}\right)}{h(1-h)} f_1(h, 1, t) + \tag{27}$$

$$+\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{h}{2}\right)}{h(1+h)} f_1(-h, 1, t);$$

следовательно, правая часть третьего из уравнений (19) также может быть представлена в виде (23), при чем $g_n^{(2)}$ будет опять рациональной функцией от n.

Докажем, что в уравнениях (19) постоянные $\alpha_k(h)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ можно последовательно подобрать так, чтобы все функции φ_m выражались через

$$f_1(h, k, t) \text{ и } f_2(h, k, t) \quad (k = 1, 2, \ldots m).$$

Предположим, что это утверждение доказано для функций φ до φ_{m-1} включительно. Составим правую часть $m+1$-го из уравнений (19)

$$\Delta\varphi_m = \varphi_0\frac{\psi_m+\alpha_m}{4}+ \tag{19-c}$$

$$+\varphi_1\frac{\psi_{m-1}+\alpha_{m-1}}{4}+\ldots+\varphi_{m-1}\frac{\psi_1+\alpha_1}{4}.$$

В функциях φ_0 до φ_{m-1} коэффициент при t_n равняется произведению

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\beta)}{\Gamma^2(n+1)}$$

на рациональную функцию от n, целая часть которой приводится к постоянной и которая имеет простые полюса, во-первых, в точках $n=-\alpha+1$, $n=-\alpha+2$ и т. д. и, во-вторых, в точках $n=-\beta+1$, $n=-\beta+2$ и т. д. Следовательно, того же характера будет и коэффициент при t^n в правой части (19-c). Если обозначить этот коэффициент через

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma^2(n+1)}\,g_n^{(m)},$$

то величина $g_n^{(m)}$ будет вида

$$(*)\qquad g_n^{(m)}=\frac{1}{(n+\alpha)\,(n+\beta)}\left[\frac{\alpha_m(h)}{4}+A(n,h)\right],$$

где $A(n,h)$ — рациональная функция от n описанного выше типа. Из (*) следует, что сумма вычетов функции $g_n^{(m)}$, относящихся ко всем полюсам, равна нулю. Поэтому, если мы выберем постоянную $\alpha_m(h)$ так, чтобы сумма вычетов, относящихся к полюсам $n=-\alpha$, $n=-\alpha+1$, и т. д. равнялась нулю, то будет равняться нулю и сумма вычетов, относящихся к полюсам $n=-\beta$, $n=-\beta+1$ и т. д. А в таком случае величину $g_n^{(m)}$ можно представить как сумму членов вида

$$b_n^{(m)}\left[\frac{1}{n+\alpha-k+1}-\frac{1}{n+\alpha-k}\right]+etc.,$$

откуда следует, что $c_n^{(m)}$ будет рациональной функцией от n с простыми полюсами в точках $n=-\alpha+k$ и $n=-\beta+k$ $(k=1, 2, \ldots m)$, так что ее можно представить в виде

$$(28)\qquad c_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{d_k^{(m)}(h)\,n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha-k)}+etc+c_0^{(m)}.$$

Если теперь потребовать, чтобы $c_0^{(m)}=0$, то функция φ_m будет равна

$$(29)\qquad \varphi_m=\sum_{k=1}^{m}d_k^{(m)}(h)\,f_1(h,k,t)+\sum_{k=1}^{m}d_k^{(m)}(-h)\,f_1(-h,k,t),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при $t=0$

(30) $$\varphi_0=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta);\ \varphi_m=0\ (m=1,\ 2,\ldots)$$

Обратимся теперь ко второму интегралу уравнения (17). Положим

(31) $$f_2(h,\ k,\ t)=-lgt f_1\ (h,\ k,\ t)+$$
$$+\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-l}\Gamma\left(-k+l+\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right)\Gamma(k-l)\frac{t^l}{\Gamma(l+1)}+$$
$$+t^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k\right)}{\Gamma(n+1)\ \Gamma(n+k+1)}\cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}+\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma'\left(n+\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(n+k+\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right)}{\Gamma\left(n+k+\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right)}\right\}t^n$$

Из свойств гипергеометрической функции вытекает, что после обхода вокруг точки $t=1$ в положительном направлении интеграл $f_1\ (h,k,t)$ обратится в

(32) $$-f_1(h,\ k,\ t)+\frac{1}{\pi}\cos\pi h f_2(h,\ k,\ t),$$

а интеграл $f_2\ (h,k,t)$ не изменится.

Поэтому, если мы обозначим через Φ_2 ряд, который получается из ряда (18) для Φ_1, если мы в функциях φ_0, φ_1, ..., заменим $f_1\ (h,k,t)$ на $f_2\ (h,k,t)$, то новый ряд Φ_2 будет также интегралом уравнения (17). При этом после обхода вокруг точки интеграл Φ_1 обращается в

(33) $$-\Phi_1+\frac{1}{\pi}\cos\pi\, h\,\Phi_2,$$

а интеграл Φ_2 не меняется.

Таким образом мы формально получили оба интеграла уравнения (17) в виде рядов, расположенных по степеням q^2. Доказательство сходимости этих рядов, а также ряда (14) для постоянной будет приведено ниже.

5. Прежде чем обратиться к изучению конформного изображения, даваемого отношением найденных нами интегралов, выпишем формулы для аналитического продолжения функций

$$f_1\left(h, k, sin^2 \frac{\pi w}{2K}\right) \text{ и } f_2\left(h, k, sin^2 \frac{\pi w}{2K}\right)$$

внутри четырехугольника $(O, K, K+iK', iK')$ плоскости w.

Введя переменную

$$\frac{\pi w}{2K} = w_1 = u_1 + iv_1, \tag{12}$$

положим сперва $v_1 = 0$; $w_1 = u_1$. Мы будем иметь

$$f_1(h, k, sin^2 u_1) = \tag{34}$$

$$= -2\sqrt{\pi} \cos u_1 F\left(\frac{3}{4} - \frac{h}{2}, \frac{3}{4} + \frac{h}{2} - k, \frac{3}{2}, cos^2 u_1\right) +$$

$$+ \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{h}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{h}{2} + k\right)} \cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}, \frac{1}{4} + \frac{h}{2} - k, \frac{1}{2}, cos^2 u_1\right).$$

$$f_2(h, k, sin^2 u_1) = \tag{35}$$

$$= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right) \Gamma\left(-k + \frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}, \frac{1}{4} + \frac{h}{2} - k, \frac{1}{2}, cos^2 u_1\right).$$

Положим теперь $u_1 = 0$; $w_1 = v_1$, и введем две новые функции

$$f_3(h, k, t) = f_1(h, k, t) - \frac{1}{2\pi}(e^{i\pi h} + i) f_2(h, k, t); \tag{36}$$

$$f_4(h, k, t) = f_1(h, k, t) - \frac{1}{2\pi}(e^{-i\pi h} + i) f_2(h, k, t). \tag{37}$$

Мы будем иметь:

$$f_3(h, k, -sh^2 v_1) = e^{-\frac{3}{4}\pi i + \frac{\pi i h}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2} + k\right)}{\Gamma(k + 1 - h)} \cdot \tag{38}$$

$$(ch^2 v_1)^{-\frac{1}{4} + \frac{h}{2}} F\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}, \frac{3}{4} - \frac{h}{2}, k + 1 - h, \frac{1}{ch^2 v_1}\right).$$

$$(38^*)\ f_3(h,k,-sh^2 v_1) = e^{-\frac{3}{4}\pi i+\frac{\pi i h}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k\right)}{\Gamma(k+1-h)}\cdot$$

$$\cdot 2^{\frac{1}{2}-h} e^{-v_1\left(\frac{1}{2}-h\right)} F\left(\frac{1}{2}-h,\frac{1}{2}-k,k+1-h,e^{-2v_1}\right).$$

$$(39)\ f_4(h,k,-sh^2 v_1) = (-1)^k e^{-\frac{3}{4}\pi i-\frac{\pi i h}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{2}-k\right)}{\Gamma(-k+1+h)}\cdot$$

$$\cdot (ch^2 v_1)^{-\frac{1}{4}-\frac{h}{2}+k} F\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{2}-k,\frac{3}{4}+\frac{h}{2}-k,-k+1+h,\frac{1}{ch^2 v_1}\right).$$

$$(39^*)\qquad f_4(h,k,-sh^2 v_1) =$$

$$= (-1)^k e^{-\frac{3}{4}\pi i-\frac{\pi i h}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{2}-k\right)}{\Gamma(-k+1+h)}\cdot$$

$$\cdot\, 2^{\frac{1}{2}+h-2k} e^{-v_1\left(\frac{1}{2}+h-2k\right)}\cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{1}{2}-k,\frac{1}{2}+h-2k,\ h-k+1,\ e^{-2v_1}\right).$$

Эти формулы и дают требуемое аналитическое продолжение.

6. Переходя к конформному изображению, введем функции

$$(40)\qquad \Phi_3 = \Phi_1 - \frac{1}{2\pi}(e^{i\pi h}+i)\Phi_2;$$

$$(41)\qquad \Phi_4 = \Phi_1 - \frac{1}{2\pi}(e^{-i\pi h}+i)\Phi_2.$$

Функция Φ_3 получается из Φ_1 заменой $f_1\ (h,k,t)$ на $f_3\ (h,k,t)$ и $f_1\ (-h,k,t)$ на $f_4\ (-h,k,t.)$. Функция Φ_4 получается из Φ_3 заменой h на $-h$.

Из формул (38*) и (39*) следует, что при увеличении w на $2K$ функция Φ_3 получает множитель $ie^{-i\pi h}$, а функция Φ_4 множитель $ie^{i\pi h}$. Таким образом при нашем выборе постоянной c_1 [форм. (14)] интегралы Φ_3 и Φ_4 действительно обладают требуемыми свойствами периодичности по отношению к вещественному периоду.

Рассмотрим конформное изображение, даваемое функцией

$$(42)\qquad s(w) = \frac{\Phi_3(w)}{\Phi_4(w)}.$$

Когда w вещественно

$$w = u,$$

функции Φ_1 и Φ_2 обе вещественны; из формул (40) и (41) следует, что

$$\left| s\ (u) - \frac{1}{1 - \sin \pi h} \right| = \frac{\sin \pi h}{1 - \sin \pi h}. \tag{43}$$

Когда w чисто мнимое,

$$w = iv,$$

Φ_1 вещественно, а $\Phi_2 = -i\pi\Phi_1 +$ вещ. вел. Отсюда следует, что

$$\arg\ s\ (iv) = \pi h. \tag{44}$$

Когда

$$w = K + iv,$$

$i\Phi_3$, а также $i\Phi_4$ вещественны [на основании (38*) и (39*)]; следовательно, тогда

$$s\ (K + iv) = \text{вещ. вел.} \tag{45}$$

Формулы (43), (44) и (45), относящиеся к трем сторонам четырехугольника, справедливы при любых вещественных коэффициентах $d_k^{(m)}\ (h)$ в формуле (29); что касается четвертой стороны четырехугольника

$$w = u + iK',$$

то на ней модуль s будет оставаться постоянным

$$|s\ (u + iK')| = R \tag{46}$$

лишь в том случае, если коэффициенты $d_k^{(m)}\ (h)$ подобраны так, чтобы удовлетворялось уравнение (4). Заметим, что условие (46) может служить для определения коэффициентов независимо от дифференциального уравнения *).

На основании геометрических соображений нетрудно вывести, что постоянная R должна выражаться через параметры p' и h, характеризующие четырехугольник, следующим образом:

$$R = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi h}{2}\right)\left(ch\, \pi p'\, tg\, \pi h + \sqrt{ch^2 \pi p'\, tg^2 \pi h + 1}\right). \tag{47}$$

С другой стороны, левая часть (46) представляет определенную функцию от h и от q; приравнивая ее выражению (47), мы получим трансцендентное уравнение для определения постоянной q, т. е. отношения периодов двояко-периодической функции $\wp\ (w)$.

---

*) При этом удобнее подбирать коэффициенты $d_k^{(m)}\ (h)$ так, чтобы числитель и знаменатель дроби для $s\ (w)$ удовлетворяли уравнению (8), а не (5).

Мы покажем, независимо от теории Шварца, что левая часть (46) действительно остается постоянной, и найдем значение этой постоянной.

Мы увидим ниже [форм. (60)], что $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$ формулы (11) будут, при $w = u + iK'$, вида

$$(48^*) \qquad \varphi_1(u+iK') = \chi\left(h, e^{\frac{i\pi u}{K}}\right) + \chi\left(-h, e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right)$$

$$(48) \qquad \varphi_2(u+iK') = \chi\left(-h, e^{\frac{i\pi u}{K}}\right) + \chi\left(h, e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right),$$

где $\chi(h, z)$—голоморфная функция от z, при $|z| = 1$, с вещественными коэффициентами.

Если мы положим $\frac{\pi u}{2K} = u_1$, то из сравнения выражения для Φ_3 с формулой (11) вытекает равенство

$$(49) \quad \sqrt{1 - qe^{2iu_1}}\; e^{-iu_1\left(\frac{1}{2} - h\right)} \Phi_3 = \mathrm{L}(h, q) \cdot \varphi_1\left(\frac{2K}{\pi} u_1 + iK'\right)$$

где $L(h, q)$ некоторая постоянная.

Отсюда получаем

$$(50) \quad e^{2ihu_1} \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{L(h, q)}{L(-h, q)} \cdot \frac{\chi(h, e^{2iu_1}) + \chi(-h, e^{-2iu_1})}{\chi(h, e^{-2iu_1}) + \chi(-h, e^{2iu_1})}$$

и следовательно

$$(51) \qquad R = \left|\frac{\Phi_3}{\Phi_4}\right| = \left|\frac{\mathrm{L}(h, q)}{\mathrm{L}(-h, q)}\right|.$$

С другой стороны, если мы обозначим через $M(h, q)$ постоянный член разложения левой части (49) по положительным и отрицательным степеням e^{2iu_1}, мы будем очевидно иметь:

$$(52) \qquad M(h, q) = L(h, q) \cdot \{\chi(h, 0) + \chi(-h, 0)\}$$

и следовательно

$$(53) \qquad R = \left|\frac{M(h, q)}{M(-h, q)}\right|.$$

Выписывая это уравнение подробнее, получим, после некоторых упрощений

$$(54) \quad \frac{\Gamma(1-h)}{\Gamma(1+h)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+h\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-h\right)} \left(ch\,\pi p'\, tg\,\pi h + \sqrt{ch^2\pi p'\, tg^2\pi h + 1}\right) = q^{-h} \frac{\Pi(-h, q)}{\Pi(h, q)}.$$

где $\Pi(h, q)$ есть ряд *).

*) Первые два коэффициента этого ряда вычислены по моей просьбе Г. А. Гамовым.

$$(55) \qquad \Pi(h, q) = 1 + \frac{q^2}{2^4(1+h)^2} +$$

$$+ \frac{q^4}{2^{10}}\left[\frac{30}{(1+h)^2} - \frac{4}{(1+h)^4} + \frac{81}{(2+h)^2}\right] + \dots$$

Уравнение (54) и представляет искомое трансцендентное уравнение для определения отношения периодов. Оно может быть без труда решено по способу последовательных приближений.

Заметим, что если бы мы рассматривали тот случай, когда обе пары сторон четырехугольника не пересекаются, мы пришли бы путем совершенно аналогичных рассуждений к тому же уравнению (54), но с заменой h на ip.

Ниже будет выведено другое уравнение, связывающее постоянные h и ρ' с отношением периодов.

7. Докажем теперь справедливость формул (48) и сходимость рядов (14*) и (18), которыми мы пользовались.

Для этого рассмотрим подробнее ур. (5), когда $w = u + iK$. Полагая $\frac{2K}{\pi} u = u_1$ и вводя постоянную $f(h, q)$ (14*), получим

$$(56) \qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{du_1^2} = f(h, q) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2nu_1.$$

Сумму в правой части (56) разложим по степеням q

$$(57) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2nu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \psi_n$$

и будем искать решения вида

$$(58) \qquad y = e^{ihu_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \varphi_n\right]$$

(буквы φ_n и ψ_n обозначают здесь, очевидно, другие функции, чем в предыдущих параграфах).

Предполагая возможность разложения $f(h, q)$ в ряд вида (14*) и подставляя (58) в дифференциальное уравнение, получим ряд равенств

$$(59) \qquad \begin{aligned} &\varphi_1'' + 2ih\varphi_1' = \psi_1 \\ &\varphi_2'' + 2ih\varphi_2' = \psi_1\varphi_1 + \alpha_1 + \psi_2 \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Постоянные α_1, α_2, ... будем определять из условий, чтобы свободный член в правой части каждого из равенств (59) равнялся нулю, а постоянные интегрирования из условий, чтобы каждая из функций φ_1, φ_2, ... была периодичной с периодом π и без постоянного члена. Такое определение, очевидно, всегда возможно. При этом функция φ_n будет вида

$$\varphi_n = \omega_n (h, e^{2iu_1}) + \omega_n (-h, e^{-2iu_1}), \tag{60}$$

где $\omega_n (h, e^{2iu_1})$ полином степени n от e^{2iu_1} с коэффициентами — рациональными функциями от h. Формулу (60) не трудно доказать, воспользовавшись тем, что левые части (59) не меняются при одновременной замене h на $-h$ и i на $-i$. Из формулы (60) вытекает справедливость (48).

Обращаясь к доказательству сходимости рядов (14*) и (58), установим сперва две леммы.

Лемма 1. Если в дифференциальном уравнении

$$\varphi'' + 2ih\varphi' = f$$

правая часть вида

$$f = \Sigma b_k e^{2iku_1} \quad k \neq 0,$$

при чем

$$\Sigma |b_k| < B,$$

то в периодическом интеграле его, равном

$$\varphi = -\sum \frac{b_k}{4k(k+h)} e^{2iku_1} = \sum c_k e^{2iku_1}$$

коэффициенты c_k удовлетворяют неравенству

$$\Sigma |c_k| < \frac{1}{4(1-h)} B.$$

Лемма 2. Если даны две функции

$$f = \Sigma b_k e^{2iku_1},$$

при чем

$$\Sigma |b_k| < B,$$

и

$$F = \Sigma c_k e^{2iku_1},$$

при чем

$$\Sigma |c_k| < C,$$

то в произведении их

$$f.F = \text{средн. } f.F + \Sigma d_k e^{2iku_1} \quad k \neq 0$$

коэффициенты d_k удовлетворяют неравенству

$$\Sigma |d_k| < B.C.$$

Справедливость этих лемм очевидна. Обозначим через Ψ_n сумму модулей коэффициентов при степенях e^{2iku_1} в функции ψ_n, при чем заметим, что Ψ_n будет равно значению ψ_n при $u_1 = 0$.

Из первого из уравнений (59) выводим, на основании первой леммы

$$|\varphi_1| < \frac{\Psi_1}{4(1-h)}$$

(под символом $|\varphi_1|$ подразумеваем сумму модулей коэффициентов в φ_1).

Из второго уравнения (59) выводим, применяя сперва вторую, а затем первую лемму

$$|\varphi_2| < \left(\frac{\Psi_1}{4(1-h)}\right)^2 + \frac{\Psi_2}{4(1-h)}$$

и так далее. Закон составления правых частей неравенств ясен; именно

$$|\varphi_n| < \text{коэфф. при } q^n \text{ в выражении } \frac{1}{1 - \dfrac{\Sigma \Psi_n q^n}{4(1-h)}}. \tag{61}$$

Отсюда следует сходимость ряда (58) при условии

$$\frac{1}{4(1-h)} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n q^n = \frac{1}{4(1-h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nq^n}{1-q^{2n}} = \tag{62}$$
$$= \frac{K(K-E)}{4\pi^2(1-h)} < 1.$$

Из формулы

$$\alpha_{\frac{n}{2}} = - \text{средн.} (\psi_1 \varphi_{n-1} + \ldots + \psi_{n-1} \varphi_1)$$

нетрудно вывести при условии (62) сходимость ряда (14*).

Отметим, что

$$\frac{K(K-E)}{4\pi^2} < \frac{\varkappa^2}{32\varkappa'^2}. \tag{63}$$

Докажем, что ряд (18) для интеграла Φ_1 сходится при значениях w, удовлетворяющих неравенству

$$-2K' < Re\left(\frac{w}{i}\right) < 2K'. \tag{64}$$

Для этого, в силу свойств периодичности интеграла Φ_1, достаточно показать сходимость ряда (18) внутри прямоугольника.

$$-2K < Re(w) < 2K$$

$$-2K' < Re\left(\frac{w}{i}\right) < 2K'.$$

Перепишем уравнение (15) в виде

$$(65) \qquad \frac{d^2y}{dw_1^2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sin^2 w_1}\right) y = y\, F(q, w_1),$$

где $F(q, w_1)$ голоморфная функция от q при значениях w, удовлетворяющих неравенству (64). Введем функцию

$$\bar{y} = \frac{y}{\sqrt{\sin w_1}}.$$

Функция $\bar{y}(w_1)$ удовлетворяет интегральному уравнению вида:

$$\bar{y}(w_1) = c_1 + c_2 \lg ctg \frac{w_1}{2} +$$

$$+ \int\limits_0^{w_1} \sin v \lg \frac{ctg \frac{v}{2}}{ctg \frac{w_1}{2}} F(q, v)\, \bar{y}(v)\, dv,$$

при чем для случая $\bar{y} = \Phi_1$

$$c_1 = \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{h}{2}\right); \; \ldots\ldots c_2 = 0.$$

Можно показать, что решение этого интегрального уравнения будет голоморфной функций от q в той же области, в которой голоморфна $F(q, v)$, откуда и следует справедливость нашего утверждения.

8. Рассматривая вещественный период функции $\wp(w)$, мы получили для постоянной C ур. (5) выражение [формулы (9) и (14)]

$$(66) \qquad C = -\frac{1+\varkappa^2}{12} + \frac{K-E}{4K} + \frac{\pi^2}{4K^2} f(h, q).$$

Рассматривая же мнимый период функции $\wp(w)$ и другую пару сторон четырехугольника, мы получили бы для той же постоянной выражение

$$C = \frac{1 + \varkappa'^2}{12} - \frac{K' - E'}{4K'} - \frac{\pi^2}{4K'^2} f(ip', q'), \tag{66*}$$

где q', K', E'—величины, относящиеся к дополнительному модулю

$$\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}.$$

Приравнивая эти два выражения и пользуясь тождеством Лежандра

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K} = 1 + \frac{\pi}{2KK'},$$

получим равенство:

$$\frac{\pi^2}{K^2} f(h, q) + \frac{\pi^2}{K'^2} f(ip', q') = \frac{\pi}{2KK'}, \tag{67}$$

которое можно, подобно ур. (54), рассматривать как трансцендентное уравнение для определения отношения периодов: уравнение (67) представляет, однако, то неудобство, что ряды для $f(h, q)$ и $f(ip', q')$ обладают различными областями сходимости.

Sur la représentation conforme d'un domaine limité par quatre cercles tangents sur un demi-plan.

V. Fock.

On obtient d'abord la représentation conforme du domaine nommé sur un rectangle. D'après la méthode de *Schwarz*, elle est fournie par le quotient de deux intégrales de l'équation de *Lamé*

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{du^2} = -\frac{1}{4}\wp(u) + c \tag{*}$$

qui contient deux constantes: le rapport $\tau = i\frac{K'}{K}$ des deux périodes de la fonction $\wp(u)$ et la constante c. Pour déterminer ces constantes, on exige l'existence de deux intégrales de (*), dont l'une se multiplie par un facteur donné lorsqu'on augmente u

par la période réelle, et l'autre—par un autre facteur donné lorsqu'on ajoute à u la période imaginaire. L'équation (*) s'intègre par une série convergente ordonnée suivant les puissances de $q = e^{\pi i \tau}$ et dont les termes sont des combinaisons, en nombre fini, de fonctions hypergéometriques. On exprime d'abord la constante c par une série convergente de puissances de q; puis on est conduit à une équation transcendante pour q qui se résout aisément par approximations successives. Toutes les séries employées sont d'une convergence très rapide ce qui facilite les calculs numériques.

О замкнутых двухсторонних трехмерных пространствах.

В. Львовский. Ленинград.

Предметом нижеследующих рассмотрений будет служить исследование одного класса замкнутых двухсторонних трехмерных пространств (правильней всего его назвать классом Volterra) и его обобщение. Пространства эти не имеют кратных точек.

В n-мерном пространстве M_n возьмем гиперсферу, содержащую внутри себя k других гиперсфер, внешних друг относительно друга, и пусть часть M_n, ограниченная этими гиперсферами, будет T. Возьмем T' симметричное T относительно гиперплоскости, не пересекающей T. Если совместить точки, составляющие границы T и T', путем непрерывного преобразования M_n в $M_{n'}$ $(n' > n)$, то получим пространство класса Volterra (Lefschetz—L'Analyse situs, Paris 1924 p. 8),

Рассмотрение структуры таких пространств дает повод к следующему подразделению трехмерных замкнутых пространств: пространство T образуется:

1° поверхностями рода p_i $(i=1, 2, \ldots, k)$,

2° зацепленными поверхностями рода p_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, при чем цепочка, где поверхности рода p_i служат звеньями, может иметь форму отрезка или дерева,

3° заузленными поверхностями рода p_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, а также заплетениями поверхностей общего вида. Во всех случаях совмещение соответствующих поверхностей происходит по „тожественным гомологиям“.

Оказывается, что пространства первого вида сводятся к пространствам класса Volterra для $n=3$; далее оказывается, что пространства второго и третьего вида могут быть сведены к формам, близким к формам класса Volterra. Таким образом, является возможность сделать некоторые предположения относительно построения нормальных форм и, следовательно, к установлению необходимых и достаточных условий гомеоморфизма.

Вопросу о непрерывных преобразованиях поверхностей посвящено много работ и вопрос является более или менее разработанным; иначе дело обстоит с преобразованиями пространств, поэтому прежде чем приступить к изложению содержания работы, необходимо предпослать особое введение, задачей коего будет установление основных приемов преобразований [1]).

Содержание.

§ 0. Введение.

00.—Условимся в обозначениях: n-мерное евклидово пространство будем обозначать E_n; обыкновенную замкнутую поверхность в E_3 имеющую род k обозначим $_k\Pi_2$, так что сфера будет обозначена $_0\Pi_2$. Разберем сначала многообразие, уравнением которого в декартовых координатах будет служить $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$, это будет замкнутое трехмерное пространство — трехмерная сфера; аналитически это очевидно из уравнения, геометрически это можно пояснить следующим образом: представим себе в E_3 сферу единичного радиуса, будем считать все точки внутри ее двойными, приписывая им разные знаки в четвертой координате $x_4=\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$, тогда ясно, что точки, где $x_4>0$ образуют незамкнутое трехмерное пространство, ограниченное сферой $x_4=0$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$, при чем граница не принадлежит области, аналогично точки, где $x_4<0$ образуют незамкнутое трехмерное пространство, ограниченное той же сферой, при чем последняя также области не принадлежит; эта сфера таким образом есть общая граница двух областей M'_3 и M''_3 и, очевидно, присоединяя ее к ним обоим, мы получим уже безграничное, т. е. в данном случае замкнутое, M_3—$_0\Pi_3$. Если взять не сферу, а произвольную $_k\Pi_2$, то, повторяя приведенные рассуждения, мы получим замкнутое трехмерное пространство, которое можно обозначить $_k\Pi_3$. Сокращенно это рассуждение можно формулировать так: 1° берем замкнутую поверхность M_2 из E_3; помещаем ее в E'_3, там она делит E'_3 на две области: внутреннюю

[1]) Атлас чертежей к настоящей статье помещен в конце выпуска.

M'_3 и внешнюю M''_3; помещаем ее в $E_3^{(')}$, там она соответственно дает $M_3^{(')}$ и $M_3^{('')}$ тогда $M_3 = M'_3 + M_2 + M_2^{(')}$ будет замкнутым пространством (конечно, сложение имеет условный смысл); или так: 2° замкнутую поверхность M_2 наполняем один раз пространством M'_3, другой раз $M_3^{(')}$, всякий раз M_2 будет их границей, тогда $M_3 = M'_3 + M_2 + M_3^{(')}$.

01.—Класс пространств ${}_k\Pi_3$ будет представлять пространство без двойных элементов в E_4, для наглядности его можно интерпретировать в E_3, но тогда появятся двойные точки; эта интерпретация будет важна в дальнейшем. Она заключается в следующем: основываясь на второй формулировке построения ${}_k\Pi_3$, можно представить себе его так: дано в E_3 ${}_k\Pi_2$, причем все точки внутри его суть двойные и представляют собой два различных непрерывных точечных многообразия, соединенные между собой по поверхности ${}_k\Pi_2$, так что из одного в другое можно непрерывно перейти не иначе, как пройдя через ${}_k\Pi_2$. Можно обобщить определение, введя новые замкнутые трехмерные пространства по второй формулировке так: дано ${}_k\Pi_2$ в E_3 и внутри его не пересекающиеся ${}_k\Pi_2$, ${}_k\Pi_2, \ldots, {}_{k(n)}\Pi_2$, при чем все точки внутри ${}_k\Pi_2$ и вне ${}_{k(i)}\Pi_2$ суть двойные и представляют два различных непрерывных точечных многообразия, соединенных между собой по поверхностям ${}_k\Pi_2$ и ${}_{k(i)}\Pi_2$ так, что из одного в другое можно непрерывно перейти не иначе, как пройдя через одну из точек ${}_k\Pi_2$ или ${}_{k(i)}\Pi_2$. Условимся называть ${}_k\Pi_2$ и ${}_{k(i)}\Pi_2$ *ограничениями*, при чем ${}_k\Pi_2$ наз. *внешними*, а ${}_{k(i)}\Pi_2$—*внутренними*. Можно выделить из пространств с многими ограничениями один класс пространств, который естественно назвать классом пространств с независимыми ограничениями. Прежде всего его ограничения не должны быть заузлены (не допустимо ограничение вида фиг. 010); затем всякие два ограничения его должны быть независимы (не допустимы случаи ф. 011 и 012); наконец, не допустимы заплетения ограничений (не допустим случай напр. ф. 013). Исследование их приведено в § 1. Среди пространств иного вида можно различать три типа: 1) с зацепленными ограничениями, при чем последние могут цепками образовывать деревья, им посвящен § 2; 2) заплетенными ограничениями, что является обобщением зацеплений, при чем заплетением может образовываться комплексы произвольной формы, напр. с завинтованными сторонами и др.; 3) заузленными ограничениями и ограничениями смешанного вида. Двум последним категориям отведен § 3. Конечно такое подразделение имеет силу только для трехмерной интерпретации. Принимая такое определение M_2, нужно помнить, что полученные результаты будут справедливы только для тех многообразий, которые тем или иным способом могут быть подведены под такое *симметричное* определение. Действительно, это определение ставит требование, чтобы данное M_3 можно было бы непрерывным образом привести к виду, когда оно будет симметрично расположено относительно своих ограничений или точнее, когда после преобразования можно будет найти такое E_3, относительно которого оно будет симметрично расположено, и остается открытым вопрос: все ли замкнутые непрерывные двусторонние M_3 без кратных точек *симметричны* т. е. всех ли их можно так преобразовать. Однако, для преобразований приведенных определений не достаточно, оказывается необходимость введения особых промежуточных форм, существующих притом только в E_5, без кратных элементов; в этом ничего нет странного, если вспомнить, что осуществление преобразований римановых поверхностей требует E_4.

02.—Что такое непрерывное преобразование будем считать известным; займемся выяснением обстановки, в каковой происходит такое преобразование. Когда дано M_2 и его нужно преобразовать, то считается само собой разумеющимся, что преобразование совершается в E_3 (для римановых поверхностей нужно E_4), поэтому, совершая преобразование какого-либо геометрического объекта, надо всегда иметь в виду это обстоятельство, оговаривая его заранее, так как только этим можно *санкционировать* закономерность совершаемых преобразований. Введем основное непрерывное преобразование—*отражение*; оно дает возможность, получая промежуточные формы, переходить от одной интерпретации данного M_3 к другой; пусть дано в E_3 пространство ${}_3\Pi_3$ согласно вышеприведенных определений (см. ф. 020), *отразим* его около плоскости симметрии P_1, проходящей через все дыры, тогда получим промежуточную форму фиг. 021. Смысл *отражения* заключается в том, что мы вкладываем в нижнюю часть вывернутую наизнанку верхнюю часть, совмещая симметричные точки, таким образом в то время как на ф. 020 каждая точка внутри ${}_3\Pi_2$ двойная, а точки поверхности ${}_3\Pi_2$ ординарные, на ф. 021 каждая внутренняя точка четверная, точки внутри заштрихованной и незаштрихованной части двойные, точки границ этих областей ординарные; все сказанное можно пояснить следующей аналогией: в E_3 берем ${}_3\Pi_2$, *отражаем* вниз около плоскости P (ф. 020) так, чтобы симметричные точки совместились, получим поверхность (ф. 021), внутренность которой сообщается с наружным пространством через четыре отверстия (там, где заштрихованные части), все точки этой поверхности двойные, границы ординарные. Понятно, что если желательно отсутствие кратных элементов, то для закономерности нашего преобразования приходится допустить, что последняя поверхность *существует* уже не в E_3, а в E_4, что две совмещенные области имеют разные четвертые координаты. Применяя это рассуждение к промежуточной форме ф. 021, мы видим, что истинный смысл преобразования заключается в том, что, деформируя ${}_3\Pi_3$ в E_5 так, чтобы симметричные элементы ${}_3\Pi_3$ относительно пространства симметрии E_3 совпали, нам приходится вводить пятую координату, как для разделения точек, совместившихся в конечном результате, так и для точек совмещавшихся в процессе преобразования. Тогда ясно, что: 1) преобразование непрерывно и 2) промежуточная форма не имеет кратных элементов в E_5. Может быть другой вид для промежуточной формы, когда плоскость отражения трехмерной интерпретации не является плоскостью симметрии для внутренних ограничений, совершенно оставляя их в стороне, см. ф. 022; тогда очевидно, что все внутренние точки промежуточной формы будут 4-кратные, исключая те, которые заполняют бывшие пустоты внутренних или внешних ограничений, они будут 3-кратные. Такие части условимся обозначать и называть *пунктирными*; ясно, что в случае внутренней пунктирной замкнутой пустоты ее поверхность будет состоять из 2-кратных точек, что для внешней пунктирной пустоты будет иметь место только на части поверхности; последнее будет иметь место, когда плоскость отражения не есть плоскость симметрии для внешнего ограничения см. ф. 023. Возможен еще вид промежуточной формы, см. ф. 024, получаемой симметричным отражением и по внешнему и по внутреннему ограничению, тут очевидно дополнительных разъяснений не нужно. В дальнейшем встретятся другие виды промежуточных форм, но они ничего принципиально нового содержать не будут. Это преобразование отражения единственное, коим придется пользоваться, условимся его обозначать символом $[O]_P$, где P указывает плоскость отражения, O—операцию отражения. Обратное преобразование будем обозначать $[O]_P^{-1}$, см. ф. 025.

03.—Чтобы закончить введение нужно сказать несколько слов о деформировании промежуточных форм. Для трехмерных интерпретаций M_3 очевидна возможность непрерывного перемещения внутренних ограничений относительно внешних в определенных пределах. Нетрудно убедиться, что преобразования по ф. 031 закономерны и, деформируя промежуточную форму, мы получаем возможность перемещать в известной мере ординарные (состоящие из однократных точек) линии. Все это можно иллюстрировать следующим примером: возьмем ${}_1\Pi_3$, т. е. двойное пространство внутри тора; применяя непрерывные преобразования по ф. 032, мы видим, что ${}_1\Pi_3$ гомеоморфно двойному пространству между двумя концентричными сферами, соединенному по ним (это преобразование, иначе произведенное, приведено у Lefschetz l. c.). Далее выяснится важное значение этих преобразований.

§ 1. Преобразования пространств с независимыми ограничениями.

10.— *Теорема I-a.* Сферические ограничения взаимозаменимы, т. е. непрерывным преобразованием можно поменять местами два сферических ограничения.

Разбирается случай, когда все ограничения сферические. Очевидно, все внутренние ограничения взаимозаменимы, остается вопрос о замене внутреннего ограничения внешним. Докажем справедливость гомеоморфизма по ф. 100. Действительно, совершая преобразование по ф. 101, мы получаем требуемый результат.

11.— *Теорема I-b.* Несферические ограничения взаимозаменимы.

Здесь придется разобрать случай двух и многих ограничений.

110.—Случай двух ограничений: одно сферическое, другое несферическое. Докажем справедливость гомеоморфизма пространств ф. 1100. Преобразование по ф. 1101 дает требуемый результат.

111.—Случай двух ограничений: оба несферические. Доказательство справедливости гомеоморфизма пространств ф. 1110 дано ф. 1111. Отметим в этом доказательстве одно характерное положение, если его изобразить ф. 1112; оно показывает полную „*равноценность*" ограничений. Здесь наглядно усматривается возможность вести преобразование на любое из этих двух ограничений.

12.—Случай многих ограничений. Возьмем случай четырех ограничений; из доказательства ясно будет, что рассуждения распространимы на любое число ограничений. Совершая преобразование по ф. 120, мы получим многоконцовую промежуточную форму, которая, как это нетрудно видеть, есть обобщение формы ф. 1112 предыдущего случая, все сказанное там очевидно применимо и здесь. Преобразовывая эту многоконцовую форму на любое из этих четырех ограничений, мы получим внешним ограничением либо (1), либо (2), либо (3), либо (4). Ясно что другие ограничения тут затронуты не будут. Для пояснения преобразуем по ф. 121 промежуточную форму так, чтобы ограничение (2) стало внешним.

13.—Из этих двух теорем I-a и I-b естественно вытекает следующая система обозначений, характеризующая замкнутые трехмерные пространства с независимыми ограничениями: условимся ${}_{[k]}\Pi_3$ характеризовать системой чисел $k = (a_0\ a_1\ a_2 \ldots a_n)$, где a_i — число ограничений его рода i; тут уж не играет роли, какое ограничение внешнее, а какие внутренние. Обратно, данному k будет отвечать одна или несколько трехмерных интерпретаций (соответственно тому, какое ограничение будет внешним) пространств, гомеоморфных взаимно по теореме I.

14. — *Теорема II.* Род внешнего ограничения может быть сведен к нулю.

Нужно оговорить, что при этом: 1) род остальных ограничений не изменится; 2) при этом появятся новые ограничения. Придется раздельно доказывать случаи одного и многих ограничений. Доказательство первого случая дано на ф. 140, при чем тут появились три новых сферических ограничения. Доказательство второго дано на ф. 141. Нетрудно видеть, что вся сущность преобразования заключается в том, что плоскость отражения не затрагивает внутреннего ограничения, следовательно, и в случае многих ограничений надо преобразование делить так, чтобы при отражении все внутренние ограничения *„запунктировались“*.

Следствие: При преобразованиях теоремы II

$$X = \sum_{i=0}^{n} (1 - i)\ a_i$$

неизменно.

Действительно, пусть внешним ограничением служит ${}_k\Pi_2$, после применения теоремы II мы внутри получим k лишних сфер, что вместе с наружной составит $k+1$; преобразование не изменит остальных ограничений, а потому в сумме X член $(1+k)a_k$ обратится в $(1+k)(a_k - 1)$, но зато a_0 обратится в $(a_0 + k + 1)$, следовательно, число X не изменится.

Теорема III. Все ограничения могут быть сведены к сферическим.

Действительно, будем последовательно внешним ограничением брать одно из несферических внутренних и обращать в сферические. В результате все ограничения станут сферическими и число их будет очевидно X.

Число X назовем характеристикой данного M_3; если у M_3 все ограничения сферические, характеристика будет равна числу ограничений. Из теоремы III вытекает, что все пространства с независимыми ограничениями сводятся к пространствам класса ${}_k\Pi_3$; действительно, по теореме II мы можем утверждать, что пространство, имеющее в трехмерной интерпретации $(k+1)$ сферических ограничений, гомеоморфно ${}_k\Pi_3$.

Теорема IV. Необходимое и достаточное условие гомеоморфизма есть равенство характеристик.

Напомним, что два M_3 называются гомеоморфными, если можно одно преобразовать в другое непрерывным образом. Приведем сначала очевидную лемму.

Лемма. Два M_3 со сферическими ограничениями гомеоморфны или нет в зависимости от того, равны или не равны числа их ограничений.

1° *необходимость*. Дано что M'_3 гомеоморфно M''_3. Требуется доказать, что $X' = X''$. Преобразуем M'_3 в $\underline{M}'_3$ такое, что все ограничения его сферические, сделаем тоже с M''_3; тогда M''_3 преобразуется в *то* же $\underline{M}'_3$, так как иначе они не были бы гомеоморфны, на основании леммы; но раз M''_3 гомеоморфно $\underline{M}'_3$, гомеоморфному M'_3, то $X' = X''$, так как это есть число сферических ограничений M'_3.

2° *достаточность*. Дано, что $X' = X''$, требуется доказать, что M'_3 гомеоморфно M''_3. Раз $X' = X''$, то M'_3 гомеоморфно $\underline{M}_3$ и M_3'' гомеоморфно $\underline{M}_3$, а следовательно M'_3 гомеоморфно M''_3.

Замечание. Введенные здесь промежуточные формы не имеют внутренних пустот и каналов, это характерное их свойство, здесь — причина такой простоты в обращении с ними. Пунктирные пустоты не противоречат этому, так как эти пустоты относятся к одной только полости.

§ 2. Преобразование пространств с просто-зацепленными ограничениями.

20.—Перейдем теперь к рассмотрению пространств с просто-зацепленными ограничениями; сюда будем причислять те случаи, когда зацепления имеют следующую форму: ф. 200 и 201, не считая элементарного ф. 202. Сначала разберем случай одного простого зацепления, затем случай двух и, наконец, случай многих простых зацеплений, образующих цепку. В заключение рассмотрим случай таких зацеплений, где цепки образуют дерево.

21.—Случай одного простого зацепления. Теорема о взаимозаменимости зацепленных ограничений будет и здесь справедлива: на ф. 210 дано доказательство случаю взаимозаменимости внешнего ограничения с одним из зацепленных внутренних, на ф. 211 приведено доказательство взаимозаменимости внешнего зацепленного ограничения с соседним внутренним зацепленным. Очевидно, что можно взаимозаменять и незацепленные ограничения, для чего достаточно ненужные ограничения запунктировать, см. ф. 212. Теорема о понижении рода внешнего ограничения тоже имеет место; в случае внешнего незацепленного ограничения род понижается до нуля, см. ф. 213, в случае зацепленного до единицы, ф. 214.

22.—Случай двух простых зацеплений. Доказательство взаимозаменимости незацепленных ограничений очевидно. На ф. 220 разбирается случай взаимозаменимости внешнего незацепленного ограничения с крайним зацепленным внутренним ограничением; на ф. 221 разбирается случай взаимозаменимости внешнего незацепленного ограничения с средним зацепленным внутренним ограничением; на ф. 222—случай взаимозаменимости крайне-зацепленного внешнего ограничения с соседним. На ф. 223, 224 и 225 доказываются те же случаи, только когда два простых зацепления имеют форму ф. 226. Теорема о понижении рода внешнего ограничения и тут имеет место; когда внешнее ограничение незацепленное, то род понижается до нуля, доказательство такое же, как на ф. 213. При зацепленном в одной ручке внешнем ограничении род понижается до единицы; ф. 227 разбирает случай, когда внешнее ограничение является крайне-зацепленным и соседнее зацеплено в одной ручке, ф. 228 — когда соседнее зацеплено в две ручки, ф. 229 — когда внешнее ограничение является средне-зацепленным. Род понижается до двух при зацеплении внешнего ограничения в две ручки, доказательство дано на ф. 2290.

23.—Случай многих простых зацеплений; цепочные зацепления. При доказательстве взаимозаменимости ограничений будем рассматривать те замены, где внешним ограничением является зацепленное ограничение, так как случай замены незацепленных доказывается обычным способом.

230.—Случай четной цепи из торов. Для доказательства нужно установить гомеоморфизм ф. 2300 с представителями ряда ф. 2301; ф. 2300 с представителями ряда ф. 2302, а также взаимный гомеоморфизм представителей рядов ф.ф. 2301 и 2302. Для этой цели достаточно ввести в рассмотрение многоконцовую промежуточную форму, подобную ф. 1112. На ф. 2303 дан ее вывод из 2300, ф. 2304 дает ее вывод непосредственно из первого элемента ряда ф. 2301 (аналогично она получается из любого элемента как ряда 2301, так и ряда 2302). Эта многоконцовая форма позволяет вывести оба ряда требуемых форм, для чего достаточно вести преобразования на соответствующий конец. Для примера приведем преобразования, дающие первых представителей обоих рядов форм, см. ф. 2305 и 2306.

231.—Случай нечетной цепи из торов разбирается аналогичным способом, только здесь будет две промежуточных многоконцовых формы. Из одной мы получим первый ряд, аналогичный ряду 2301, из другой—второй; достаточно будет дать вывод многоконцовых форм: см. ф. 2310 и 2311. Вывод многоконцовой формы для пространства с незацепленным внешним ограничением приведен на ф. 2312 для случая получения второй многоконцовой формы.

232.—Случай цепочного зацепления общего вида. Рассмотрим только случай четной цепи, разбор случая нечетной будет совершенно аналогичен. Как и в предыдущих случаях, существенна промежуточная многоконцовая форма, позволяющая из любого звена цепи получить внешнее ограничение, и доказательство будем доводить только до вывода этой формы. Для четной цепи у нас была одна промежуточная многоконцовая форма, для нечетной—две; в общем случае их будет две, вследствие ассиметрии цепки. На ф. 2320 представлено получение одной формы, на ф. 2321—другой. Получение формы из представителей рядов, аналогичных 2301 и 2302, не приводится—оно совершенно одинаково с случаем 230. Очевидно, что аналогичным путем будет разбираться и случай нечетной цепи.

234.—И в случае цепочного зацепления род внешнего ограничения может быть понижен. Не будем останавливаться на случае незацепленного внешнего ограничения, так как доказательство ведется так же, как и в предыдущих случаях. Переходим на случай внешнего зацепленного ограничения. В доказательстве будем различать четыре случая: 1°—когда внешнее ограничение является крайне зацепленным и соседнее зацеплено в одну ручку, 2°—соседнее зацеплено в две ручки, 3°—внешнее ограничение является средне-зацепленным и 4°—внешнее ограничение средне-зацеплено в две ручки. Доказательство приведено соответственно на ф. 2340, 2341, 2342 и 2343. В первых трех случаях род понижается до единицы, в последнем—до двух.

24.—Случай зацеплений, когда цепи образуют дерево. Отличая в дереве средние и крайние звенья от звеньев разветвления, легко видеть, что для первых справедлива и теорема о взаимозаменимости ограничений и теорема о понижении рода внешнего ограничения. Остается установить эти теоремы для случая центральных звеньев (звеньев разветвления). Для простоты рассмотрим разветвление на три ветви. При доказательстве взаимозаменимости опустим случай замены незацепленных ограничений. На ф. 240 приведено доказательство случая взаимозаменимости незацепленного внешнего ограничения с зацепленным внутренним, на ф. 241—взаимозаменимость зацепленного внешнего с соседним; остальные случаи очевидны. Теорема о понижении рода также имеет место; на ф. 242 приведено доказательство ее для случая внешнего ограничения, зацепленного в две ручки; тут необходимо сказать, что у внешнего ограничения можно „удалить" только незацепленные ручки и если таковых p штук, то и род может быть понижен только до p этими преобразованиями. Из изложенного вытекает, что для случая незамкнутых M_3 имеют место теоремы взаимозаменимости и не имеет места теорема о понижении рода; для доказательства достаточно заменить ограничения границами *).

§ 3. Пространства со сложно-зацепленными ограничениями.

30.—Случай, когда зацепления образуют цепками комплекс общего вида. Тут, как это легко видеть, достаточно рассмотреть только случаи, когда циклы комплекса состоят из трех

*) §§ 0, 1, 2 доложены 14 февраля 1925 г. на XCIII заседании Ленинградского Математического Общества.

звеньев; при большем количестве их можно дословно повторить рассуждения 24. При доказательстве взаимозаменимости придется ввести несимметричные промежуточные формы, они являются обобщением промежуточных форм с пунктирными образованиями ф. 022, с той лишь разницей, что раздвояемые вследствие ассиметрии элементы приходится условно обозначать одни—сплошной линией, другие—пунктирной; на ф. 300 дан простейший пример раздвоения. На ф. 301 приведено доказательство теоремы для случая взаимозаменимости внешнего незацепленного ограничения с двуручно зацепленным внутренним ограничением. Несимметричное разложение остается все время в силе и при преобразовании не играет никакой роли. На ф. 302 разбирается взаимозаменимость внешнего незацепленного ограничения с внутренним одноручно зацепленным ограничением. На ф. 303 и 304 разбираются взаимозаменимости внешнего зацепленного ограничения с соседним внутренним, для двуручно зацепленных и для одноручно зацепленных ограничений. Остальные случаи опускаются, так как ничего нового они не содержат. При доказательстве теоремы о понижении рода придется ввести опять ту несимметричную промежуточную форму, о которой выше говорилось, только несколько иного вида. Совершая преобразования по ф. 305, мы видим, что теорема справедлива будет и для любого случая, так как все зацепленное запунктиривается.

31.—Случай наличности в комплексах заплетений общего вида. Здесь необходимо напомнить, что всякий элемент заплетения может быть соответственным непрерывным преобразованием приведен к такому виду, что его ограничение будет незаузленной поверхностью рода k. Приняв это во внимание, нетрудно доказать теорему о взаимозаменимости ограничений; на ф. 310 приведено доказательство взаимозаменимости внешнего незацепленного ограничения с внутренним зацепленным. Для пояснения приведем два частных преобразования по этому варианту, см. ф. 311 и 312. Доказательство взаимозаменимости внешнего зацепленного ограничения с соседним опущено; на ф. 313 дан частный пример к этому случаю. В доказательстве теоремы о понижении рода внешнего ограничения достаточно разобрать случай зацепленного внешнего ограничения; на ф. 314 приведен ход доказательства.

32.—Случай заузленных ограничений. Теорема о взаимозаменимости и здесь остается справедливой; доказательства можно не приводить, так как для этого достаточно только запунктирить заузленную часть, поступая далее обычным способом; для пояснения см. ф. 320. Доказательство о понижении рода внешнего ограничения также приводить не приходится, так как оно совершенно аналогично изложенному доказательству 31: опять надо запунктирить заузленную часть и далее поступать обычным способом; для пояснения см. ф. 321.

33.—Случай смешанных ограничений. Как видно из приведенных приемов преобразований, этот случай не создаст новых трудностей, так как всегда ненужные элементы можно запунктирить. В отношении же классификации пространств этот случай внесет осложнение лишь в отношении счета, так как ограничения будут возможны трех типов: 1°—зацепленные, 2°—заплетенные и 3°—заузленные.

34.—В § 2 совершенно был опущен вопрос о преобразовании пространств с многократно-зацепленными ограничениями, напр. ф. 340; но, как это нетрудно видеть, обе теоремы 1°—о взаимозаменимости ограничений и 2°—о понижении рода внешнего ограничения останутся и здесь справедливыми, если мы воспользуемся приемами, приведенными в этом параграфе. Все полученные результаты о взаимозаменимости ограничений можно и здесь сразу перенести на незамкнутые пространства, для чего достаточно вместо слова ограничение поставить слово граница, но теорема о понижении рода уже не будет справедлива.

§ 4. Заключение.

Все рассмотренное в этой работе дает повод к следующему выводу: при симметричном определении замкнутых трехмерных двусторонних пространств классификация их, а следовательно и введение для них тех или иных характеристик сводится к классификации: 1°—деревьев, 2°—отрезочных комплексов, 3°—заплетений Π_1 в E_3 и 4°—узлов Π_1 в E_3. Таким образом этот способ исследования трехмерных пространств естественным образом неразрывно связывает топологию M_1, M_2 и M_3, вследствие чего становится жизненно важным исследование многих вопросов комбинаторной топологии, оставшихся до сих пор в тени *).

Uber geschlossenen zweiseitigen dreidimensionalen Räumen.

Von *W. Lwowski*.

„... Dans un espace à n dimensions S_n, prenons une hypersphère en contenant à son intérieur k autres, extérieures les unes aux autres, et soit T la partie de S_n limitée par toutes les hypersphères. Prenons le symétrique T' de T par rapport à un hyperplan ne coupant pas T. Enfin faisons coïncider, par exemple à

*) §§ 3, 4 доложены 20 февраля 1926 г. на CV заседании Ленинградского Математического Общества.

l'aide d'une deformation dans un $S_{n'}$, $(n' > n)$, les points correspondants des frontières de T et T'«... (Lefschetz-L'Analyse situs, Paris 1924, p. 8) und erhalten wir den Raum der Volterraklasse.

Die Betrachtung der Struktur solcher Räume gibt uns die Möglichkeit dreidimensionale Räume folgendermassen einzuteilen: Raum T kann zusammengesetzt werden aus 1° Flächen des Geschlechts p_i $(i = 1, 2, ..., k)$ ohne Verkettung, 2° einfach verketteten Flächen des Geschlechts p_i $(i = 1, 2, ..., k)$, wobei die Kette, deren Glieder aus Flächen des Geschlechts p_i bestehen Strecken— oder Baumförmig erscheinen kann, 3° verknoteten Flächen des Geschlechts p_i $(i = 1, 2, ..., k)$ oder aus der allgemeinen Flächenverkettung.

Es ergibt sich, dass die Räume der 1° Categorie zu den Räumen der Volterraklasse wo $n = 3$ gebracht werden können. Ferner ergibt es sich, dass die Räume der 2° u. 3° Categorie zu den der Volterraklasse benachbarten Formen gebracht werden können.

Bei der solchen Bestimmung von geschlossenen dreidimensionalen zweiseitigen Räumen, kann ihre Klassifikation. sowohl als die Definition ihrer Charakteristik, zu folgender Klassifikationen gebracht werden kann: 1°—von Bäumen, 2°—Streckenkomplexe, 3°—Verkettungen Π_1 in E_3 und 3°—Knoten Π_1 in E_3.

Sur un problème des ensembles congruants.

M. Zaretsky.

Dans cette note je m'occupe de la résolution du problème suivant: en suppossant qu'on puisse répartir sur un segment un nombre arbitraire fini d'ensembles congruants avec un ensemble donné, de telle façon que ces ensembles n'empiètent pas les un sur les autres, ne pourrait—on pas en conclure de la possibilité de répartir sur ce même segment une infinité dénombrable de tels ensembles?

L'exemple suivant montre que la réponse est négative.

Dans la suite, en désignant les ensembles divers par E (x), E_1 (x), F (x) etc., nous désignerons les ensembles qui résulteront par la translation de tous les points d'un ensemble donné à une distance α (à droite si $\alpha > 0$ et à gauche si $\alpha < 0$) par E $(x+\alpha)$, E_1 $(x+\alpha)$, F $(x+\alpha)$ etc.

Nous dirons que l'ensemble E (x) admet la translation α, si

$$E(x) \, . \, E(x+\alpha) = 0.$$

Nous commençons par la construction d'un ensemble qui admet des translations de nombres rationnels et seulement de telles translations. La possibilité de construire un tel ensemble sera démontrée plus bas. Montrons à présent la méthode à laide de laquelle on peut passer de cet ensemble à l'ensemble qui nous intéresse.

Soit E (x) un ensemble de longueur 1 dense partout sur le segment (0,1) et qui admette des translations de nombres rationnels < 1 et seulement de ces nombres. Par conséquent:

$$\begin{array}{ll} E(x) \, . \, E(x+k) = 0 & \text{pour tout } k \text{ rationnel} \\ E(x) \, . \, E(x+k) \neq 0 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{" irrationnel} \end{array}$$

à condition que $|k| < 1$.

Enumérons toutes les fractions positives irréductibles $< \frac{1}{2}$ dont les dénominateurs ne soient pas des nombres simples. Il en résulte une suite infinie:

$$l_1, \, l_2, \, l_3 \, \ldots, \, l_n, \, \ldots$$

Choisissons parmi les points de l'ensemble $E(x)$ une suite de points

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

telle, que $x_n \longrightarrow 1$.

Désignons par $E(x_i + l_i)$ l'ensemble des points

$$x_1 + l_1, \quad x_2 + l_2, \quad x_3 + l_3, \dots, x_n + l_n, \dots$$

Formons un nouvel ensemble $F(x)$, en ajoutant l'ensemble $E(x_i + l_i)$ à l'ensemble $E(x)$, de sorte que

$$F(x) = E(x) + E(x_i + l_i).$$

L'ensemble $F(x)$ se trouve évidemment sur le segment $(0, 1\frac{1}{2})$, les points 0 et $1\frac{1}{2}$ étant ses points limites.

Considérons ensuite le segment (0,2) et proposons nous la question suivante: quelles sont les translations rationnelles $\leq \frac{1}{2}$ qui soient restées admissibles pour l'ensemble $F(x)$ sur ce segment?

Il est évident qu'en vertu des propriétés de $E(x)$ l'ensemble $F(x)$ peut admettre seulement des translations de nombres rationnels $\leq \frac{1}{2}$.

Soit k un nombre rationnel et $\leq \frac{1}{2}$.

Pour que $F(x)$ admette la translation du nombre k il est nécessaire que:

$$F(x) \,.\, F(x + k) = 0.$$

Mais, $F(x)$ étant la somme de $E(x)$ et de $E(x_i + l_i)$ nous obtenons:

$$[E(x) + E(x_i + l_i)] \,.\, [E(x + k) + E(x_i + l_i + k)] = 0.$$

Autrement dit, il est nécessaire que les quatre égalités suivantes

$$\begin{array}{rl} \mathrm{I} & E(x) \,.\, E(x + k) = 0 \\ \mathrm{II} & E(x + k) \,.\, E(x_i + l_i) = 0 \\ \mathrm{III} & E(x_i + l_i) \,.\, E(x_i + l_i + k) = 0 \\ \mathrm{IV} & E(x) \,.\, E(x_i + l_i + k) = 0 \end{array}$$

soient effectuées simultanement.

Les égalités I et III s'effectuent évidemment pour chaque k. Quant à l'équation II, elle montre l'existence de l'inégalité:

$$x + k \neq x_i + l_i \text{ ou bien } x - x_i \neq l_i - k$$

pour chaque x, appartenant à l'ensemble $E(x)$ et pour chaque i. Or, cette inégalité s'accomplit lorsque $k \neq l_i$, parce que x et x_i, en appartenant tous les deux à l'ensemble $E(x)$, ne peuvent avoir une différence rationnelle.

De même, l'équation IV nous donne:

$$x - x_i \neq l_i + k \quad \text{ou bien} \quad k \neq - l_i$$

Ainsi la translation de l'ensemble $F(x)$ à une distance k n'est pas possible que dans un seul cas à savoir: lorsque $|k| \neq l_i$ pour chaque i; en d'autres termes, k doit être une fraction à dénominateur simple.

Il s'en suit que si nous avons sur le segment (0,2) plusieurs ensembles sans points communs et congruants avec $F(x)$, leurs distances réciproques devraient être exprimées par des fractions à dénominateurs simples et seraient $\leq \frac{1}{2}$. Mais cela n'est possible que dans le cas où ces fractions seraient à dénominateurs égaux. Donc pour le segment (0,2) $F(x)$ représente l'exemple cherché.

Démontrons à présent la possibilité de construire l'ensemble $E(x)$.

Construisons une base de Hamel contenant le nombre 1. On connaît alors la possibilité de représenter chaque nombre x d'une façon unique sous la forme:

$$x = a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + n\nu,$$

où la partie droite contient un nombre fini de membres, les nombres α, β, γ, ...étant membres de la base, et a, b, c, ... etc. étant nombres rationnels.

Désignons par $E_1(x)$ l'ensemble des nombres qui s'expriment par la base, choisie sans l'aide de l'unité. C'est un ensemble non mesurable, dense partout et qui a la propriété de permettre les translations de tous les nombres qui ne font pas partie de lui-même tandis qu'il ne le permet pas pour tous les autres nombres *).

En désignant par y un nombre quelconque qui n'appartient pas à $E_1(x)$, nons avons:

$$E_1(x) \,.\, E_1(x+y) = 0.$$

L'ensemble des nombres y se compose des nombres

$$y = x + k,$$

où x appartient à l'ensemble $E_1(x)$ et k est rationnel.

Transformons $E_1(x)$ de la façon suivante:

Choisissons parmi les nombres α, β, γ, ... une suite dénombrable et énumerons tous ses membres. Nous avons la suite:

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$$

Enumérons aussi toutes les fractions de la forme $\frac{m}{n}$ où m prend toutes les valeurs entières y compris zéro, et n—toutes les

*) W. Sierpinskiy: „Sur la question de mésurabilité de la base de M. Hamel". (Fund. Math. T. I 1920).

valeurs entières excepté zéro. Ainsi chaque nombre rationnel (en y comprenant zéro) se répète une infinité de fois dans cette suite, et peut avoir un numéro arbitrairement grand. Nous aurons alors la suite.

$$k_1, k_2, \ldots, k_n \ldots \tag{2}$$

Choisissons maintenant ceux des nombres x qui s'expriment au moyen des membres de la suite (1):

$$x = a_1\alpha_{i_1} + a_2\alpha_{i_2} + \ldots + a_{n(x)}\alpha_{i_{n(x)}}$$

et remplaçons chacun d'eux par $x + k_i$, où k_i est un des nombres de la suite (2), sa marque i étant le plus petit des nombres $i_1, i_2, \ldots, i_{n(x)}$. En gardant tous les autres points de l'ensemble $E_1(x)$ invariables, nous obtenons ainsi un nouvel ensemble $E(x)$ qui n'admet que des translations de nombres rationnels. En effet, les translations rationnelles sont permises. Soit u un nombre irrationnel. Dans ce cas nous avons:

$$u = x_u + k$$

où x_u est un membre de l'ensemble $E(x)$ et k est un nombre rationnel ou bien égal à zéro.

Examinons les deux cas suivants:

1) Supposons que l'expression de x_u par la base contient, outre les nombres $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$, encore d'autres nombres de la base

$$x_u = \sum_{j=1}^{j=n(x_u)} a_j\alpha_{i_j} + b\beta + c\gamma + \ldots$$

Soit i_1 l'une des marques du nombre $(-k)$ dans la suite (2). Alors, puisque $k + k_i = 0$, les nombres de la forme

$$x_u' = k_{i_1} + a_1\alpha_{i_1} + a_2\alpha_{i_2} + \ldots + a_{m(x'_u)}\alpha_{i_{m(x'_u)}} \quad (i_1 < i_2 < \ldots < i_{m(x'_u)})$$

deviennent de nouveau, après être additionnés à u, des membres de l'ensemble $E(x)$. Ainsi on voit que dans ce cas la translation n'est pas possible.

2) L'expression de x_u par la base ne contient pas d'autres membres de la base que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$ c'est à dire:

$$x_u = k_{j_1} + a_1\alpha_{j_1} + a_2\alpha_{j_2} + a_3\alpha_{j_3} + \ldots + a_{m(x_u)}\alpha_{j_{m(x_u)}} \quad (j < j < \ldots < j_{m(x_u)}).$$

Soit encore $-k = k_{i_1}$. De la manière dont nous avons construit la suite (2), on peut supposer que $i_1 > j_1$. Dans ce cas, le nombre de la forme

$$x''_u = k_{i_1} + a_1 \alpha_{i_1} + \dots + a_{m(x''_u)} \alpha_{i_{m(x_u)}}$$

après être additionné à u, donne aussi un point de l'ensemble $E(x)$. Nous obtenons le même résultat: dans ce cas, aussi bien que dans le précédent, la translation est impossible.

Observons encore que l'ensemble $E(x)$, qui s'étend de $-\infty$ à $+\infty$, est partout dense et que pour chaque nombre u les nombres du type x_u' et x_u'' forment aussi un ensemble partout dense. Il en résulte que chaque segment de l'ensemble $E(x)$ conserve toutes les propriétés de cet ensemble.

Об одной задаче относительно конгруэнтных совокупностей.

М. А. Зарецкий.

Дано, что на отрезке можно разместить любое конечное число совокупностей, конгруэнтных данной, так, чтобы эти совокупности не налегали одна на другую. Означает-ли это, что таким-же образом можно разместить на том-же отрезке таких совокупностей исчислимое множество? В настоящей заметке дается пример, который показывает, что на поставленный вопрос надо дать отрицательный ответ.

Démonstration élementaire d'un théorème de Gauss.

J. Winogradoff.

Dans le mémoire présent je donne une nouvelle démonstration de l'expression assymptotique de la somme

$$h\,(-1)+h\,(-2)+\ldots+h\,(-m),$$

où $h\,(-\Delta)$ indique le nombre des classes des formes quadratiques de première espèce du déterminant négatif $-\Delta$.

Gauss (Disqu. Arithm. art. 302) affirmait, qu' il avait obtenu la formule analogue par des recherches assez laborieuses.

Le bût du mémoire présent est de montrer, que la déduction de cette formule peut être obtenue par une méthode très élementaire, n'exigeant que le calcul des modules des sommes trigonometriques les plus simples.

Malgré la simplicité de la démonstration, l'ordre $m^{\frac{3}{4}}\,(lg\;m)^2$ du reste de la formule, obtenue dans ce mémoire, n'est qu'un peu moindre en précision que celui de ma thèse de 1920 *) ($m^{3/4}$) et coïncide au résultat de mon mémoire de 1916 **).

1°. La démonstration est basée sur deux simples lemmes suivants:

Lemme I. Soit n un nombre entier >1, ρ une racine primitive de l'équation $\rho^n=1$, a et b des nombres entiers.

Soit ensuite

$$S=\sum_{x=0}^{n-1}\rho^{ax^2+bx};\ (a,\ n)=d\,^{***}).$$

*) Bulletins de l'Académie des Sciences 1921.

**) „Sur. la valeur moyenne des nombres des classes des formes quadratiques de première espèce du déterminant négatif". (Commun. de la Soc Math. de Charkoff 1916).

***) Le symbole $(a,\ b)$ indique le plus grand diviseur commun des nombres a et b.

Ces suppositions faites, la somme S peut être différente de zéro dans le seul cas, où b est divisible par d, et alors

$$|S| \leq \sqrt{2nd}.$$

Démonstration.—Admettons $a = a_1 d$; $n = n_1 d$.

Nous trouvons:

$$|S|^2 = \sum_{z=0}^{n-1} \rho^{az^2 + bz} \sum_{x=0}^{n-1} \rho^{-ax^2 - bx},$$

d'où, ayant fait la substitution $z \equiv x + t \pmod{n}$,

$$|S|^2 = \sum_{t=0}^{n-1} \rho^{at^2 + bt} \sum_{x=0}^{n-1} \rho^{2atx}.$$

Prenant la somme par rapport à x, nous allons obtenir n ou 0, ce qui dépend de ce que $2t$ est divisible par n, ou non.

α) Soit n_1 pair, alors toutes les valeurs de t, pour lesquelles $2t$ est divisible par n, sont: $0,\ n_2,\ 2n_2, \ldots (2d-1)\, n_2$, où $n_1 = 2n_2$.

Nous obtenons:

$$|S|^2 = n \sum_{s=0}^{2d-1} \rho^{an_2^2 s^2 + bn_2 s} = n. \sum_{s=0}^{2d-1} (-1)^{a_1 n_2 s^2} \rho^{bn_2 s}.$$

Si $a_1 n_2$ est pair, alors la dernière expression s'annulle, si b n'est pas divisible par $2d$, et est égale à $2nd$, si b est divisible par $2d$. Donc le lemme est démontré.

Dans le cas, où $a_1 n_2$ est impair, nous avons:

$$s = 2s_1 + \varepsilon; \quad \varepsilon = 0;\ 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$|S|^2 = n \sum_{s=0}^{d-1} \rho^{2bn_2 s} \left(1 - \rho^{bn_2}\right);$$

ce qui s'annulle, quand b n'est pas divisible par d, et est $\leq 2nd$, quand b est divisible par d.—Ainsi dans ce cas le lemme est démontré également.

β) Si n_1 est impair, t doit être égal à un des nombres: $0,\ n_1,\ 2n_1, \ldots (d-1)\, n_1$.

Nous avons:

$$|S|^2 = n. \sum_{s=0}^{d-1} \rho^{an_1^2 s^2 + bn_1 s} = n. \sum_{s=0}^{d-1} \rho^{bn_1 s}.$$

La dernière expression s'annulle, si b n'est pas divisible par d, et est égale à d, si b est divisible par d. Notre lemme est ainsi complètement démontré.

Lemme II. Soit n un nombre entier > 2, ρ une racine primitive de l'équation $\rho^n = 1$, α et β des nombres entiers, satisfaisant à la condition $\alpha < \beta$, et c un nombre entier, non divisible par n.

Ces suppositions faites, on aura l'inégalité:

$$\left|\sum_{x=\alpha}^{x=\beta} \rho^{cx}\right| < \frac{n}{2\nu},$$

où ν est le module du résidu le plus petit en valeur absolue du nombre c, suivant le module n.

Théorème I. Soit n un nombre entier > 2, ρ une racine primitive de l'équation $\rho^n = 1$, m un nombre entier quelconque, α, h_1, h_2 des nombres entiers, satisfaisant aux conditions:

$$0 < h_1 \leq n; \; 0 < h_2 \leq n.$$

Alors le nombre T des fractions de la série:

$$\left\{\frac{m + x^2}{n}\right\}; \; x = \alpha, \; \alpha + 1, \ldots \alpha + h_1 - 1,$$

moindre que $h_2 n^{-1}$, est exprimé par la formule suivante:

$$T = \frac{h_1 \, h_2}{n} + \theta \sqrt{2n} \, lgn \left(2{,}8 \; lgn \; \sum \frac{1}{\sqrt{d}}\right); \; |\theta| < 1;$$

où d parcourt tous les diviseurs du nombre n.

Démonstration. Considérons une somme multiple

$$\Omega = \sum_{x=0}^{n-1} \; \sum_{z=\alpha}^{\alpha+h_1-1} \; \sum_{t=0}^{h_2-1} \; \sum_{u=0}^{n-1} \; \sum_{s=0}^{n-1} \rho^{(m+x^2-z)u+(x-t)s} \;^{*)}.$$

La sommation par rapport à u et s donne n^2 ou 0, selon les nombres $m + x^2 - z$, $x - t$ sont tous les deux divisibles par n, ou au moins l'un d'eux ne l'est pas.—Nous en tirons, que

$$\Omega = n^2 \, T.$$

Calculons maintenant la somme Ω d'une autre manière. Admettons $d = (u, n)$; $u = u_1 d$; $n = n_1 d$, et apprécions d'abord le module de la partie de la somme Ω, correspondant à la valeur donnée de u qui satisfait à la condition:

$$2 < n_1 < n.$$

---

*) J'ai considéré des sommes analogues dans mes ouvrages précedents (p. e. „Sur la distribution des indices“.—Bulletins de l'Ac. des Sciences, 1926).

En effectuant la sommation par rapport à x, u et s étant donnés, nous obtenons la somme:

$$\sum_{x=0}^{n-1} \rho^{\nu x^2 + sx},$$

qui, en vertu du lemme I, peut être différente de zéro dans le seul cas, où s est divisible par d, et alors le module de cette somme est $\leq \sqrt{2nd}$. Mais toutes les valeurs de s, divisibles par d sont:

$$s = s_1\ b\,;\, s_1 = 0,\ 1, \ldots\ n_1 - 1.$$

Pour chacune d'elles la sommation par rapport à z—donnera la quantité qui, en vertu du lemme II, sera moindre en valeur absolue que $n_1\ (2\nu)^{-1}$, où ν est le module du résidu le plus petit en valeur absolue du nombre u_1 suivant le module n_1. La sommation par raport à t nous donnera une quantité, ne dépassant pas en valeur absolue $n_1\ (2\nu_1)^{-1}$, où ν_1 est le module du résidu le plus petit en valeur absolue du nombre s_1 suivant le module n_1—si pourtant s_1 ne s'annulle pas.—Mais si $s_1 = 0$, alors nous aurons h_2.

Il en resulte que la partie de la somme Ω, correspondant à la valeur donnée de u, est moindre en valeur absolue que la quantité:

$$\sqrt{2nd} \cdot \frac{n_1}{2\nu}\left(n_1 \sum_{\nu_1 = 1}^{\nu_1 \leqq \frac{n_1}{2}} \frac{1}{\nu_1} + h_2 \right) < n^2 \sqrt{2n}\ \left(\frac{lgn}{d\sqrt{d}} + \frac{1}{\sqrt{d}}\right) \frac{1}{2\nu}.$$

Le module de la partie de la somme Ω, correspondant à tous les nombres u ayant le même d est moindre, que:

$$n^2 \cdot \sqrt{2n}\ \left(\frac{(lgn)^2}{d\sqrt{d}} + \frac{lgn}{\sqrt{d}}\right).$$

Le module de la somme des termes de la somme Ω, correspondant à tous les nombres u, qui satisfont à la condition $2 < n_1 < n$, est moindre, que:

$$n^2 \cdot \sqrt{2n}\ lgn \cdot \left(2{,}6\ \ lgn + \sum \frac{1}{\sqrt{d}}\right),$$

où d parcourt tous les diviseurs du nombre n.

Dans le cas, où $n_1 = 2$, u_1 ne peut être égal qu'à 1.—Il est aisé de voir que la partie correspondante de la somme Ω ne surpassera pas n.

Mais, comme la partie de la somme Ω, correspondant au cas $u=0$ est évidemment égale à $h_1\ h_2\ n$, nous avons:

$$\Omega = h_1\ h_2\ n + \theta \cdot n^2 \cdot \sqrt{2n}\ lgn \cdot \left(2{,}8\ lgn + \sum \frac{1}{\sqrt{d}}\right);\ |\theta| < 1.$$

En comparant cette expression de Ω avec celle, qui a été trouvée plus haut, nous voyons que le théorème est vrai.

Théorème II. Soit n un nombre entier >2, m un nombre entier quelconque; α et h_1 des nombres entiers; de plus: $0 < h_1 \leqq n$.

Alors l' égalité suivante a lieu:

$$\sum_{x=\alpha}^{\alpha+h_1-1} \left\{\frac{m+x^2}{n}\right\} = \frac{1}{2} h_1 + \sigma \cdot \sqrt{2n} lgn \left(3\ lgn + \sum \frac{1}{\sqrt{d}}\right);\ |\sigma| < 1,$$

où d parcourt tous les diviseurs du nombre n.

Démonstration.—Admettons:

$$U = \sqrt{2n} \cdot lgn \cdot \left(2{,}8\ lgn + \sum \frac{1}{\sqrt{d}}\right).$$

D'après le théorème I, nous pouvons représenter le nombre des fractions de la série

$$\left\{\frac{m+x^2}{n}\right\};\ x = \alpha,\ \alpha+1, \ldots \alpha+h_1-1,$$

moindres que hn^{-1}, sous la forme:

$$\frac{h_1\ h}{n} + \theta_h\ U.\ |\theta_h| < 1$$

pour chaque h entier, satisfaisant à la condition:

$$O < h \leqq n.$$

Il s'en suit que le nombre des fractions, égales à hn^{-1}, est:

$$\frac{h_1}{n} + (\theta_{h+1} - \theta_h)\, U.$$

Par conséquent, la somme, considérée dans notre théorème, peut être représentée sous la forme:

$$(\theta_n = 0).$$

$$\frac{h_1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \quad + \frac{n-1}{n}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{n} + \frac{2\theta_3 - 2\theta_2}{n} + \ldots + \frac{-(n-1)\,\theta_{n-1}}{n}\right) U =$$

$$= \frac{h_1}{2} - \frac{h_1}{2n} - U \frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n-1}}{n},$$

ce qui suffit à démontrer notre théorème.

Remarque.—Les théorèmes I et II restent évidemment vrais aussi dans le cas, où le numérateur de la fraction au lieu de $m+x^2$ est égal à $m-ax^2$, où a est un nombre quelconque, premier avec n.

2^c. Maintenant nons allons déduire la formule:

$$h(-1)+h(-2)+\ldots+h(-m)=$$
$$=\frac{4\pi}{21e}m^{3/2}-\frac{2}{\pi^2}m\,O\left(m^{3/4}(lgm)^2\right),$$

où $h(-\Delta)$ est le nombre des classes des formes quadratiques de première espèce du déterminant négatif $-\Delta$ et

$$e=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.$$

La démonstration reste la même que dans mon ouvrage: „Nouvelle méthode pour obtenir des expressions assymptotiques des fonctions numériques“ (Bull, de l' Ac. des sciences. 1917).— Ce n'est que le calcul du reste de la formule qui est différent, car à present pour l'évaluer, nous pouvons prendre (en vertu du théorème II) l'expression:

$$\sqrt{x}\cdot lgx\left(lgx\cdot\sum\frac{1}{\sqrt{d}}\right),$$

où d parcourt tous les diviseurs du nombre x.—Par conséquent, l' ordre du reste de la formule, exprimant $F(n)$, est le suivant

$$\sum_{x=1}^{x\leq t}\sqrt{x}\left((lgx)^2\quad\frac{lgx}{\sqrt{d}}\right)\sum_{x=1}^{x\leq t}\sqrt{x}\quad(lgx)^2+$$
$$\sum_{d=x}^{d\leq t}\sum_{x=1}^{x=\frac{t}{d}}\frac{\sqrt{xd}\cdot lg\,(xd)}{\sqrt{d}}=O\left(n^{3/4}(lgn)^2\right)$$

(nous admettons ici

$$t=\sqrt{\frac{4}{3}n}\Bigg).$$

Il est facile à en tirer la conclusion que le reste de la formule finale a le même ordre.

Элементарный вывод одной формулы Гаусса.

И. М. Виноградов.

В настоящей работе я даю новый вывод ассимптотического выражения суммы

$$h\,(-1)+h\,(-2)+\ldots+h\,(-m),$$

где $h\,(-\Delta)$ обозначает число классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя $-\Delta$.

Гаусс (Disqu. Arithm. art 302) утверждал, что соответствующая формула получилась у него путем довольно трудных изысканий.

Настоящее небольшое исследование имеет целью показать, что доказательство этой формулы может быть достигнуто весьма элементарным методом, требующим лишь оценки модуля простейших тригонометрических сумм.

Несмотря на крайнюю простоту вывода, порядок $m^{\frac{3}{4}}\,(lgm)^2$ остаточного члена, достигаемый мною теперь, лишь немногим уступает таковому $(m^{\frac{3}{4}})$ моей диссертации 1920 г. и совпадает с найденным в моей работе 1916 года.

О некоторых обобщениях задач Сан Венана и Клебша в теории упругости.

Г. В. Колосов.

Общеизвестно значение задачи Сан Венана как в теории упругости, так и в теории сопротивления материалов и неоднократно делались попытки обобщить эту задачу, получив решение, из которого она вытекала бы как простое следствие *).

Во всех работах этого характера ищут обыкновенно решений уравнений теории упругости, расположенных по степеням одной из координат z, при чем ось этой координаты расположена по оси цилиндра, деформация которого исследуется.

Частным случаем таких решений являются, как известно, и задача Сан-Венана и задача Клебша.

В настоящей работе мы применяем для той же цели иной метод, значительно облегчающий вычисления и основанный на применении особого комплексного преобразования, при помощи которого решения получаются и проще и в более удобной для приложений форме, так как непосредственно вводятся те гармонические функции, при помощи которых удовлетворяются контурные условия в задачах такого рода.

Основные уравнения теории упругости мы напишем в виде:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0 \end{aligned}$$

*) В. А. Стеклов. К задаче о равновесии упругих изотропных цилиндров. Сообщения Харьковского Математического Общества, 2-я серия, том VI, стр. 160—193.

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$(2) \qquad Y_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad Y_z = Z_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$Z_z = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad Z_x = X_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

где X_x, X_y, X_z, Y_x ... проекции напряжений на площадки, перпендикулярные осям координат, u, v, w—приращения координат какой-нибудь точки, ρ—плотность, λ и μ—коэффициенты упругости (Ляме),

$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — кубическое расширение.

В дальнейшем мы для сокращения письма будем через

$$X_x,\ X_y,\ X_z,\ Y_y \dots$$

обозначать эти величины, деленные на 2μ, т. е.

$$\frac{X_x}{2\mu},\ \frac{X_y}{2\mu},\ \frac{X_z}{2\mu},\ \frac{Y_y}{2\mu} \dots$$

и вместо λ, μ введем коэффициент $\varepsilon = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$, так что этот коэффициент связан непосредственно с модулем Пуассона σ так:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}.$$

Введем теперь в наши уравнения вместо x и y новые переменные $\zeta = x + iy$, $\zeta_1 = x - iy$ и заменим уравнения (1) уравнениями:

$$(1\text{-a}) \qquad \frac{\partial}{\partial\zeta}(X_x - Y_y + 2iX_y) + \frac{\partial(X_x + Y_y)}{\partial\zeta_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \rho\psi = 0.$$

$$(1\text{-b}) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_1} = -\frac{\partial Z_z}{\partial z} - \rho Z.$$

Здесь $\varphi = X_z + iY_z$, $\psi = X + iY$ и в дальнейшем мы будем обыкновенно предполагать отсутствие внешних сил и $Z = X = Y = \psi = 0$ *).

---

*) Значком $_1$ (внизу) мы будем обозначать значение величины, содержащей мнимый знак i при замене $+i$ на $-i$

Точно также совокупность уравнений (2) мы заменим уравнениями:

$$\text{2-a)} \qquad X_x - Y_y + 2\,iX_y = 2\frac{\partial f}{\partial \zeta_1}$$

$$\text{(2-b)} \qquad X_x + Y_y = \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}\right) + (\varepsilon - 1)\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{(2-c)} \qquad \varphi = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta_1}$$

$$\text{(2-d)} \qquad \frac{\partial w}{\partial z}(\varepsilon + 1) = 2\,Z_z - (\varepsilon - 1)\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}\right)$$

где $f = u + iv$, $f_1 = u - iv$. Из (2-d) и (2-b) следует:

$$\text{(2d}_b\text{)} \qquad X_x + Y_y = \frac{3\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}\right) + 2\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}Z_z.$$

При отыскании решений наших уравнений предположим что f является фунцией только z и ζ, т. е.

$$\text{(3)} \qquad f = f(z, \zeta).$$

Мы придем этим путем к задаче Сан Венана и ее непосредственным обобщениям, так как из уравнения (2-a) мы найдем

$$\text{(4)} \qquad X_x = Y_y,\ X_y = 0,$$

и в частном случае:

$$\text{(5)} \qquad X_x = Y_y = X_y = 0 \ \text{(задача Сан Венана).}$$

В этом случае из уравнения (1-a) мы найдем (так как $\psi = 0$):

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Из уравнений (2-b) и (2-c):

$$\text{(7)} \qquad \begin{gathered} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}\right) \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta_1} = \varphi - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} \end{gathered}.$$

Условие интегрируемости уравнений (7) в связи с (6) дает:

$$\text{(8)} \qquad \frac{2\varepsilon}{\varepsilon - 1}\,\frac{\partial^2 f_1(z, \zeta_1)}{\partial \zeta_1^2} = \frac{\partial^2 f(z, \zeta)}{\partial z^2}.$$

Отсюда легко заключить, что:

$$f(z_1\zeta) = \zeta^2(\alpha + \beta z) + \zeta(\gamma + \delta z) + \\ + 4\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\iint(\alpha_1 + \beta_1 z)\,dz^2, \tag{9}$$

где α, β, γ, δ—какие-нибудь (вообще говоря комплексные) постоянные, и

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} = 2\zeta(\alpha + \beta z) + 2\zeta_1(\alpha_1 + \beta_1 z) + \gamma + \delta z + \gamma_1 + \delta_1 z.$$

Из уравнения (2-d_b)

$$Z_z = \frac{1}{2}\frac{1 - 3\varepsilon}{\varepsilon - 1}[2\zeta(\alpha + \beta z) + 2\zeta_1(\alpha_1 + \beta_1 z) + \gamma + \delta z + \gamma_1 + \delta_1 z]$$

Из уравнений (1-b) и (2-c):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \zeta_1} = \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}\right) = \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}(2\zeta\beta + 2\zeta_1\beta_1 + \delta + \delta_1) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}[2\zeta(\alpha + \beta z) + \gamma + \delta z + 2\zeta_1(\alpha_1 + \beta_1 z) + \gamma_1 + \delta_1 z],\end{gathered} \tag{10}$$

откуда:

$$w = \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}\left\{4\zeta\left(\alpha z + \frac{\beta z^2}{2}\right) + 4\zeta_1\left(\alpha_1 z + \frac{\beta_1 z^2}{2}\right) + \right. \\ \left. + 2\gamma z + \delta z^2 + 2\gamma_1 z + \delta_1 z^2 - \beta\zeta^2\zeta_1 - \beta_1\zeta_1^2\zeta - (\delta + \delta_1)\zeta\zeta_1\right\} + w_0$$

где w_0—произвольная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta \partial \zeta_1} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0,$$

φ определим из уравнения (2-c)

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon - 1)}\left\{\frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon}\beta\zeta^2 + 2\beta_1\zeta\zeta_1 + \delta_1\zeta + \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon}\delta\zeta\right\} + \frac{\partial w_0}{\partial \zeta_1}.$$

Из найденных результатов легко получить формулы, даваемые обыкновенно в курсах. Легко обобщить задачу на случай:

$$X_x = Y_y = p \quad X_y = 0. \tag{11}$$

Мы найдем тогда из (1-а):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2\,\frac{\partial p}{\partial \zeta_{-1}}\,.$$

Вместо (7) мы найдем уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_{-1}}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta_{-1}} = \varphi - \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Условие итегрируемости их требует:

$$\frac{2\varepsilon}{\varepsilon-1}\,\frac{\partial^2 f_1(z,\zeta_{-1})}{\partial \zeta_{-1}^{\,2}} - \frac{4}{\varepsilon-1}\,\frac{\partial p}{\partial \zeta_{-1}} = 4\,\frac{\partial p}{\partial \zeta_{-1}} + \frac{\partial^2 f(\zeta,z)}{\partial z^2}$$

или

$$(12)\qquad \frac{2\varepsilon}{\varepsilon-1}\,\frac{\partial^2 f_1(z,\zeta_{-1})}{\partial \zeta_{-1}^{\,2}} - \frac{4\varepsilon}{\varepsilon-1}\,\frac{\partial p}{\partial \zeta_{-1}} = \frac{\partial^2 f(\zeta,z)}{\partial z^2}\,.$$

Так как p есть величина вещественная, то легко заключить из (12), что за нее можно взять вещественную часть некоторой функции комплексного переменного $\xi\,(z,\zeta)$, так что:

$$p = \frac{1}{2}\left(\xi\,(z,\zeta) + \xi_1\,(z,\zeta_{-1})\right)$$

и (12) примет вид:

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 f_1(z,\zeta_{-1})}{\partial \zeta_{-1}^{\,2}} - \frac{\partial \xi_1\,(z,\zeta_{-1})}{\partial \zeta_{-1}} = \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}\,\frac{\partial^2 f(z,\zeta)}{\partial z^2}\,.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, необходимо положить:

$$(14)\qquad \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}\,\frac{\partial^2 f\,(z,\zeta)}{\partial z^2} = f_1\,(z).$$

Следовательно:

$$\frac{\partial^2 f_1(z,\zeta_{-1})}{\partial \zeta_{-1}^{\,2}} - \frac{\partial \xi_1\,(z,\zeta_{-1})}{\partial \zeta_{-1}} = f_1\,(z)$$

или

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 f(z,\zeta)}{\partial \zeta^2} = f\,(z) + \frac{\partial \xi\,(z,\zeta)}{\partial \zeta}\,.$$

Поэтому можно положить:

$$(16)\qquad f\,(z,\zeta) = \int \Phi\,(z,\zeta)\,d\zeta + 2\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\int\!\!\int f_1\,(z)\,dz,$$

где $\Phi(z,\zeta)$ полином 1-ой степени относительно z с коэффициентами функциями от ζ. Из (15):

$$\frac{\partial\Phi(z,\zeta)}{\partial\zeta}=f(z)+\frac{\partial\xi(z,\zeta)}{\partial\zeta}$$

и следовательно:

(17) $$\Phi(z,\zeta)=\zeta f(z)+\xi(z,\zeta)+\chi(z)$$

Легко убедиться, что $f(z)$ и $\chi(z)$ должны быть линейными от z, так что:

(18) $$\chi(z)=\gamma+\delta z,\quad f(z)=2(\alpha+\beta z),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, как и в задаче Сан-Венана, постоянные и, следовательно, не только $\Phi(z,\zeta)$, но и $\xi(z,\zeta)$ является линейной функцией от z. В самом деле из (16):

$$\frac{\partial f(z,\zeta)}{\partial\zeta}+\frac{\partial f_1(z,\zeta_1)}{\partial\zeta_1}=\Phi(z,\zeta)+\Phi_1(z,\zeta_1)$$

и, следовательно, из (2-d_b):

$$Z_z=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}p+\frac{1-3\varepsilon}{2(\varepsilon-1)}\left(\Phi(z,\zeta)+\Phi_1(z,\zeta_1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\left(\xi(\zeta,z)+\xi_1(\zeta_1,z)\right)+\frac{1-3\varepsilon}{2(\varepsilon-1)}\left(\Phi(z,\zeta)+\Phi_1(z,\zeta_1)\right),$$

а, следовательно, из (1-b) и (2-c)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=-\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon-1)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi(z,\zeta)+\Phi_1(z,\zeta_1)\right)+$$
$$\frac{1}{4}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\frac{\partial\xi(\zeta,z)}{\partial z}+\frac{\partial\xi_1(\zeta,z)}{\partial z}\right),$$

а на основании (2-b):

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\Phi(z,\zeta)+\Phi_1(z,\zeta_1)+\frac{\xi(z,\zeta)+\xi_1(z,\zeta_1)}{\varepsilon-1}\right).$$

Из этих уравнений следует условие интегрируемости

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\xi(\zeta,z)+\xi_1(\zeta,z)\right)=0$$

и, следовательно, из (17):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\zeta f(z)+\zeta_1 f_1(z_1)+\chi(z)+\chi_1(z)\right)=0,$$

т. е. $f(z)$ и $\chi(z)$ линейные функции от z, которые мы можем предположить в виде (18), и

$$\Phi(z,\zeta)=2(\alpha+\beta z)\zeta+\gamma+\delta z+\xi(z,\zeta),\ \text{а}\ \xi(z,\zeta)$$

линейная функция от z с коэффициентами, зависящими от ζ.

Уравнения для определения w примут тогда вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon-1)}(2\zeta\beta + 2\zeta_1\beta_1 + \delta + \delta_1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -2p +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(2\zeta(\alpha+\beta z) + 2\zeta_1(\alpha_1+\beta_1 z) + \gamma + \delta z + \gamma_1 + \delta_1 z\right),$$

откуда для w мы получаем выражение:

$$w = -2\int \rho dz + \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}\Big\{2\zeta(2\alpha z + \beta z^2) + 2\zeta_1(2\alpha_1 z + \beta_1 z^2) +$$

$$+ 2\gamma z + 2\gamma_1 z + \delta z^2 + \delta_1 z^2 - \beta\zeta^2\zeta_1 - \beta_1\zeta_1^2\zeta - (\delta+\delta_1)\zeta\zeta_1\Big\} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\zeta_1\int\frac{\partial\xi(z,\zeta)}{\partial z}d\zeta + \zeta\int\frac{\partial\xi_1(z,\zeta_1)}{\partial z}d\zeta_1\right) + w_0$$

или, полагая

$$\xi(z,\zeta) = z\xi(\zeta) + \xi_0(\zeta), \text{ где } \xi(\zeta) \text{ и } \xi_0(\zeta)$$

некоторые функции одного ζ

$$\text{и } 2p = z\left(\xi(\zeta) + \xi_1(\zeta_1)\right) + \xi_0(\zeta) + \xi_{01}(\zeta_1):$$

$$w = -\frac{z^2}{2}\left(\xi(\zeta) + \xi_1(\zeta_1)\right) - z\left(\xi_0(\zeta) + \xi_{01}(\zeta_1)\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}\Big(2\zeta(2\alpha z + \beta z^2) + 2\zeta_1(2\alpha_1 z + \beta_1 z^2) + 2\gamma z + 2\gamma_1 z +$$

$$+ \delta z^2 + \delta_1 z^2 - \beta\zeta^2\zeta_1 - \beta_1\zeta_1^2\zeta - (\delta+\delta_1)\zeta\zeta_1\Big) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\zeta_1\int\xi(\zeta)d\zeta + \zeta\int\xi_1(\zeta_1)d\zeta_1\right) + w_0,$$

где w_0—произвольная функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \tag{18-bis}$$

Для определения φ найдем из (2-с)

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{\partial f(z,\zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial\zeta_1} = -2\int\frac{\partial p}{\partial\zeta_1}dz +$$

$$+ \frac{3}{4}\int\xi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{4}\zeta\xi_1(\zeta_1) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon-1)}\left(\frac{2\varepsilon-1}{\varepsilon}\beta\zeta^2 + 2\beta_1\zeta\zeta_1 + \delta_1\zeta + \frac{2\varepsilon-1}{\varepsilon}\delta\zeta\right).$$

Как частный случай, получаются формулы для случая $\xi(z,\zeta)=A+Bz$ (A и B постоянные), соответствующего гидростатическому давлению на цилиндр, находящийся в несжимаемой тяжелой жидкости с осью, направленной вертикально *).

Заметим еще один очень общий случай интегрируемости уравнений (1) и (2), являющийся обобщением известного решения Клебша.

Предположим, что: 1) φ есть функция ζ_1 и 2) Z_z не зависит от z, так что можно положить

$$\varphi=\frac{\partial\Phi_1(\zeta_1,\ z)}{\partial\zeta_1}\ . \tag{19}$$

$$\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0. \tag{20}$$

В этих предположениях при отсутствии внешних сил, т. е. $\psi=Z=0$, уравнение (1-b) удовлетворяется (19) и (20), а уравнение (1-a) при помощи (2-a) интегрируется и дает:

$$2\frac{\partial f}{\partial\zeta}+X_x+Y_y+\frac{\partial\Phi_1(\zeta_1,\ z)}{\partial z}=F(z,\zeta), \tag{21}$$

где $F(z,\zeta)$—произвольная функция от z и ζ. Подставляя сюда X_x+Y_y из уравнения (2-b_b), найдем:

$$2\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\frac{3\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_1}\right)+2\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}Z_z+ \tag{22}$$
$$+\frac{\partial\Phi_1(\zeta_1,\ z)}{\partial z}=F(z,\zeta).$$

Переменив здесь i на $-i$ и сложив полученное уравнение с (22), найдем:

$$\frac{8\varepsilon}{\varepsilon+1}\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_1}\right)=F(z,\zeta)+$$
$$+F_1(z,\zeta_1)-4\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}Z_z-\frac{\partial}{\partial z}\Big(\Phi(\zeta,z)+\Phi_1(\zeta_1,\ z)\Big).$$

Подставив это выражение в (22), после приведения мы найдем:

$$\frac{\partial f}{\partial\zeta}=\frac{5\varepsilon+1}{16\varepsilon}\left(F(z,\zeta)-\frac{\partial}{\partial z}\Phi_1(\zeta_1,\ z)\right)- \tag{23}$$
$$-\frac{3\varepsilon-1}{16\varepsilon}\left(F_1(z,\zeta_1)-\frac{\partial}{\partial z}\Phi(\zeta,z)\right)-\frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}Z_z$$

*) Выражение (16) тогда совершенно совпадает с (9).

или, обозначая:

$$F(z,\zeta)-\frac{\partial}{\partial z}\Phi_1(\zeta_1,z)=\chi,\quad F_1(z_1\zeta_1)-\frac{\partial}{\partial z}\Phi(\zeta,z)=\chi_1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta}=\frac{5\varepsilon-1}{16\varepsilon}\chi-\frac{3\varepsilon-1}{16\varepsilon}\chi_1+\frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}Z_z. \tag{24}$$

Прежде чем определять отсюда f заметим, что для определения w нам послужат уравнения (2-d) и дифференцированное по ζ уравнение (2-c), откуда:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{2}{1+\varepsilon}Z_z-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}+\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}\right),\quad \frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\zeta} \tag{25}$$

или, принимая во внимание, что из (24):

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta}+\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}=\frac{1+\varepsilon}{8\varepsilon}(\chi+\chi_1)+\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}Z_z$$

и что $\dfrac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}$ должна быть вещественна, а следовательно на основании (24):

$$\frac{\partial\chi}{\partial z}=\frac{\partial\chi_1}{\partial z}=\Omega \text{ (вещественное число)},$$

мы перепишем уравнения (25) в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1-\varepsilon}{8\varepsilon}(\chi+\chi_1)+\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}Z_z\\ \frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=-\frac{1+\varepsilon}{16\varepsilon}\Omega\end{gathered} \tag{26}$$

Условие интегрируемости этих уравнений требует:

$$\frac{\partial^2 Z_z}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=-\frac{1}{8}\frac{\partial\Omega}{\partial z} \tag{27}$$

Так как Z_z от z не зависит, из (27) следует, что Ω есть линейная функция z, и мы можем положить:

$$\Omega=2z\Big(F_2(\zeta)+F_{21}(\zeta_1)\Big)+F_1(\zeta)+F_{11}(\zeta_1).$$

Тогда:

$$\chi=F(z,\zeta)-\frac{\partial\Phi_1(z,\zeta_1)}{\partial z}=$$

$$=z^2\Big(F_2(\zeta)+F_{21}(\zeta_1)\Big)+z\Big(F_1(\zeta)+F_{11}(\zeta_1)\Big)+F_0(\zeta)+F_{01}(\zeta_1),$$

$$\chi_1=F_1(z,\zeta_1)-\frac{\partial\Phi(z,\zeta)}{\partial z}=$$

$$=z^2\Big(F_2(\zeta)+F_{21}(\zeta_1)\Big)+z\Big(F_1(\zeta)+F_{11}(\zeta_1)\Big)+F_{01}(\zeta_1)+F_0(\zeta),$$

$$F(z,\zeta)=z^2F_2(\zeta)+zF_1(\zeta)+F_0(\zeta)$$

$$\Phi(z,\zeta)=-\frac{z^3}{3}F_2(\zeta)-\frac{z^2}{2}F_1(\zeta)-zF_0(\zeta)+\Phi_0(\zeta)$$

w определяется из уравнений (26), и мы найдем:

$$w = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} Z_z z - \frac{1-\varepsilon}{16\varepsilon}\ 2\frac{z^3}{3}(F_2(\zeta)+F_{21}(\zeta_1)) + z^2(F_1(\zeta)+F_{11}(\zeta_1)) +$$

$$+ 2z(F_0(\zeta)+F_{01}(\zeta_1)) + F_0(\zeta)+F_{01}(\zeta_1) - \frac{1+\varepsilon}{16\varepsilon}\left(\zeta_1 \int F_1(\zeta)\, d\zeta + \right.$$

$$\left. + \zeta \int F_{11}(\zeta_1)\, d\zeta_1 \right) + w_0.$$

где w_0 удовлетворяет уравнению: $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0$

и

$$Z_z = -\frac{1}{4}\left(\zeta_1 \int F_2(\zeta)\, d\zeta + \zeta \int F_{21}(\zeta_1)\, d\zeta_1\right) + \mathcal{F}(\zeta) + \mathcal{F}_1(\zeta_1).$$

Частным случаем этого решения является случай М. Леви (Journal de Math. 1877), где

$$Z_z = 0\,(F_2(\zeta) = \mathcal{F}(\zeta) = 0).$$

Еще более частным случаем явится случай Клебша, когда кроме того $\varphi = 0$.

Sur quelques généralisations des problèmes de Saint Venant et de Clebsch dans la théorie d'élasticité.

G. Kolossoff (Kolosov).

L'auteur transforme les équations de l'équilibre des corps isotropes de la théorie d'élasticité en introduisant au lieu des coordonnées x, y les variables $\zeta = x + iy$, $\zeta_1 = x - iy$ $(i = \sqrt{-1})$, et applique les équations transformées à la recherche des états de l'équilibre des corps cylindriques ou prismatiques dont l'axe est dirigée suivant OZ. Comme cas particuliers il retrouve d'une manière simple les solutions de B. de Saint Venant et de Clebsch et il indique une généralisation du problème de Saint Venant, quand le corps est soumis à une pression laterale normale à la surface du corps, et quelques généralisations du problème de Clebsch et en particulier la solution de Maurice Lévy (Journal de Mathématiques 3-ème série, t. III, 1877).

Закон взаимности кубических вычетов.

А. М. Журавский.

Изучение законов взаимности степенных вычетов занимает выдающееся положение в современной теории чисел и играет важную роль в истории ее развития.

Законы взаимности вычетов биквадратичных и кубических были предметом исследования выдающихся математиков прошлого столетия.

Упомянем Gauss'a, Jacobi, Eisenstein'a.

В настоящей работе дается новое, чисто арифметическое обоснование закона взаимности вычетов кубических, освобожденное от всяких трансцендентных элементов.

По духу оно примыкает к исследованиям Gauss'a.

Предлагаемая работа представляет извлечение из моей рукописной диссертации 1922 г.

I.

Общие свойства кубического децедента.

§ 1.

В основание исследования закона взаимности кубических вычетов положим алгебраическую область, зависящую от корня ρ *) уравнения

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

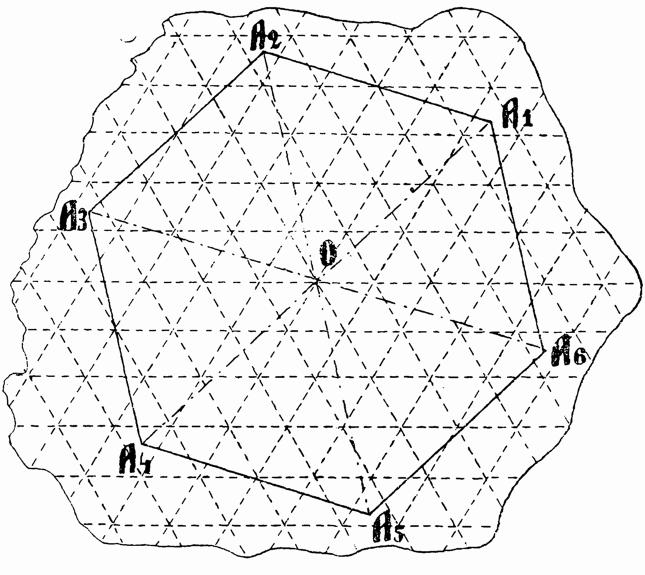
Целые числа $\alpha + \beta\rho$ (где α и β суть обыкновенные целые числа) этой области могут быть изображены точками параллелограмматической сети, составленной из ромбов с углом $\frac{2\pi}{3}$ при одной из вершин. Вершины сети будем называть целыми точками сети. В рассматриваемой области имеет место алго-

---

*) $\rho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

рифм Эвклида и сохраняются обычные законы арифметики чисел целых.

Понятие о сравнении и основные предложения учения о сравнениях переносятся на эту область безо всяких затруднений. Совокупность целых чисел области распадается по модулю $m = a + b\rho$ на классы. Числа одного и того же класса сравнимы между собою по модулю m. Целые точки, соответствующие числам одного и того же класса, будем называть эквивалентными по отношению к m. Выбирая в каждом классе число, получим совокупность чисел, несравнимых между собой по модулю m и при том таких, что каждое число области



Черт. 1.

сравнимо с одним из них по модулю m. Эту систему назовем основной системой чисел по модулю m. Совокупность целых точек, соответствующих числам основной системы, принадлежит к некоторой области. Эту совокупность назовем основной областью по модулю m. Выбор основной системы и основной области может быть произведен бесчисленным множеством способов. Одним из наиболее удобных способов представляется принять за основную область S совокупность целых точек, лежащих внутри шестиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ и на сторонах $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$ (черт. 1). Из вершин шестиугольника, буде они оказались бы целыми точками, к основной области относятся только точки A_1 и A_2.

Вершины шестиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ соответствуют числам

$$A_1 \ldots \sigma_1 = \frac{2a-b}{3} + \frac{a+b}{3}\rho$$

$$A_2 \ldots \sigma_2 = \frac{a-2b}{3} + \frac{2a-b}{3}\rho$$

$$A_3 \ldots \sigma_3 = -\frac{a+b}{3} - \frac{2b-a}{3}\rho$$

$$A_4 \ldots \sigma_4 = -\frac{2a-b}{3} - \frac{a+b}{3}\rho$$

$$A_5 \ldots \sigma_5 = \frac{2b-a}{3} + \frac{b-2a}{3}\rho$$

$$A_6 \ldots \sigma_6 = \frac{a+b}{3} + \frac{2b-a}{3}\rho$$

Вершины шестиугольника могут быть целыми точками лишь в том случае, когда

$$a+b \equiv 0 \ (Mod.\ 3)$$

то-есть, когда число m делится на $1-\rho$.

Область S есть действительно основная область.

Целые точки на сторонах $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ соответственно эквивалентны целым точкам на сторонах $A_4 A_5$, $A_5 A_6$, $A_6 A_1$. Вершины A_1, A_3, A_5, и вершины A_2, A_4, A_6 эквивалентны. Число целых точек основной области равно

$$N(a+b\rho) = a^2 - ab + b^2.$$

Предположим, что число m не делится на $1-\rho$. Вершины области S не могут быть целыми точками. Из симметрии области видно, что число точек, по уменьшении на единицу, разделится на три.

Предположим основную область взятой как-либо иначе. Число целых точек области не зависит от выбора области и по удалении точки, эквивалентной точке O, целые точки основной области могут быть разбиты на три класса.

При разбиении надлежит руководствоваться правилом. Если к первому классу отнесена точка α, то ко второму и третьему следует отнести соответственные точки, эквивалентные $\alpha\rho$ и $\alpha\rho^2$.

Известно, что, пользуясь этим правилом, действительно возможно достичь разбиения области на классы.

Разбиение области на классы можно производить различно. В дальнейшем мы встретимся с различными способами разбиения. Сейчас же ограничимся двумя примерами.

Способ 1-й.

Примем за основную область целые точки шестиугольника S. К первому классу отнесем целые точки внутри треугольников OA_1A_2, OA_4A_5 и целые точки по линиям A_1A_4, A_1A_2; ко второму — целые точки внутри треугольников OA_3A_4, OA_6A_1 и на линиях A_3A_6, A_3A_4; к третьему — целые точки внутри треугольников OA_3A_4, OA_6A_1 и на линиях A_2A_5, A_3A_2. Точка O исключается.

Можно производить разбиение иначе.

Способ 2-й.

К первому классу принадлежат целые точки внутри ромба $OA_1A_2A_3$ и на линиях OA_1, A_1A_2; ко второму—целые точки внутри ромба $OA_3A_4A_5$ и на линиях OA_3, A_3A_4; к третьему—целые точки внутри ромба $OA_5A_6A_1$ и на линиях OA_5, A_5A_6. И тем, и другим разбиением будем пользоваться в дальнейшем.

§ 2.

Рассмотрим одновременно с числом $m = a + b\rho$ *) взаимно-простое с ним число $n = c + d\rho$. Составим двумя какими-либо способами основные системы чисел A и B по модулю m и произведем разбиение чисел этих систем на классы.

$$A\begin{cases}\alpha_1, & \alpha_2 & \ldots\alpha_\mu \\ \alpha_{\mu+1}, & \alpha_{\mu+2}, & \ldots\alpha_{2\mu} \\ \alpha_{2\mu+1}, & \alpha_{2\mu+2}, & \ldots\alpha_{3\mu}\end{cases},\ \alpha_0=0 \qquad B\begin{cases}\beta_1, & \beta_2, & \ldots\beta_\mu \\ \beta_{\mu+1}, & \beta_{\mu+2}, & \ldots\beta_{2\mu} \\ \beta_{2\mu+1}, & \beta_{2\mu+2}, & \ldots\beta_{3\mu}\end{cases}\ \beta_0=0$$

$$\alpha_{\mu+\varkappa} \equiv \alpha_\varkappa\rho; \qquad \beta_{\mu+\varkappa} \equiv \beta_\varkappa\rho;$$

$$\alpha_{2\mu+\varkappa} \equiv \alpha_\varkappa\rho^2\ (Mod.\ m) \qquad \beta_{2\mu+\varkappa} \equiv \beta_\varkappa\rho^2\ (Mod.\ m)$$

$$\mu = \frac{1}{3}\Big(N(m) - 1\Big).$$

Образуем произведения

$$(*)\qquad n\alpha_1,\ n\alpha_2,\ldots n\alpha_\mu.$$

Обозначим через σ, σ' и σ'' число чисел в ряду (*), сравнимых с числами первого, второго и третьего класса системы B.

Число $0.\sigma + 1.\sigma' + 2\sigma''$ назовем обобщенным кубическим децедентом числа n по отношению к числу m, соответствующим системам A и B, и будем обозначать

$$D_{(A,\ B)}(n,\ m) = 0\ .\ \sigma + 1\ .\ \sigma' + 2\sigma'' \quad \sigma' - \sigma''\ (Mod.\ 3).$$

---

*) Число m предполагается неделящимся на $1 - \rho$.

Может случиться, что система A в точности совпадает с системой B, т. е. основные системы A и B и способы разбиения их на классы одинаковы. В этом случае согласимся писать короче

$$D_{(A,\ B)}\ (n,\ m) = D_A\ (n,\ m)$$

и обобщенный децедент называть просто кубическим децедентом числа n по отношению к числу m, соответствующим системе A или при основании A. Числа m и n будем иногда называть, для краткости, членами децедента.

Рассмотрим три системы разбиения основных чисел на классы, взятые только что A, B и Γ.

$$\Gamma \left|\begin{matrix} \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots \gamma_\mu \\ \gamma_{\mu+1}, & \gamma_{\mu+2}, & \ldots \gamma_{2\mu} \\ \gamma_{2\mu+1}, & \gamma_{2\mu+2} & \ldots \gamma_{3\mu} \end{matrix}\right| \quad \gamma_0 = 0 \quad \begin{matrix} \gamma_{\mu+\varkappa} \equiv \gamma_\varkappa \rho \\ \gamma_{2\mu+\varkappa} \equiv \gamma_\varkappa \rho^2 \end{matrix} \ (Mod.\ m).$$

Пусть π' из чисел $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\mu$ первого класса системы B сравнимо с числами второго класса системы A по модулю m и π'' из них сравнимо с числами третьего класса системы A по модулю m. Пусть ω' и ω'' обозначают число чисел первого класса системы Γ, сравнимых соответственно с числами второго и третьего класса системы A по модулю m.

Введем, наконец, разности

$$\pi = \pi' - \pi''; \quad \omega = \omega' - \omega''.$$

Относительно обобщенного кубического децедента легко показать теорему.

Теорема 1.

(1) $$D_A\ (n,\ m) \equiv D_{(B,\ \Gamma)}\ (n,\ m) - \pi + \omega\ (Mod.\ 3)$$

Из этой теоремы, как следствие, вытекает предложение.

Теорема 2. Кубический децедент не зависит от выбора основания

(2) $$D_A\ (n,\ m) \equiv D_B\ (n,\ m)\ (Mod.\ 3)$$

Действительно, полагая систему Γ тождественной с B, имеем

$$D_{(B,\ \Gamma)}\ (n,\ m) = D_{(B)}\ (n,\ m)$$
$$\pi = \omega.$$

Из сравнения (1) следует сравнение (5).

В силу этой теоремы будем обозначать кубический децедент просто

$$D\ (n,\ m),$$

без указания основания.

Кубический децедент определяет кубический характер числа n по отношению к m, в случае, когда m есть число простое, что видно из сравнения

$$n^{\mu} \equiv \rho^{D\,(n,\ m)}\ (Mod.\, m)\ ^{*}),$$

вытекающего непосредственно из определения децедента (Лемма Gauss'a).

§ 3.

Отметим основные свойства кубического децедента, *доказательство* которых не представляет труда и является прямым следствием понятия о децеденте.

Теорема 3. Если числа l и n суть числа взаимно-простые с m, то

$$D\ (ln,\ m) \equiv D\ (l,\ m) + D\ (n,\ m)\ (Mod.\, 3)$$

Теорема 4. Если l и m суть числа взаимно-простые с n, то

$$D\ (n,\ ml) \equiv D\ (n,\ l) + D\ (n,\ m)\ (Mod.\, 3).$$

Теорема 5. Если числа m и $\overline{m}$, n и $\overline{n}$ суть числа попарно комплексные сопряженные и число m взаимно-просто с n, то

$$D\ (n,\ m) + D\ (\overline{n},\ \overline{m}) \equiv 0\ (Mod.\, 3).$$

§ 4.

Рассмотрим простейшие случаи, в которых определение децедента не представляет ни малейшего затруднения.

Теорема 6.

$$D\ (-1,\ m) \equiv 0\ (Mod.\, 3).$$

Разобьем область основного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (черт. 1) на классы, приняв за область первого класса область треугольников OA_1A_2, OA_4A_5, как было показано ранее (§ 1).

Умножим числа первого класса на -1.

Умножению чисел на -1 соответствует поворот на угол π вокруг точки O целых точек, их изображающих. Целые точки треугольника OA_1A_2 перейдут при этом в целые точки треугольника OA_4A_5 и обратно; целые точки линии OA_1 — в целые точки линии OA_4 и обратно; целые точки линии A_1A_2 в целые точки линии A_4A_5 эквивалентные точкам A_1A_2.

Все сказанное приводит к заключению

$$D\ (-1,\ m) \equiv 0\ (Mod.\, 3). \tag{3}$$

Теорема 7.

$$D\ (\rho,\ m) \equiv \frac{1}{3}\Big(N\ (m) - 1\Big)\ (Mod.\, 3).$$

---

*) Bachmann P. Die Lehre von der Kreistheilung s. 191.

Возьмем то же разбиение основной области шестиугольника на классы, что и в предыдущем случае.

Помножим числа первого класса на ρ.

Умножению числа на ρ соответствует вращение изображающей его точки на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг точки O.

При таком повороте целые точки первого класса перейдут в соответствующие целые точки второго.

Отсюда следует, что

$$D(\rho,\ m) \equiv \frac{1}{3}\Big(N(m) - 1\Big)\ (Mod.\ 3). \tag{4}$$

Теорема 8.

$$D(1-\rho,\ q) \equiv \begin{cases} \frac{2}{3}(q+1) & q \equiv -1 \\ & (Mod.\ 3) \\ \frac{1}{3}(q-1) & q \equiv +1 \end{cases} \quad (Mod.\ 3)$$

где q — число вещественное.

Примем прежнее разбиение области на классы.

Принимая в расчет геометрические преобразования, соответствующие умножению на $1-\rho$, нетрудно понять, какие целые точки треугольников OA_1A_2, OA_4A_5 перейдут по умножении на $1-\rho$ в точки 1, 2 и 3 классов. Распределение точек треугольников на категории видно из приложенного чертежа (черт. 2), где цифрами 1, 2, 3 отмечены те области, а знаками I, II, III те линии, целые точки которых перейдут по умножению на $1-\rho$ в соответствующие целые точки 1, 2, 3 классов. Заметим теперь, что число целых точек внутри треугольника A_4A_5C' равно числу целых точек внутри треугольника $A_2B'A_1$, и что число целых точек, принадлежащих треугольникам A_1CO, $A_1C'O$, равны между собою. Целые точки линий OC и OC' не принадлежат этим треугольникам.

Отметим, наконец, что число целых точек внутри и на стороне OB ромба OBA_1C (точка O исключена) вдвое больше числа точек, принадлежащих треугольнику OA_1C, как то следует из симметрии точечной сети относительно линии OA_1.

Обозначим число целых точек, принадлежащих ромбу OBA_1C, через σ и число точек, принадлежащих ромбу $A_1B'A_2C$, через σ'.

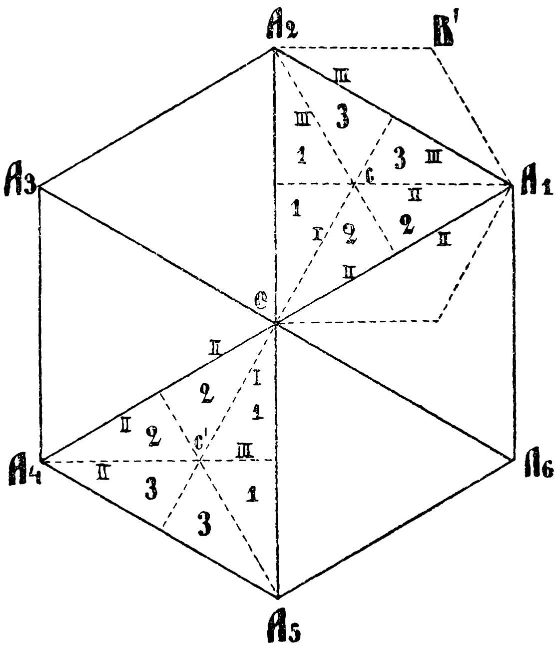
$$D(1-\rho,\ q) \equiv \sigma - \sigma'\ (Mod.\ 3). \tag{5}$$

Числа σ и σ' легко могут быть подсчитаны и подсчет приводит к высказанной теореме.

Теорема 9. Если p и q суть одночленные, вещественные, взаимно-простые числа, то

$$D(p,\ q) \equiv 0\ (Mod.\ 3),$$

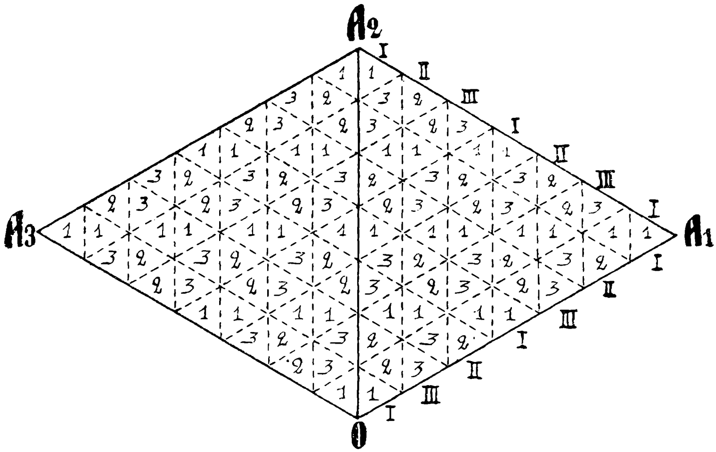
Разобьем область основного шестиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ на классы вторым из способов, указанных в параграфе первом.



Черт. 2.

Отметим особенность, свойственную основной области, соответствующей вещественному числу. Целые точки сети расположены симметрично относительно линий OA_1, $OA_2 \ldots \ldots OA_6$ и относительно прямых, проведенных из O перпендикулярно к сторонам шестиугольника (черт. 3). Определим теперь, какие целые точки первого класса по умножении на число p дадут точки, принадлежащие первому, второму и третьему классу соответственно по модулю q. Так как умножению точек области $OA_1 A_2 A_3$ на вещественное число p соответствует увеличение области в p раз, то не трудно понять, что разбиением основной области $OA_1 A_2 A_3$ на треугольники с помощью линий, параллельных линиям OA_1, OA_2, OA_3 и проходящих через точки, делящие отрезки OA_1, OA_2, OA_3 на p равных частей, достигается распределение целых точек первого класса по модулю q на категории, дающие при умножении на p точки одного и того же класса. Целые точки, лежащие внутри каждого из таких треугольников, при умножении на ρ дают целые точки одного и того же класса. Номер класса, в который перейдет целая точка по умножении на p, уменьшенный на единицу, назовем характером точки по отношению к числу p.

Нетрудно убедиться, что на сторонах отдельных треугольников внутри OA_1A_2 и OA_2A_3 нет целых точек.



Черт. 3.

На чертеже 3 характер целых точек внутри треугольников заключенных отмечен цифрами 1, 2, 3. Эти цифры указывают тот класс, к которому будут принадлежать соответствующие точки по умножении на p. Характер целых точек на линиях OA_1, OA_2, A_2A_3 отмечен цифрами I, II, III.

Внимательное изучение характера точек в отдельных областях позволяет сделать заключение

$$D(p, q) \equiv 0 \ (Mod.\ 3). \tag{6}$$

II.

Об изменении членов кубического децедента.

§ 5.

Из определения децедента непосредственно видно, что

$$D(n + \lambda m,\ m) \equiv D(n,\ m) \ (Mod.\ 3)\ ^{*}). \tag{7}$$

Величина децедента по модулю 3 не изменяется при изменении первого члена децедента на число, кратное второму.

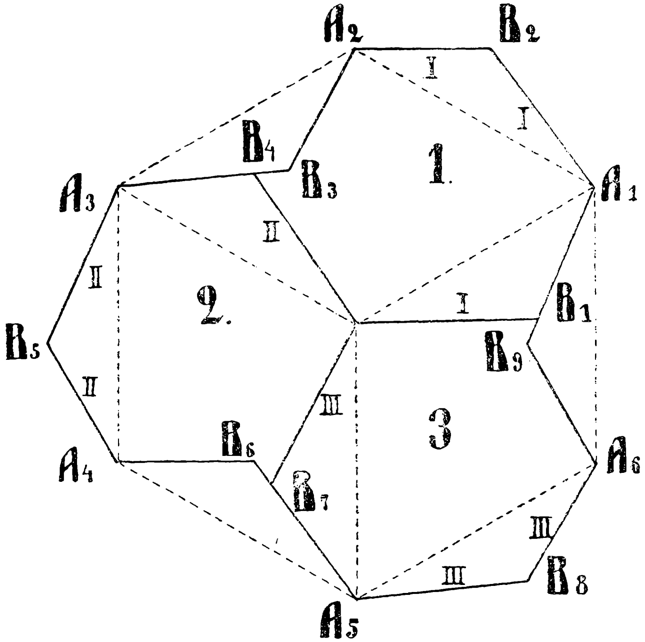
---

*) Числа n и m предполагаются не делящимися на $1 - \rho$.

Весьма важным представляется рассмотреть вопрос об изменении децедента при изменении второго числа m на кратное первого.

Начнем с одного вспомогательного предложения. При этом для большей наглядности предположим, что число $n = c + d\rho$ удовлетворяет условиям $O < 2d < c$.

Условие это по существу не имеет значения, ибо все дальнейшие рассуждения сохраняют силу и в более общих предположениях и ставятся лишь в целях достижения наибольшей ясности изложения в его геометрической части. За основную



Черт. 4.

область, соответствующую числу m, примем область шестиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ и разобьем ее на классы вторым из указанных способов (черт. 4). Заменим теперь эту основную область областью S, ограниченной ломаной линией $A_1 B_2 A_2 B_3 A_3 B_5 A_4 B_6 A_5 B_8 A_6 B_9$.

Область получается из области шестиугольника прибавлением треугольников $A_1 B_3 A_2$, $A_3 B_5 A_4$, $A_5 B_8 A_6$ и удалением треугольников $A_2 B_3 A_3$, $A_4 B_6 A_5$, $A_6 B_9 A_1$. Все эти треугольники равны между собой. Их определение будет дано дальше.

Целые точки линий $A_1 B_2$, $A_2 B_2$, $A_3 B_5$, $B_5 A_4$, $A_5 B_8$, $B_8 A_6$ причислим к целым точкам области S и будем говорить, что они ей принадлежат.

Область S разбиваем на три класса, проводя линии OB_1, OB_2, OB_7, так, чтобы треугольники OB_1A_1, OB_4A_3, OB_7A_5 были равны треугольнику $A_1B_2A_2$. За область целых точек первого класса примем область $OB_1A_1B_2B_3B_4O$, относя к ней и целые точки на линиях OB_1, A_1B_2, A_2B_2; за область второго класса примем область $OB_4A_3B_5A_4B_6B_7O$, относя к ней целые точки линий OB_4, A_3B_5, B_5A_4; наконец за область третьего класса примем область $OB_7B_5B_8A_6B_9B_1O$, причисляя к ней целые точки линий OB_7, A_5B_8, B_8A_6.

Обозначим первое разбиение через A, второе буквой B.

Пусть s обозначает число целых точек треугольника OB_1A_1, t—число целых точек треугольника $A_1B_2A_2$. Из целых точек, расположенных на периметрах треугольников, к первому относятся целые точки линии OB_1, ко второму—целые точки линий A_1B_2 и A_2B_2.

В силу теоремы 1 имеем:

$$D(n,\ m) \equiv D_{(B,\ A)}(n, m) - t + s\,(Mod.\ 3). \tag{8}$$

Определим теперь треугольники, с помощью коих мы видоизменим область шестиугольника, так чтобы вычисление $D_{(B,\ A)}(n,\ m)$ можно было бы произвести возможно проще. С этой целью, остановившись на треугольнике OBA_1, выберем вершину B_1 треугольника OB_1A_1 в точке B_1, соответствующей числу

$$\frac{c-d}{n}\left(\frac{2a-b}{3} + \frac{a+b}{3}\rho\right).$$

Нетрудно понять, что при таком определении треугольников вычисление $D_{(B,\ A)}(n,\ m)$ сводится к разделению области первого класса разбиения B на треугольники путем проведения прямых, параллельных OB_1, OB_4, A_1B_1, через точки деления линий OB_1, OB_4, A_1B_2 на $c-d$ равных частей и через точки деления линий A_1B_1, A_2B_2, A_2B_3 на d равных частей. Точки каждого из таких треугольников имеют одинаковый характер.

Обозначим общее число получившихся при таком разделении треугольников через N *).

Перенумеруем треугольники в каком-либо порядке и назовем число целых точек в $\varkappa$—ом треугольнике через $\sigma_\varkappa$, а их общий характер через $\lambda_\varkappa$.

$$D_{(B,\ A)}(n,\ m) = \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda_\varkappa\,\sigma_\varkappa. \tag{9}$$

Возьмем вместо m какое-либо другое число $m' = a' + b'\rho$.

---

*) Нетрудно убедиться, что $N = 2\,(c^2 - cd + d^2)$.

Произведем замену основного шестиугольника, скажем $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$, ему отвечающею областью S', выводя ее совершенно также из области шестиугольника $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$, как область S была выведена из области шестиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$. Новая область S' отличается от области S. только величиной и положением, сохраняя ту же самую форму Разобьем область S' на классы таким же образом, каким была разбита область S. Обозначим первое и второе разбиение чисел по модулю m' на классы буквами A' и B'. Пусть s' и t' обозначают числа, аналогичные s и t в отношении m'. Имеем сравнение.

$$(10)\qquad D\,(n,\ m') \equiv D_{(B',\,A'}\,(n,\ m') + s' - t'\ (Mod\ 3).$$

Для определения $D_{(B'\,A')}\,(n,\ m')$ надлежит разделить область целых точек первого класса разбиения B' на треугольники таким же образом, как это было сделано по отношению к числу m.

Так как форма области остается в обоих случаях одинаковой и разбиение на треугольники производится одним и тем же способом, то ясно, что число треугольников получится одно и то же. Перенумеруем во втором случае треугольники в том же порядке, что и в первом, и обозначим через $\sigma'_\varkappa$ и $\lambda'_\varkappa$ числа, аналогичные $\sigma_\varkappa$ и $\lambda_\varkappa$.

$$D_{(B',\,A')}\,(n,\ m') = \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda'_\varkappa\,\sigma'_\varkappa.$$

Из сказанного относительно разбиения B и B' следует, что

$$(11)\qquad \lambda'_\varkappa = \lambda_\varkappa$$

Это равенство нам будет нужно далее.

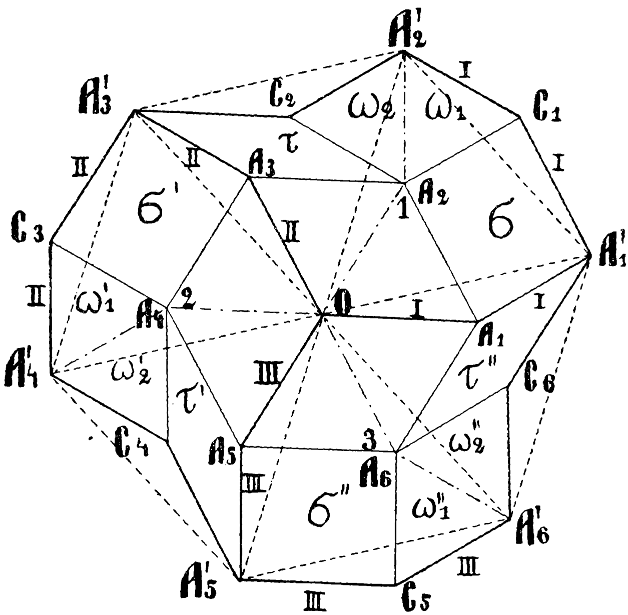
§ 6.

Положим теперь, что мы пожелали бы сравнить между собой величины $D\,(n,\ m')$ и $D\,(n,\ m)$. Для решения этого вопроса, оставляя пока в стороне оценку разностей $\Delta = s' - s$, $\Delta' = t' - t$ надлежит прежде всего сравнить деценденты $D_{(B,\,A)}\,(n,\ m)$, $D_{(B',\,A')}(n,\ m')$.

Чтобы легче сравнить эти величины, изменим прежде всего разбиение A', Область шестиугольника $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$ заменим областью T (черт. 5). Область T получается из области $A_1'\,A_2'\,A_3'\,A_4'\,A_5'\,A_6'$ присоединением треугольников $A_1'\,C_1\,A_2'$, $A_3'C_3\,A_4'$, $A_5'C_5\,A_6'$ и удалением треугольников $A_2'C_2\,A'_3$, $A_4'C_4\,A_5'$. $A_6'\,C_6\,A'_1$.

Все эти треугольники равны между собой. Определение треугольников будет дано далее. Целые точки линий $A_1' C_1$, $A_2' C_1$, $A_3' C_3$, $C_3 A'_1$, $A_5' C_5$, $C_5 A'_6$ причисляем к области T. Область T разбиваем на три части линиями $OA_1 A_1'$, $OA_3 A_3'$, $OA_5 A_5'$.

Треугольники $OA_1 A_1'$, $OA_3 A_3'$, $OA_5 A_5'$ равны между собой и равны треугольникам, введенным выше. Целые точки линий OA_1, $A_1A_1' A'_1C_1$, C_1A_2' относятся к области $OA_1A_1'C_1A_2'C_2A_3'A_3O$,



Черт. 5.

которую примем за область первого класса. За область второго класса примем область $OA_3 A_3' C_3 A'_4 C_4 A_5' A_5O$, относя к ней целые точки линий $OA_3, A_3 A'_3$, $A_3' C_3$, $C_3 A_4'$. За область третьего класса примем область $OA_5 A_5' C_5 A_6' C_6 A_1' A_1O$, причисляя к ней целые точки линий OA_5, $A_5 A_5'$, $A_5 'C_5$, $C'_5 A'_6$.

Определим теперь введенные нами треугольники так, чтобы сравнение $D_{(B,\ A)}\ (n,\ m)$, $D_{(B',\ A')}\ (n,\ m')$ было бы по возможности просто, Останавливаясь на треугольнике $OA_1 A_1'$, выберем его вершину в точке A_1, соответствующей вершине основного шестиугольника для числа m. Вершины треугольника $OA_1 A_1'$ определяются числами

$$,\ \frac{m\ (2+\rho)}{3} = \frac{2a-b}{3} + \frac{a+b}{3}\rho\ ,$$

$$,\ \frac{m'(2+\rho)}{3} = \frac{2a'-b'}{3} + \frac{a'+b'}{3}\ .$$

Ограничимся, чтобы быть ближе к чертежу, предположением, что число $(m' - m) : m = u + v\rho$ удовлетворяет условию $0 \leqq v \leqq u$, т.-е. что линия $A_1 A_1'$ образует с OA_1 угол, меньший $\frac{\pi}{3}$.

Обозначим через σ число целых точек в треугольнике $OA_1 A_1'$, относя к целым точкам треугольника целые точки на линиях OA_1, $A_1 A_1'$.

Через τ обозначим число целых точек в треугольнике $A_1' C_1 A_2'$, причисляя к целым точкам треугольника целые точки на линиях $A_1' C_1$, $C_1 A_2'$. С этими числами мы встретимся далее. Введенное разбиение отметим буквой C. На чертеже 5 области первого, второго и третьего классов отмечены цифрами 1, 2 и 3. Пограничные линии отмечены цифрами I, II, III, сообразно тому, к какому классу относятся целые точки этих линий.

Область T может быть разбита на ряд областей: с одной стороны, область шестиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$, а с другой, области параллелограммов $A_1 A_1' C_1 A_2$, $A_3 A_3' C_3 A_4$, $A_5 A_5' C_6 A_6$, $A_2 C_2 A_3' A_3$, $A_4 C_4 A_5' A_5$, $A_6 C_6 A_1' A_1$ и области ромбов $A_2 C_1 A_2' C_2$, $A_4 C_3 A_4' C_4$, $A_6 C_5 A_6' C_6$ каждая из которых может быть разбита на два равносторонних треугольника.

Обозначим области параллелограммов соответственно σ, σ', σ'', τ, τ', τ'' и области треугольников через ω_1, ω_2; ω_1', ω_2'; ω_1'' ω_2''.

Целые точки пограничных линий распределим следующим образом.

Целые точки линий $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$ отнесем к шестиугольнику $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$. Целые точки линий $A_1 A'_1$, $A_1' C_1$ отнесем к области σ; целые точки линий $A_3' A_3$, $A_3 A_2$ отнесем к области τ; целые точки линий $A_2 A_2'$ $A_2 C_1$ $C_1 A_2'$ отнесем к треугольнику ω_1, и целые точки линии $C_2 A_2$—к треугольнику ω_2 Совершенно аналогичным образом распределим целые точки пограничных линий между прочими областями, на которые распадаются области 2-го и 3-го классов разбиения C.

При определении $D_{(B', A')}(m, n')$ нам приходилось покрывать область первого класса разбиения B' рядом треугольников (§ 5).

Совершенно очевидно, что при замене области шестиугольника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ областью T роль треугольников $OA_1 A_2$, $OA_2 A_3$, $OA_3 A_4$, $OA_4 A_5$, $OA_5 A_6$, $OA_6 A_1$ будут играть фигуры $OA_1 A_1' C_1 A_2 A_2' O$, $OA_2 A'_2 C_2 A_3' A_3 O$, $OA_3 A_3' C_3 A'_4 A_4 O$, $OA_4 A_4' C_4 A'_5 A_5 O$, $OA_5 A_5' C_5 A_6' A_6 O$, $OA_6 A_6' C_6 A_1' A_1 O$.

Заметим, что иногда, именно в том случае, когда соответствующая фигура попадет на границу области, может оказаться, что целые точки линий $A_1' C_1$, $A_3' C_3$, $A_5' C_5$ не должны быть принимаемы в расчет. В этом случае точки линий $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$ будем относить не к треугольникам $OA_1 A_2$, $OA_3 A_4$, $OA_5 A_6$, а к параллелограммам σ, σ', σ''.

Для определения $D_{(B_1', A')}(n, m')$ надлежало разбить область первого класса разбиения B' на треугольники показанным в предыдущем параграфе способом. При разбиении C роль треугольников будут играть указанные только что области. Ими следует заменить каждый из треугольников, покрывающих область первого класса разбиения B'. Число этих областей будет то же, что и число треугольников N. Присвоим им те же номера, что и треугольникам, которые они заменили. Число целых точек $\varkappa$—ой области назовем через $\psi_\varkappa$. Характер точек области равен характеру точек треугольника, а именно $\lambda'_\varkappa$. $\varkappa$—ая область состоит из двух треугольников и параллелограмма. Число целых точек параллелограмма обозначим через $\alpha_\varkappa$, число целых точек треугольника, соответствующего одному из треугольников ω, через $\beta_\varkappa$ и число целых точек треугольника, соответствующего одному из треугольников $OA_i\, A_{i+1}$, через γ_x.

$$\psi_\varkappa = \gamma_\varkappa + \alpha_\varkappa + \beta_\varkappa.$$

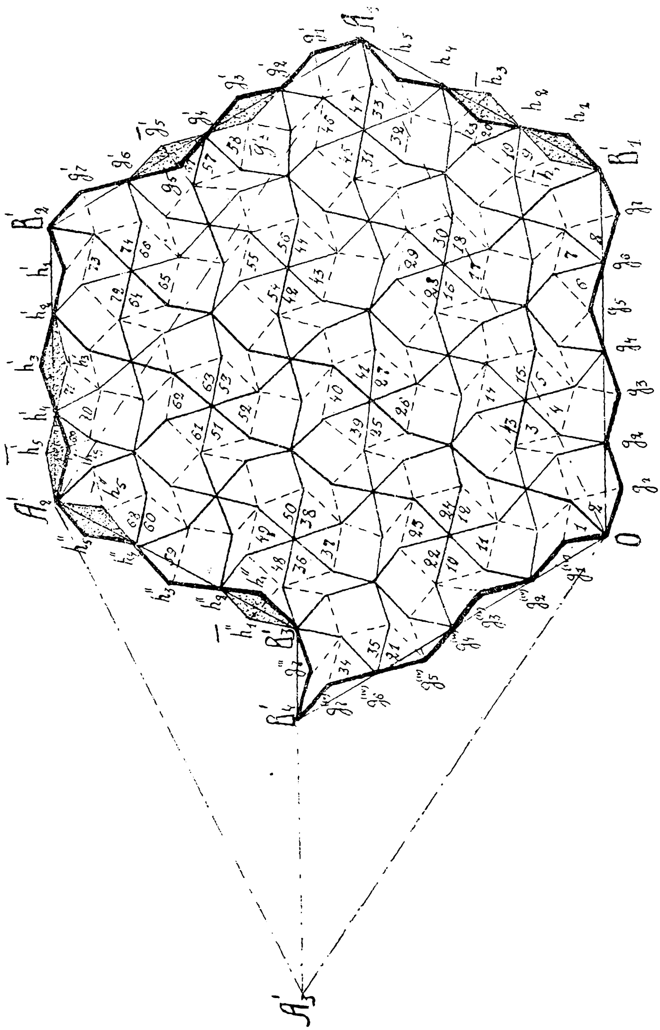
Заметим теперь, что замена разбиения A' разбиением C требует изменения разбиения B'. В самом деле, покрывая область первого класса разбиения B' вместо треугольников заменяющими их областями, мы не покроем всей области целиком, ибо границы покрывающих областей не совпадут с границами покрываемой. Чтобы посколько возможно достичь последнего, заменим разбиение B' новым D. Область первого класса разбиения D получается из области первого класса разбиения B' заменой прямолинейных участков границ соответствующими ломаными линиями (черт. 6)

$$\ldots O g_1 g_2 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1', B'_1 h_1\ h_2 \ldots h_{2d-1}\ A_1,$$
$$\ldots A_1' g_1' g_2' \ldots\ g'_{2(c-d)-1}\ B_2',$$
$$B_2'\ h_1'\ h_2' \ldots h'_{2d-1}\ A_2',\ A_2'\ h''_{2d-1}\ h''_{2d-2} \ldots h_1''\ B_3'$$
$$\ldots B_3' g'''_{2(c-d)-1}\ g'''_{2(c-d)-2} \ldots g'''_{2d+2}\ B_4',$$
$$B_4'\ g^{(\mathrm{IV})}_{2(c-d)-1}\ g^{(\mathrm{IV})}_{2(c-d)-2} \ldots g_1^{(\mathrm{IV})}\ 0.$$

Целые точки линий $Og_1\ g_2 \ldots g_{2(c-d)-1}\ B_1',\ A_1'\ g_1'\ g_2' \ldots g'_{2(c-d)-1}\ B_2',\ B_2'\ h_1 \ldots h_{2d-1}\ A_2$ относим к области первого класса нового разбиения. Области второго и третьего класса разбиения D получаются из области первого класса вращением на угол $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ соответственно вокруг точки O.

За линию $Og_1 g_2 \ldots g_{2(c-d)-1}\ B_1'$ примем линию, ограничивающую крайние области, заменившие треугольники, прилегающие к OB_1'.

Линии $A_1' g_1' \dots g'_{2(c-d)-1} B_2'$, $O g_1^{(\mathrm{IV})} \dots g^{(\mathrm{IV})}_{2(c-d)-1} B_4'$ выбираем конгруэнтными линии $O g_1 g_2 \dots g_{2(c-d)-1} B_1'$. Линию $B_3' g'''_{2(c-d)-1} \dots g'''_{2d+2} B_4'$ берем конгруэнтной $B_1' g_{2(c-d)-1} \dots$ $\dots g_{2d+1}$. Линии $B'_1 h_1 h_2 \dots h_{2d-1} A_1'$, $B_2' h_1' h_2' \dots h'_{2d-1} A'_2$,



Черт. 6.

$B_3' h_1'' \dots h''_{2d-1} A_2'$ выбираем конгруэнтными линии $g_{2d}\, g_{2d-1} \dots$ $\dots g_1 O$. Не трудно убедиться, что при таком выборе границ область, построенная указанным способом, есть действительно основная. Ее можно получить из шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, прибавляя к нему и отнимая от него области, конгруэнтные области $Og_1 g_2 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1' h_1 \ldots h_{2d-1} A_1' O$ совершенно так же, как основная область разбиения B' получалась из того же шестиугольника отнятием и прибавлением треугольников, конгруэнтных $OB_1' A_1$. Обозначим при этом число целых точек области $Og_1 g_2 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1' h_1 \ldots h_{2d-1} A'_1, O$ через S и число целых точек области $A_1' g_1' \ldots g'_{2(c-d)-1} B_2' h_1' \ldots$ $\ldots h'_{2d-1} A_2' A_1'$ через T. Целые точки линии $Og_1 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1'$ относятся к первой. Целые точки линий $A_1' g_1' \ldots g'_{2(c-d)-1} B_2'$, $B_2' h_1' \ldots h'_{2d-1} A_2'$ относятся ко второй области. На чертеже 6, соответствующем $n = 7 + 3\rho$, границы области первого класса разбиения B' отмечены сплошной тонкой линией, границы области первого класса разбиения D толстой линией.

Линии средней толщины обозначают границы отдельных областей, на которые распадается рассматриваемая область, если ее разбивать на части с помощью областей, подобных областям, заменившим треугольники в разбиении C. Целые точки каждой из таких областей имеют одинаковый характер. Каждая из областей, заполняющих область

$$Og_1 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1' h_1 \ldots h_{2d-1} A_1' g_1' \ldots g'_{2(c-d)-1} B_2' h_1' \ldots$$
$$\ldots h'_{2d-1} A_2' h''_{2d-1} \ldots B_3' g'''_{2(c-d)-1} \ldots B_4' g^{(\mathrm{IV})}_{2(c-d)-1} \ldots O,$$

разбита на частные области линиями пунктирными и отмечена особым номером.

Отметим теперь важное обстоятельство, что построенная нами граница Г:

$$Og_1 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1' h_1 \ldots h_{2d-1} A_1' g_1' \ldots g'_{2(c-d)-1} B_2' h_1' \ldots$$
$$\ldots h'_{2d-1} A_2' h''_{2d-1} \ldots h_1'' B_3' g'''_{2(c-d)-1} B_4' g^{(\mathrm{IV})}_{2(c-d)-1} \ldots O,$$

не совпадает, вообще говоря, с линией, ограничивающей области, на которые разбита область первого класса разбиения D. Назовем эту последнюю линию Г':

$$O\bar{g}_1 \ldots \bar{g}_{2(c-d)-1} B_1' \bar{h}_1 \ldots \bar{h}_{2d-1} A_1' \bar{g}_1' \ldots \bar{g}'_{2(c-d)-1} B_2' \bar{h}_1' \ldots$$
$$\ldots \bar{h}'_{2d-1} A_2' \bar{h}''_{2d-1} \ldots \bar{h}_1'' B_3' \bar{g}'''_{2(c-d)-1} \ldots$$
$$\ldots \bar{g}_1''' B_4' \bar{g}^{(\mathrm{IV})}_{2(c-d)-1} \ldots O.$$

Внимательное рассмотрение обеих линий Г и Г' показывает, что вершины с четными значками совпадают. Вершины же с нечетными указателями могут и не совпадать. Если две вершины с одинаковыми нечетными указателями не совпадают, скажем, для примера g'_{2s+1} не совпадает с $\bar{g}'_{2s+1}$, то между обеими линиями будет заключаться фигура параллелограмматической формы $g'_{2s}\, g'_{2s+1}\, g'_{2s+2}\, \bar{g}'_{2s+1}$, при чем одна пара сторон непременно равна по величине отрезку $g_1 g_2$. В сказанном нетрудно убедиться, рассматривая характер граничных линий основной области разбиения C и ее частей. Области, заключенные между Γ и Γ', на чертеже 6 заштрихованы. Обозначим число таких параллелограмматических областей, лежащих внутри области, ограниченной Γ, через i и лежащих вне ее—через j *). Число целых точек и характер принадлежащих $\varkappa$—ой области первой категории обозначим через $\varepsilon_\varkappa$ и $\mu_\varkappa$, число целых точек, принадлежащих $\varkappa$—ой области второй категории—через $\eta_\varkappa$ и $\nu_\varkappa$. Целые точки пограничных линий параллелограмма будем причислять к параллелограмматической области по правилу: если целые точки на сторонах параллелограмма, принадлежащих Γ, относятся к основной области, то к параллелограмму причислим целые точки на сторонах, принадлежащих Γ'; если же целые точки на сторонах, принадлежащих Γ, не причисляются к основной области, то отнесем их к параллелограмму. Сказанное позволяет написать сравнение:

$$(12)\qquad D_{(D,C)}(n,\ m') \equiv \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda_\varkappa' \psi_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{i} \mu_\varkappa \varepsilon_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{j} \nu_\varkappa \eta_\varkappa \ (Mod.\ 3).$$

В силу теоремы 1 имеем

$$D(n,\ m') \equiv D_{(D,C)}(n, m') + S - T - \sigma + \tau \ (Mod.\ 3).$$

Сопоставляя это сравнение со сравнением (8), получаем

$$(13)\qquad D(n,\ m') - D(n,\ m) \equiv D_{(D,C)}(n,\ m') + \Delta - \Delta' \ (Mod.\ 3),$$

где для краткости положено

$$\Delta = S - s - \sigma,\ \Delta' = T - t - \tau.$$

Сравнение же (12) напишем подробнее так:

$$(14)\qquad D_{(D,C)}(n,\ m') \equiv \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda'_\varkappa \gamma_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda'_\varkappa \alpha_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda'_\varkappa \beta_\varkappa +$$
$$+ \sum_{\varkappa=1}^{i} \mu_\varkappa \varepsilon_\varkappa - \sum_{\varkappa=1}^{j} \nu_\varkappa \eta_\varkappa.$$

§ 7.

Изучим теперь более внимательно суммы, входящие в правую часть сравнения (14), предположив, что:

$$m' = m + 3\lambda(1 - \rho)\, n.$$

*) $i < 4c - 2d$; $j < 4c - 2d$.

Предварительно отметим два вспомогательных предложения.

Для краткости вектор, соединяющий начало с целой точкой, будем называть целым вектором. Если целое число, изображаемое целой точкой, делится на целое число $e+f\rho$, то будем говорить, что вектор делится на $e+f\rho$. Аналогично всякий отрезок, равный и параллельный целому вектору, будем называть целым отрезком, и коль скоро вектор делится на целое число $e+f\rho$, будем говорить, что отрезок делится на это число.

Лемма 1. Если одна из сторон параллелограмма $ABCD$ есть целый отрезок, делящийся на три, то число целых точек s, принадлежащих параллелограмму, делится на три, если целые точки AD причислять, а целые точки BC не причислять к параллелограмму.

Лемма 2. Число целых точек, принадлежащих треугольнику с целыми сторонами, вершины которого не суть целые точки, делится на три, если стороны делятся на три. Целые точки сторон по желанию можно причислять, а можно и не причислять к треугольнику.

Вернемся теперь к сравнению (20). Заметим прежде всего, что, предполагая целое число λ удовлетворяющим соотношениям

$$\lambda \cdot \frac{n(1-\rho)}{m} = u + v\rho, \quad 0 \leq v \leq u,$$

будем находиться в условиях случая, разобранного в предыдущем параграфе. Область первого класса разбиения D покрыта областями, получающимися из соответствующих областей разбиения C путем геометрического преобразования, соответствующего делению на число n, то-есть путем вращения вокруг точки O и путем гомотетического преобразования. Чтобы иметь возможность судить о преобразованной области, определим координаты вершин треугольника, получаемого из треугольника OA_1A_1' путем такого преобразования.

Эти вершины соответствуют числам

$$0, \frac{m(2+\rho)}{3n}, \frac{m(2+\rho)}{3n} + 3\lambda.$$

Сторона AA_1' соответствует 3λ. Таким образом все параллелограммы, входящие в состав преобразованной области, имеют одну из сторон целой. О ромбах или лучше о треугольниках, на которые они разделены, входящих в состав преобразованной области T, можно сказать, что они имеют целые стороны. Отметим еще, что вершины треугольников, на которые разбивается ромб, не суть целые точки. Принимая во внимание сказанное ранее о распределении целых точек, приходящихся на границах отдельных областей, можно написать:

$$\alpha_x \equiv 0 \ (Mod.\ 3) \quad \beta_x \equiv 0 \ (Mod.\ 3).$$

Таким же образом заключим, что

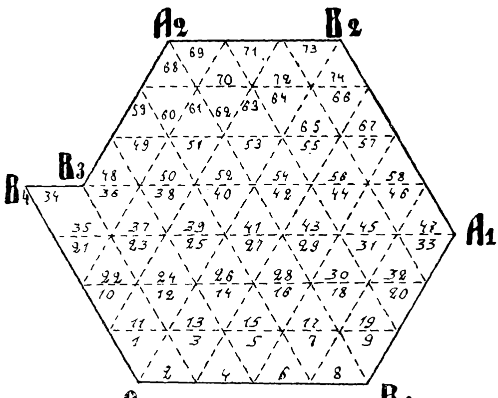
$$\varepsilon_{\chi} \equiv (Mod. 3), \eta_{\chi} \equiv 0 (Mod. 3),$$

приняв в соображение распределение целых точек на границах параллелограммов и то обстоятельство, что одна из сторон равна 3λ.

Сказанное позволяет представить сравнение (20) в виде:

$$D_{(D,C)}(n, m') \equiv \sum_{\chi=1}^{N} \lambda'_{\chi} \gamma_{\chi} (Mod. 3).$$

Разберем сумму, оставшуюся в правой части сравнения. Обратимся к чертежу 6 и произведем такую операцию. Удалим из χ-ой области параллелограмм α_{χ} и треугольник β_{χ} (параллелограммы и треугольник обозначены теми же буквами, что и число целых точек, им принадлежащих). Оставшиеся треугольники γ_{χ} сдвинем, перенося каждый из них на целый вектор так, чтобы они заполнили область $OB_1A_1B_2A_2B_3B_4O$ (черт. 7).



Черт. 7.

Эта область, как не трудно понять, есть область первого класса разбиения B по модулю m. Область разбита на треугольники линиями, параллельными линиям OB_1, OB_2, OB_4, проведенными через точки делений линий OB_1, OB_4, A_1B_2, на $c-d$ равных частей и через точки деления линий A_1B_1, A_2B_2, A_2B_3 на d равных частей и линии B_3B_4 на $c-2d$ равных частей (характер целых точек χ-ого треугольника равен λ'_{χ}). На чертеже 7 каждый из треугольников γ отмечен тем же номером, что и на чертеже 6.

Замечая, что

$$\gamma_\varkappa = \sigma_\varkappa, \quad \lambda'_\varkappa = \lambda_\varkappa,$$

где $\sigma_\varkappa$ и $\lambda_\varkappa$ имеют указанные выше (§ 5) значения, можно написать:

$$D_{(B,\,A)} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{N} \lambda'_\varkappa \gamma_\varkappa \ (Mod.\ 3).$$

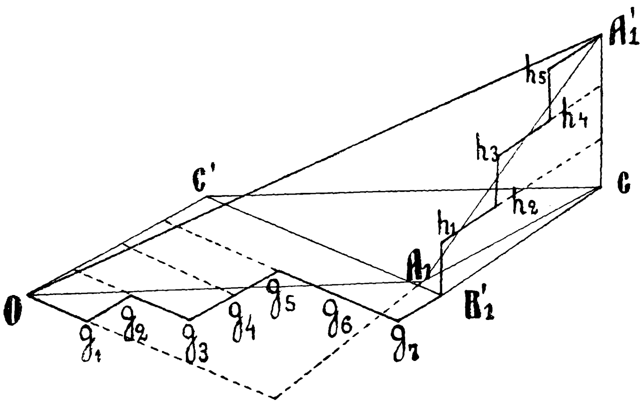
Последнее дает

15) $$D_{(D,\,C)}(n,\,m') \equiv D_{(B,\,A)}(n,\,m).$$

§ 8.

Перейдем к оценке величин, обозначенных нами через Δ и Δ'.

Рассмотрим сначала область $O g_1 g_2 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1' h_1 \ldots \ldots h_{2d-1} A_1' O$ (черт. 8).



Черт. 8.

Эту область можно разбить на части. Отметим на чертеже треугольник $O A_1 A_1'$ и треугольник $O A_1 B_1$ (§§ 5, 6). Переместим треугольник $A_1 O B_1$ параллельным перенесением в положение $C C' B_1'$. Точку A_1 соединим с C, точку C соединим с точкой A_1' и, наконец, точку C' соединим с O. Принимая в расчет числа, изображаемые точками B_1 и B_1':

$$\frac{c-d}{n} \cdot \frac{m(2+\rho)}{3} + 3(c-d)\lambda, \ \frac{c-d}{n} \cdot \frac{m(2+\rho)}{3},$$

легко видеть, что OC' есть целый вектор. Число целых точек треугольника $B_1' C C'$ равно числу целых точек треугольника $O B_1 A_1$. Вектор OC' равен $3\lambda\ (c-d)$, вектор $g_1 g_2$ равен 3λ.

Линия OC' параллельна $g_1 g_2$. Обозначим число целых точек области $Og_1 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1' C' O$ через ω, относя к ней и целые точки $Og_1 \ldots B_1'$. Вектор $A_1' h_{2d-1}$ образует с вектором Og_1 угол, равный $\frac{\pi}{3}$, и потому параллелен $B_1' C$. Число целых точек области $B_1' C A_1' h_{2d-1} \ldots h_1 B_1'$ обозначим через ω', причисляя к ней целые точки на линии A'_1, C. Число целых точек параллелограмма OA_1CC' обозначим через π, причисляя целые точки OA_1 и A_1C к параллелограмму. Число целых точек треугольника $A_1' A_1 C$ обозначим через π'. Сравнивая числа $\frac{m(2+\rho)}{3} + 2\lambda n$, $\frac{m(2+\rho)}{3} + 3(c-d)\lambda$, $\frac{m(2+\rho)}{3}$, соответствующие вершинам $A_1' C_1 A_1$, видим, что стороны треугольника $A_1' A_1 C$ целые и делятся на три.

Введенные в рассмотрение области сразу же позволяют написать равенство

(16) $$\Delta = S - \sigma - s = -\pi + \pi' + \omega - \omega'.$$

С помощью предложений, установленных ранее, имеем

$$\pi \equiv \pi' \equiv 0 \ (Mod.\ 3).$$

Легко убедиться, что

$$\omega \equiv \omega' \equiv 0 \ (Mod.\ 3).$$

В самом деле, разбивая область $Og_1 g_2 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1' C' O$ и область $B_1' C A_1' h_{2d-1} \ldots h_1 B_1'$ на параллелограммы, как показано на черт. 8, и приняв в расчет, что каждый из этих параллелограммов имеет одну из сторон, делящуюся на три, придем, в силу леммы I, к вышеупомянутому результату.

Таким образом имеем окончательно сравнение

(17) $$\Delta \equiv 0 \ (Mod.\ 3).$$

Заметим теперь, что равенство (16), выведено в предположении, что отдельные части, на которые разбита область $Og_1 \ldots g_{2(c-d)-1} B_1' h_1 \ldots h_{2d-1} A_1' O$, имеют расположение, указанное на черт. 8. Не трудно, однако, видеть, что оно справедливо и при ином взаимном расположении областей, стоит только условиться считать число целых точек, принадлежащих отдельным областям (названным выше), положительным в случае, когда при обходе контура области в направлении, указываемом последовательностью букв, коими отмечена область, область остается слева, и отрицательном—в противном случае.

Таким же образом убеждаемся, что

(18) $$\Delta' \equiv 0 \ (Mod.\ 3).$$

Сравнения (13), (15), (17), (18) приводят окончательно к результату

(19) $$D\left(n,\ m+3\lambda(1-\rho)n\right)\equiv D(n,m)\ (Mod.\ 3).$$

Теорема 10. Если числа n и m взаимно-простые, то децедент $D(n,m)$ не меняется от прибавления ко второму числу кратного первого числа, умноженного на $3(1-\rho)$.

При выводе сравнения (19) предполагалось, что число

$$\frac{3\lambda(1-\rho)n}{m}=u+v\rho$$

связано условием

(20) $$0\leqq v\leqq u.$$

Можно показать, что это условие не существенно.

Положим, что число

$$\frac{3\lambda(1-\rho)n}{m}=u+v\rho$$

удовлетворяет условию

(21) $$v\leqq 0\leqq u.$$

Положив для краткости

$$m'=m+3\lambda(1-\rho)n,$$

введем число

$$m''=m'+3m'\bar{n}(2+\rho)(s-t\rho^2)(1-\rho)n;\ \bar{n}\cdot n=N(n)_{(h)},$$

где s и t — положительные целые числа, и положим

$$\lambda''=m'n(2+\rho)(s-t\rho^2)$$

Число $\frac{3\lambda''(1-\rho)n}{m'}=9N(n)(s-t\rho^2)$ удовлетворяет условию (20), и потому имеет место сравнение

(22) $$D(n,\ m')\equiv D(n,\ m'')\ (Mod.\ 3).$$

Напишем теперь число m'' в виде

$$m''=m+3(\lambda+\lambda'')(1-\rho)n.$$

Не трудно убедиться, что при надлежащем выборе t и s число $\frac{3(\lambda+\lambda'')(1-\rho)n}{m}=u'+v'\rho$ удовлетворяет условию (20) и потому имеет место сравнение:

(23) $$D(n,\ m'')\equiv D(n,\ m)\ (Mod.\ 3).$$

Сопоставление сравнений (22), (23) приводит к заключению

$$D(n,\ m)\equiv D(n,\ m')\ (Mod.\ 3)$$

Повторяя последовательно подобные рассуждения, убедимся в справедливости теоремы 10 и для остальных случаев.

Наряду с ограничением (20), при выводе теоремы предполагалось, что число $n = c + d\rho$ удовлетворяет условию

$$0 \leq 2d \leq c$$

Нетрудно убедиться, что и это условие может быть снято. Заметим, что из двенадцати чисел, союзных с данными или союзных с числом, сопряженным с данным, всегда возможно выбрать число, удовлетворяющее поставленному требованию. Положим сначала, что одно из чисел, союзных с n, число $n' = c' + d'\rho$, удовлетворяет условию

$$0 \leq 2d' \leq c'$$

Пусть n' связано с n равенством

$$n' = n(1+\rho)^h.$$

Можно написать:

$$D\left(n', \; m' + 3\lambda\,(1-\rho)\, n'\right) \equiv D\,(n', \; m') \;\; (Mod.\, 3), \tag{24}$$

где

$$m' = m\,(1+\rho)^h.$$

Левая и правая части сравнения (24) легко преобразуются

$$D\left(n', m' + 3\lambda\,(1-\rho)\, n'\right) \equiv D\left(n', m + 3\lambda\,(1-\rho)\, n\right) (Mod. 3).$$

$$D\left(n', m + 3\lambda\,(1-\rho)\, n\right) \equiv D\left(n, \; m + 3\lambda\,(1-\rho)\, n\right) +$$
$$+ h\;\; \frac{N\left(m' + 3\lambda\,(1-s)\, n'\right) - 1}{3} \;\; (Mod.\; 3).$$

$$D\,(n', \; m') \equiv D\,(n' \; m) \equiv D\,(n, \; m) + h \cdot \frac{N\,(m) - 1}{3} \;\; (Mod. 3).$$

Приняв во внимание сравнение

$$\frac{N\left(m + 3\lambda\,(1-\rho)\right) - 1}{3} \equiv \frac{N\,(m) - 1}{3} \;\; (Mod.\; 3),$$

получим из сравнения (24) сравнение (19).

Положим теперь, что число $\overline{n'}$, союзное с сопряженным числом $\overline{n}$, удовлетворяет поставленному условию.

В этом случае, согласно только что доказанному, имеем:

$$D\left(\overline{n}, \; \overline{m} + 3\overline{\lambda}\,(1+\rho)\;\; (1-\rho)\, \overline{n}\right) \equiv D\,(\overline{n}, \; \overline{m}) \;\; (Mod.\; 3),$$

где числа $\overline{\lambda}$ и $\overline{m}$ обозначают числа, сопряженные с λ и m.

С помощью теоремы 5 выводим отсюда сравнение

$$D\left(n,\ m+3\lambda\,(1-\rho)\,n\right)\equiv D(n,\ m)\ (Mod.\ 3).$$

Таким образом, теорема 10 справедлива при любом числе n взаимно-простом с m и λ каком угодно целом.

III.

Закон взаимности кубических вычетов.

§ 9.

Результаты, полученные в предыдущих §§, легко позволяют установить закон взаимности кубических вычетов.

Теорема 11. Если число $\alpha+\beta\rho$ таково, что $\beta\equiv 0\ (Mod.\ 3)$ и α, β суть числа взаимно-простые, то

$$D(\alpha+\beta\rho^2,\ \alpha+\beta\rho)\equiv 0\ (Mod.\ 3).\ ^{*)}$$

В самом деле, полагая $\beta=3\beta'$, имеем

$$D(\alpha+\beta\rho^2,\ \alpha+\beta\rho)\equiv D\left(\rho\,(\rho-1)\,3\beta',\ \alpha+3\beta'\rho\right)(Mod.\ 3). \tag{25}$$

Заметим, что

$$\rho\,(\rho-1)\,3=(1-\rho)^3.$$

Получим из сравнения (25) новое сравнение

$$D\,(\alpha+\beta\rho^2,\ \alpha+\beta\rho)\equiv D\left(\beta',\ \alpha'-3\beta'\,(1-\rho)\right)\ (Mod.\ 3), \tag{26}$$

где

$$\alpha'=\alpha+\beta.$$

В силу теоремы 9 и 10, получим далее:

$$D\left(\beta',\ \alpha'-3\beta'\,(1-\rho)\right)\equiv D\,(\beta',\ \alpha')\equiv 0\ (Mod.\ 3).$$

Отсюда следует, что

$$D\,(\alpha+\beta\rho^2,\ \alpha+\beta\rho)\equiv 0\ \ (Mod.\ 3). \tag{27}$$

$$D\,(\alpha+\beta\rho,\ \alpha+\beta\rho^2)\equiv 0\ \ (Mod.\ 3), \tag{28}$$

Теорема 12. Если числа $\alpha+\beta\rho$, $\gamma+\delta\rho$ суть числа взаимно простые, не имеющие делителями одночленных чисел, и при том $\beta\equiv\delta\equiv 0\ (Mod.\ 3)$, то справедливо сравнение

$$D\,(\alpha+\beta\rho,\ \gamma+\delta\rho)\equiv D\,(\gamma+\delta\rho,\ \alpha+\beta\rho).\ (Mod.\ 3).\ ^{**)}$$

---

*) Число $\alpha+\beta\rho$ не делится на $1-\rho$.

**) Числа $\alpha+\beta\rho$ и $\gamma+\delta\rho$ не делится на $1-\rho$.

Напишем сравнение

$$D\Big((\alpha+\beta\rho)(\gamma+\delta\rho^2),\ (\alpha+\beta\rho^2)(\gamma+\beta\rho)\Big)\equiv D(\alpha+\beta\rho,\ \alpha+\beta\rho^2)+$$
$$+D(\gamma+\delta\rho^2,\ \alpha+\beta\rho^2)+D(\alpha+\beta\rho,\ \gamma+\delta\rho)+$$
$$+D(\gamma+\delta\rho^2,\gamma+\delta\rho).\ (Mod.\ 3).$$

Приняв в расчет теорему 11, получим из него:

$$D(\gamma+\delta\rho^2,\ \alpha+\beta\rho^2)+D(\alpha+\beta\rho,\ \gamma+\delta\rho)\equiv 0\ (Mod.\ 3)$$

или

(29) $$D(\gamma+\delta\rho,\ \alpha+\beta\rho)\equiv D(\alpha+\beta\rho,\ \gamma+\delta\rho)\ (Mod.\ 3),$$

Теорема 13. Если p есть одночленное вещественное число, взаимно-простое с числом $m=\alpha+\beta\rho$ и при том $\beta\equiv 0\ (Mod.\ 3)$, то имеет место сравнение:

$$D(p,\ m)\equiv D\ (m,p)\ (Mod.\ 3).\ ^{*)}$$

Обозначим через q общего наибольшего делителя чисел α и β

$$\alpha=q\alpha',\ \beta=q\beta',\ m=qm'.$$

Число β' делится на три, ибо q не может делиться на три. Прежде всего отметим, что

(30) $$D(p,\ m)\equiv D(p,\ q)+D(p,\ m')\ (Mod.\ 3).$$

(31) $$D(p,\ q)\equiv D(q,\ p)\ (Mod.\ 3)$$

Напишем теперь сравнение

(32) $$D\ (p,\ m')\equiv D\Big(p+3\lambda(1-\rho)\,m',\ m'\Big)\ (Mod.\ 3).$$

Число λ выберем так, чтобы число $p+3\lambda\,(1-\rho)\,m'$ не делилось бы на одночленное число. Такой выбор всегда возможно сделать, положив хотя бы $\lambda=(2+\rho)\,l$ и взяв l таким, чтобы числа $p+ql\alpha'$ и $ql\beta'$ оказались взаимно-простыми. Последнее можно достичь, полагая l равным произведению простых чисел, входящих в состав β' и не делящих p.

В силу теоремы 13 имеем

(33) $$D\Big(p+3\lambda(1-\rho)\,m',\ m'\Big)\equiv D\Big(m',p+3\lambda(1-\rho)\,m'\Big)(Mod.\ 3).$$

и далее

(34) $$D\Big(m',\ p+3\lambda\,(1-\rho)\,m'\Big)\equiv D\,(m',p)\ (Mod.\ 3).$$

Сопоставляя сравнения (30), (31), (32), (33), (34), получим окончательно

(35) $$D(p,\ m)\equiv D(m,\ p)\ (Mod.\ 3).$$

---

*) Число p не делится на три. Число m не делится на $1-\rho$.

Теорема 14. Если числа $m = \alpha + \beta\rho$, $n = \gamma + \delta\rho$ суть числа взаимно-простые и $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ ($Mod.$ 3), то справедливо сравнение

$$(36) \qquad D(\alpha + \beta\rho,\ \gamma + \delta\rho) \equiv D(\gamma + \delta\rho,\ \alpha + \beta\rho) \ (Mod.\ 3).\ ^{*})$$

Назовем через p — общий наибольший делитель чисел α и β, через q—общий наибольший делитель чисел γ и δ.

Положим, что

$$m = pm' \quad n = q \cdot n'.$$

С помощью доказанных ранее теорем получаем последовательно:

$$D(m, n) \equiv (D\, m', n') + D(m', q) + (D\, p, n') + D(p, q) \ (Mod.\ 3)$$

$$D(m, n) \equiv D(n', m') + D(q, m') + D(n', p) + D(q, p) \equiv D(n, m) \ (Mod.\ 3).$$

Сравнение (36) дает закон кубической взаимности чисел в общей форме.

Теорема 15. Если числа $m = \alpha + \beta\rho$, $n = \gamma + \delta\rho$ суть числа взаимно-простые, то

$$(37) \quad D(m, n) \equiv D(n, m) + \varepsilon_m \frac{N(n) - 1}{3} - \varepsilon_n \frac{N(m) - 1}{3} \ (Mod.\ 3),$$

где ε_l $(l = \sigma + \tau\rho)$ определяется так:

$$\varepsilon_l = \begin{cases} +1 & \sigma \equiv 0 \\ \ \ 0 & \tau \equiv 0 \ (Mod.\ 3). \\ -1 & \sigma \equiv \tau \end{cases}$$

Доказательство предложения очевидно.

Приложим полученные результаты к определению децедента числа $1 - \rho$. Не трудно установить предложение.

Теорема 16. Если число $\alpha + \beta\rho$ взято в примарной форме $(\alpha \equiv -1,\ \beta \equiv 0)$ ($Mod.$ 3), то

$$D(1 - \rho,\ \alpha + \beta\rho) \equiv \frac{2}{3}(\alpha + 1) \ (Mod.\ 3).$$

В самом деле, предполагая $\beta > 0$, имеем:

$$D(1 - \rho, \alpha + \beta\rho) \equiv D\left(\alpha + 1 + (\beta - 1)\rho,\ \alpha + \beta\rho\right) \equiv$$

$$\equiv D\left(\alpha + \beta\rho,\ \alpha + 1 + (\beta - 1)\rho\right) + \frac{N(\alpha + \beta\rho) - 1}{3} \ (Mod.\ 3).$$

или

$$(38) \qquad D(1 - \rho,\ \alpha + \beta\rho) \equiv D\left(1 - \rho, \alpha + 1 + (\beta - 1)\rho\right) + \frac{N(\alpha + \beta\rho) - 1}{3} \ (Mod.\ 3).$$

---

*) Число $\alpha + \beta\rho$, $\gamma + \delta\rho$ не делится на $1 - \rho$.

Таким же образом, пользуясь сравнением (37), получаем последовательно:

$$(39)\ D\Big(1-\rho,\ \alpha+1+(\beta-1)\rho\Big)\equiv D\Big(1-\rho,\ \alpha+2+(\beta-2)\rho\Big)-$$
$$-\frac{N\big(\alpha+1+(\beta-1)\rho\big)-1}{3}-\frac{N\big(\alpha+2+(\beta-2)\rho\big)-1}{3}\ (Mod. 3).$$

$$(40)\ D\Big(1-\rho,\ \alpha+2+(\beta-2)\rho\Big)\equiv D\Big(1-\rho,\ \alpha+3+(\beta-3)\rho\Big)+$$
$$+\frac{N\big(\alpha+3+(\beta-3)\rho\big)-1}{3}\ (Mod.\ 3).$$

Сложим почленно сравнения (38), (39), (40) и примем в соображение, что:

$$\frac{N(\alpha+\beta\rho)-1}{3}+\frac{N\big(\alpha+3+(\beta-3)\rho\big)-1}{3}-$$
$$-\frac{N\big(\alpha+1+(\beta-1)\rho\big)-1}{3}-\frac{N\big(\alpha+2+(\beta-2)\rho\big)-1}{3}=4.$$

Получим сравнение:

$$(41)\ D(1-\rho,\ \alpha+\beta\rho)\equiv D\Big(1-\rho,\ \alpha+3+(\beta-3)\rho\Big)+1\ (Mod. 3).$$

Пользуясь сравнением (41), получим далее:

$$(42)\qquad D(1-\rho,\ \alpha+\beta\rho)\equiv D(1-\rho,\ \alpha+\beta)+\frac{\beta}{3}\ (Mod.\ 3).$$

В силу теоремы 8 имеем:

$$D(1-\rho,\ \alpha+\beta)\equiv\frac{2}{3}(\alpha+\beta+1)\ (Mod.\ 3).$$

Внося выражение децедента $D\ (1-\rho,\ \alpha+\beta)$ в правую часть сравнения (42), получим окончательно

$$(43)\qquad D(1-\rho,\ \alpha+\beta\rho)\equiv\frac{2}{3}(\alpha+1)\ (Mod.\ 3).$$

В приведенном рассуждении мы предполагали, что число β положительно. Совершенно, однако, ясно, что подобным же образом установится справедливость сравнения (43) и при отрицательном β.

В заключение заметим, что кубический децедент числа $1-\rho$ можно получить непосредственно, не прибегая к закону взаимности.

Das kubische Reziprozitätsgesetz.

A. Jouravsky.

In dieser Arbeit wird eine neue rein-arithmetische Methode zur Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetz gegeben.

Zu Grunde der Untersuchungen ist der quadratische durch den Wurzel der Gleichung

$$\rho^2 + \rho + 1 = 0$$

erzeugene Körper Ω gelegt.

§§ 1, 2, 3, 4 enthalten eine Veralgemeinerung des Gausschen Decedentsbegriff und seine fundamentale Eigenschaften. Da sind Decedenten für einige einfache Fälle unmittelbar berechnet.

§§ 5, 6, 7, 8 sind zu Studium der Veränderung des Decedents mit der Veränderung eines seines Gliedes um das Vielfache des anderen gewidmet. Als Endresultat erhalten wir das Theorem

$$D\left(n,\ m\right) \equiv D\left(n,\ m + 3\lambda\,(1-\rho)\,n\right)(Mod.\,3),$$

wo n, m, λ ganze Zahlen des Körpers Ω sind.

Mit Hülfe dieses Theorems ist in § 9 das kubische Reziprozitätsgesetz bewiesen und das kubische Charakter des $1-\rho$ berechnet.

О некоторых тригонометрических неравенствах.

Р. О. Кузьмин.

Иногда простые геометрические представления дают возможность судить о величине суммы тригонометрических слагаемых. Простейший пример представляет $\sum\limits_{n=1}^{N} e^{2\pi i a n}$, где $0 < a < 1$.

Слагаемые этой суммы можно представить сторонами правильной ломаной линии, у которой длина стороны равна единице, а внешний угол равен $2\pi a$. Модуль суммы представится при этом длиной соответствующей диагонали этой ломаной. Отсюда очевидно неравенство:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i a n}\right| < 2R = \frac{1}{\sin \pi a},$$

где R — радиус круга, описанного около указанной ломаной. Лишь немногим более сложный пример применения геометрического представления комплексных чисел дает

$$\sum_{n=0}^{N} a_n e^{2\pi i a n}, \text{ где } 0 < a < 1 \text{ и } a_0 \geq a_1 \geq a_2 \ldots > 0.$$

Представим слагаемые этой суммы в виде последовательных сторон ломаной линии, внешний угол которой равен $2\pi a$, а длины сторон соответственно равны a_0, a_1, $a_2 \ldots$.

Продолжив каждую из сторон на такую величину, чтобы длина отрезка с его продолжением равнялась бы длине предыдущего, проведем окружности через концы предыдущего и через продолжение последующего отрезка. Легко видеть, что получим ряд окружностей, каждая из которых касается извнутри с предыдущей. При этом конец каждой из сторон проведенной ломаной будет лежать на соответствующей окружности. Таким образом, все концы отрезков ломаной расположатся внутри первой окружности. Сумма представится диагональю ломаной, очевидно меньшей диаметра первой окружности. Следовательно, имеем неравенство:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n e^{2\pi i a n}\right| < \frac{a_0}{\sin \pi a}$$

Простым следствием полученного неравенства является давно известное предложение о сходимости тригонометрического ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i a n}$, если коэффициенты a_n положительны, не возрастают и стремятся к нулю при возрастании n *).

Из того же геометрического представления легко получить и еще один вывод. Замыкающая любого числа слагаемых кончается на одном из внутренних кругов, а все круги, начиная с третьего, не имеют общих точек с первым кругом. Отсюда легко видеть, что существует неравенство:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n e^{2\pi i a n} \neq 0.$$

Как простое следствие, отсюда вытекает известная теорема:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \neq 0$$

внутри и на окружности круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице. При этом предполагается, что положительные коэффициенты a_n не возрастают и стремятся к 0 при возрастании n.

Простой пример: $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a^n z^n$, где a — положительная правильная дробь, показывает, что корни $f(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы, могут быть сколь угодно близки к окружности: $|z| = 1$.

*) Как указал В. И. Смирнов, почти такой же вывод сходимости написанного тригонометрического ряда рассматривался раньше. См. Maximilian Krafft. Potenzreihen auf dem Einheitskreis (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. 1924).

В виде последнего и наиболее интересного примера рассмотрим сумму: $\sum e^{2\pi i f(n)}$, в которой величина $\Delta f(n) = f(n) - f(n+1)$ монотонно изменяется, оставаясь в промежутке $(\theta, 1-\theta)$. Суммирование при этом распространено на последовательные значения n, при которых $f(n)$ удовлетворяет сказанному условию.

Такого рода сумма встречается во многих современных работах по аналитической теории чисел. Впервые важное значение такого рода сумм замечено И. М. Виноградовым, давшим в 1916 году оценку величины модуля этой суммы. Его доказательство основано на применении интегрирования по контуру с искусством и остроумием, свойственным этому автору. Впоследствии такие же суммы встречались в работах Van der Corput'a и E. Landau. В большой работе последнего: Ueber die Winogradowsche Methode zum Beweis des Wahring — Hilbert—Camke'sche Satzes находится тщательно отделанное доказательство неравенства для рассматриваемых сумм, основанное на применении видоизмененной формулы Poisson'a.

Замечательно, что геометрические рассуждения почти такой же простоты, как и в предыдущем примере, легко приводят к весьма простому и точному неравенству для указанных сумм.

Изобразив последовательно слагаемые данной суммы в виде векторов, получим ломаную со сторонами, равными единице, и с внешними углами, монотонно изменяющимися в промежутке $(2\pi\theta, 2\pi - 2\pi\theta)$. Проведем окружности через каждые три последовательные вершины ломаной.

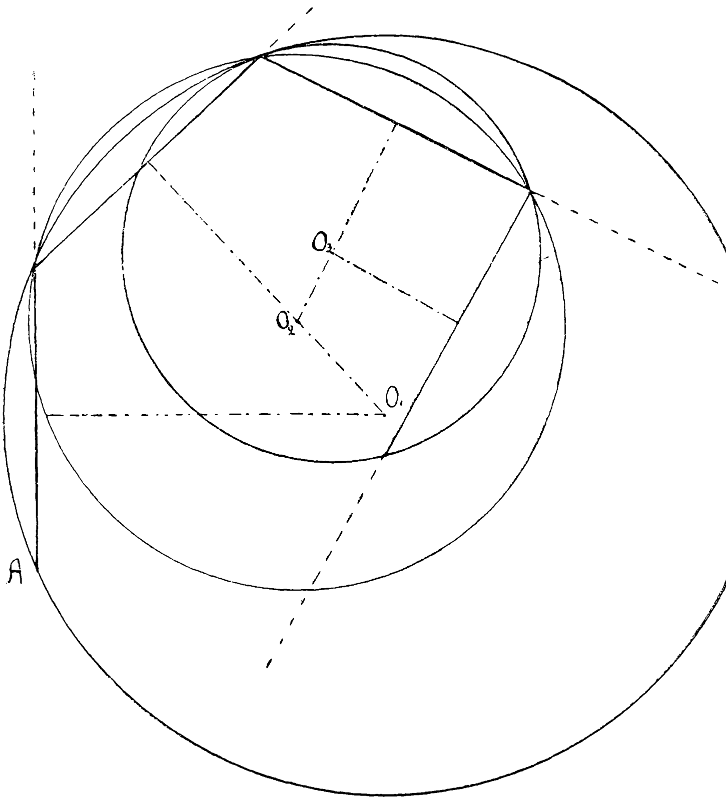
Пусть A и B начало и конец ломаной, а $O_1, O_2 \ldots O_n$ центры последовательных окружностей (черт. 1). Легко видеть, что пока внешние углы ломаной увеличиваются в промежутке $(2\pi\theta, \pi)$ у двух последовательных окружностей, имеющих общую хорду, радиус последующей меньше радиуса предыдущей, центр расположен ближе к общей хорде и по ту же сторону, что и центр предыдущей окружности.

Для той части ломаной линии, где внешние углы будут изменяться, возрастая в промежутке $(\pi, 2\pi - 2\pi\theta)$, радиусы последовательных окружностей будут возрастать, а центры их удаляться от общих хорд. При этом центры двух последовательных окружностей будут расположены по одну сторону общей хорды. Кроме того, если возьмем тот отрезок ломаной, для которого предыдущий внешний угол меньше π, а последующий больше π, то у двух последовательных окружностей, имеющих этот отрезок общей хордой, центры будут расположены по разные стороны этой хорды.

Очевидно имеем

$$\left| \sum e^{2\pi i f(n)} \right| = AB \leqslant AO_1 O_2 \ldots O_n B,$$

Для оценки длины последней ломаной рассмотрим еще систему окружностей (черт. 2) с центрами O_1', $O_2' \ldots O_n'$ и с общей хордой, длина которой равна единице. Пусть A' и B' — концы линии центров этих окружностей, расположенные на крайних окружностях. При этом радиусы новой последовательности окружностей выберем равными соответствующим



Черт. 1.

радиусам прежней последовательности окружностей. Наконец, расположим окружности так, чтобы O_k' и O'_{k+1} были расположены по одну сторону общей хорды, если O_k и O_{k+1} тоже по одну сторону от своей общей хорды, и по разную, если O_k и O_{k+1} тоже по разную сторону своей общей хорды.

При таких условиях нетрудно видеть, что:

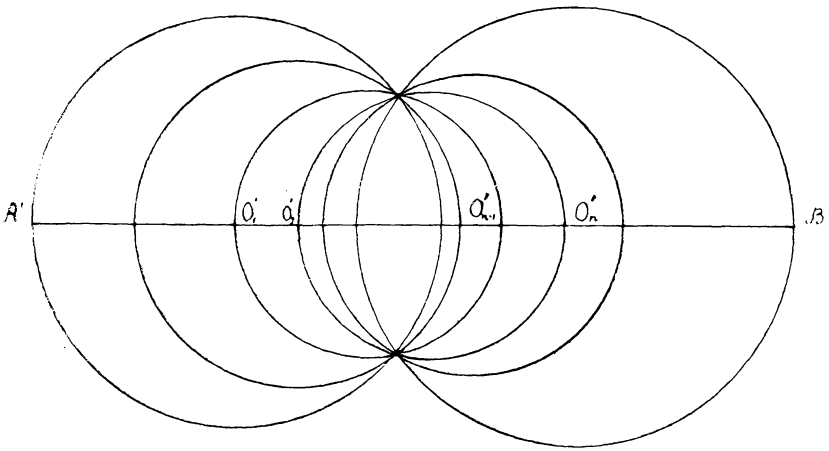
$$AO_1 O_2 \ldots O_n B = A' O_1' O_2' \ldots O_n' B' < 2R_1 + 2R_2,$$

где $2R_1$ — диаметр окружности с центром O_1, а $2R_2$ — диаметр окружности с центром O_n.

В силу условия о внешних углах и длинах сторон ломаной каждая из величин $2R_1$ и $2R_2$ не превосходит величины $\frac{1}{\sin \pi\theta}$.

В связи с предыдущим получаем неравенство:

$$\left|\sum e^{2\pi i f(n)}\right| < \frac{2}{\sin \pi\theta} < \frac{1}{\theta}.$$



Черт. 2.

В названной работе E. Landau данное неравенство заменено другим, в котором при сделанных предположениях $\frac{1}{\theta}$ заменяется дробью $\frac{4}{\theta}$. Из доказанного легко следует, что при любом положительном ε и при соответственно малых значениях величины θ справедливо и более точное неравенство:

$$\left|\sum e^{2\pi i f(n)}\right| < \left(\frac{2}{\pi} + \varepsilon\right)\frac{1}{\theta}.$$

С другой стороны, можно показать, применяя геометрические соображения, подобные предыдущим, что при любом заданном положительном числе ε можно найти такое значение для θ и подобрать такую функцию $f(n)$, при которых будет существовать неравенство:

$$\left|\sum e^{2\pi i f(n)}\right| > \left(\frac{2}{\pi} - \varepsilon\right)\frac{1}{\theta}.$$

В виде приложения полученного неравенства, рассмотрим величину

$$\sum_{M}^{N} e^{2\pi i f(n)}, \text{ где } f(n) \text{ удовлетворяет условию } \frac{1}{A} < f''(x)$$

для всех чисел заданного интервала.

Разобьем промежуток (M, N) на части числами $x_1, x_2 \ldots x_{p-1}$, выбранными так, что $f'(x_k)$ равно целому числу и $x_k < x_{k+1}$.

Найдем верхний предел для суммы, распространенной на числа одного из частичных интервалов. Воспользуемся равенством

$$\sum e^{2\pi i f(n)} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3,$$

при чем суммирование в $\sum_1$ и $\sum_3$ распространено на те значения n, при которых $f'(n)$ отличается от ближайшего целого числа меньше, чем на θ. Тогда, на основании изложенного, легко видеть, что $\left|\sum_2\right| < \frac{1}{\theta}$. Заменяя в $\sum_1$ и $\sum_3$ каждое слагаемое единицей и пользуясь неравенством для второй производной, нетрудно убедиться в справедливости неравенства:

$$\left|\sum\nolimits_1\right| + \left|\sum\nolimits_2\right| < 2A\theta + 2,$$

откуда, выбрав $\theta = \frac{1}{\sqrt{2A}}$, получим $\left|\sum e^{2\pi i f(n)}\right| < 2\sqrt{2A} + 2$, при чем суммирование распространено на такой интервал, в пределах которого $f'(x)$ заключена между последовательными целыми числами.

Окончательно для изучаемой суммы получаем неравенство:

$$\left|\sum_{M}^{N} e^{2\pi i f(n)}\right| < 2p\left(\sqrt{2A} + 1\right).$$

Sur quelques inégalités trigonométriques.

R. Kuzmin.

L'auteur démontre par les considérations géométriques élémentaires quelques inégalités trigonométriques dont la plus importante est l'inégalité

$$\left|\sum e^{2\pi i f(n)}\right| < \frac{2}{\sin \pi\theta},$$

ou $f(n)$ satisfait à la condition $\Delta^2 f(n) > 0$ et la sommation s'étend sur une suite de valeurs entieres de n appartenant à l'intervalle

$$O < \theta < \Delta f(n) < 1 - \theta.$$

Les inégalités de cette espèce ont été introduites pour la première fois par M. I. M. Vinogradov. On en trouve une seconde démonstration dans les travaux de M. M. Landau et Vander-Corput. La démonstration de l'auteur est fondée sur des principes entièrement differents et donne une limite plus précise.

Об уравнениях гидродинамики.

Н. М. Гюнтер.

1. Допустим, что в пространстве точек (x_1, x_2, x_3) дана некоторая область (D_t) неизменного объема, ограниченная поверхностью (S_t), удовлетворяющей 3-м известным условиям Ляпунова и перемещающейся в пространстве, изменяя или нет свою форму.

Положим, что даны функции u_1, u_2, u_3 от x_1, x_2, x_3, t, заданные во всякий момент t в области (D_t). Об этих функциях мы предположим, что они удовлетворяют условиям:

I. Функции u_i имеют частные производные по x_1, x_2, x_3, t, пока собрание этих чисел определяет точку в (D_t), причем эти производные удовлетворяют некоторому условию Гёльдера.

II. Во всех точках внутри (D_t) соблюдено равенство

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \tag{1}$$

III. В каждой точке на (S_t) справедливо равенство

$$u_1 \cos(Nx_1) + u_2 \cos(Nx_2) + u_3 \cos(Nx_3) = W_n, \tag{2}$$

в котором W_n — проекция скорости точки (S_t) в ее движении на нормаль N к (S_t) в этой точке.

Известно *), что при соблюдении этих условий, какова-бы ни была точка (q_1, q_2, q_3) в (D_0), система ур-ний

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

имеет решение, в котором при $t = 0$ точка $(x_1, x_2, x_3,)$ совпадает с точкой (q_1, q_2, q_3).

---

*) Н. Гюнтер. Об уравнении $\frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z} = f$. Мат. Сб. т. 32.

При этом, если

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t), \ i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

это решение, то функции (4) имеют производные по q_1, q_2, q_3 и система (4) допускает решение относительно q_1, q_2, q_3, определяя их как функции от x_1, x_2, x_3, t, заданные в области (D_t).

Из уравнений (4) вытекает, что производные

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \ \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \ \frac{\partial x_3}{\partial q_j}, \ j = 1, 2, 3,$$

удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{d\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial q_j}, \ i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Вследствие этого, если $\omega_1^{(0)}$, $\omega_2^{(0)}$, $\omega_3^{(0)}$ три непрерывные функции от q_1, q_2, q_3, заданные в области (D_0) и

$$\omega_i = \omega_1^{(0)} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \omega_2^{(0)} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + \omega_3^{(0)} \frac{\partial x_i}{\partial q_3}, \ i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

то функции ω_1, ω_2, ω_3 удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\omega_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}\omega_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3}\omega_3, \ i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Подставляя вместо q_1, q_2, q_3 их выражения через x_1, x_2, x_3, t, мы обратим функции (6) в функции от x_1, x_2, x_3, t.

Положим теперь, что функции ω_1, ω_2, ω_3 удовлетворяют еще зависимостям:

$$\omega_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \ \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \ \omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \tag{IV}$$

Если рассматривать u_1, u_2, u_3 как проекции скорости частицы несжимаемой жидкости, заполняющей область (D_t), то ω_1, ω_2, ω_3 будут составляющими вихря. Тождества (7) говорят, что соблюдены условия Гельмгольца.

Но для того, чтобы u_1, u_2, u_3 при соблюдении условий (I), (II), (III), (IV) действительно определяли некоторое движение несжимаемой жидкости, занимающей область (D_t), надо, чтобы можно было удовлетворить уравнениям гидродинамики:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

то есть, чтобы выражение

$$\frac{du_1}{dt}dx_1 + \frac{du_2}{dt}dx_2 + \frac{du_3}{dt}dx_3 \tag{9}$$

было дифференциалом некоторой функции П.

Уравнения (7) получаются из уравнений (8) исключением П; при этом исключении обыкновенно предполагается существование 2-х производных у функций u_1, u_2, u_3. Предположив существование этих производных, нетрудно, исходя от уравнений (7), установить, как это обыкновенно делается, что (9) — полный дифференциал. Но предположение о существовании указанных производных не находится в числе перечисленных 4-х условий, определяющих функции u_1, u_2, u_3; оно к тому-же представляется условием, чуждым задаче интегрирования системы (8) при соблюдении условий (II) и (III), так как эти вторые производные не встречаются ни в уравнениях (8), ни в уравнениях (7).

В моей статье „О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде“ мною показано, что, исходя от уравнений (7), можно установить, что (9) — полный дифференциал [1]), предположив только существование производных по q_1, q_2, q_3, а значит и по x_1, x_2, x_3, у функций

$$\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \frac{du_3}{dt}. \tag{10}$$

Мы покажем в этой статье, что и это предположение излишне и что (9) — полный дифференциал каждый раз, когда соблюдены условия (I), (II), (III), (IV).

В моей статье „О решениях уравнений гидродинамики“ [2]) я показал, занимаясь случаем жидкости, заполняющей все пространство, при несколько более общих предположениях о функциях u_1, u_2, u_3, что если эти функции образуют решение уравнений гидродинамики, то функции (10) имеют указанные производные во всех областях, в которых производные от функций u_1, u_2, u_3 по x_1, x_2, x_3, непрерывны.

Это заключение не трудно распространить на случай ограниченной области. Таким образом, установив утверждение, составляющее цель статьи, можно будет утверждать, что, при соблюдении условий (I), (II), (III) и (IV), не только (9) полный дифференциал, но и что функции (10) имеют производные по x_1, x_2, x_3.

2. Ранее чем перейти к доказательству высказанного утверждения, сделаем несколько замечаний.

---

[1]) Известия Академии Наук. 1926 глава II, § 21.

[2]) Известия Академии Наук. 1925.

Из (4), благодаря условию (II), легко получаем [1]), что

$$J = \left| \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right| = \left| \frac{\partial q_1}{\partial x_1}, \frac{\partial q_2}{\partial x_2}, \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \right| = 1,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \text{мин}\,\frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial q_j}{\partial x_i} = \text{мин}\,\frac{\partial x_i}{\partial q_j},$$

где знаки миноров относятся к определителям J.

Далее, если формулы (4) преобразуют некоторую поверхность (σ_0) из области (D_0) в поверхность (σ) из области (D_t), то [2])

$$\cos(Nx_i)\,d\sigma = \left(\cos(N_0 q_1) \frac{\partial q_1}{\partial x_i} + \cos(N_0 q_2) \frac{\partial q_2}{\partial x_i} + \cos(N_0 q_3) \frac{\partial q_3}{\partial x_i} \right) d\sigma_0,$$

где N и N_0 — направления нормалей к поверхностям (σ) и (σ_0).

Пользуясь этим, имеем, например, трактуя u_1, u_2, u_3 как функции от q_1, q_2, q_3:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial q_3}{\partial x_2} =$$

$$= \left| \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial u_3}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right|, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \left| \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial u_2}{\partial q_3} \right|$$

$$\omega_1 = \left| \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial u_3}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right| - \left| \frac{\partial x_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial u_2}{\partial q_3} \right|$$

и аналогичные выражения для ω_2, ω_3, получаемые из написанного круговой перестановкой.

Сосредоточим свое внимание на функции ω_1; разложив ω_1 по производным по t:

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial q_i}\,\text{мин.}\,\frac{\partial x_2}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial q_i}\,\text{мин.}\,\frac{\partial x_3}{\partial q_i}$$

имеем, обозначая через τ приращение t, что

$$(11) \quad \frac{\Delta\omega_1}{\tau} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Delta \frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial q_i}}{\tau}\,\text{мин.}\,\frac{\partial x_2}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Delta \frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial q_i}}{\tau}\,\text{мин.}\,\frac{\partial x_3}{\partial q_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial q_i} \right)_1 \frac{\Delta\,\text{мин.}\,\frac{\partial x_2}{\partial q_i}}{\tau} - \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial q_i} \right)_1 \frac{\Delta\,\text{мин.}\,\frac{\partial x_3}{\partial q_i}}{\tau},$$

где знак (1) указывает, что функции соответствуют приращенному значению t.

---

[1]) О движении жидкости и т. д. Известия Академии Наук 1926 гл. I. § 4.

[2]) О движении жидкости и т. д. Известия Академии Наук 1926 гл. I, § 8.

Вследствие существования производных по t у функций $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, вторая строка равенства (11) имеет предел, когда $\tau \to 0$, и этот предел равен, как легко убедиться:

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial q_1}, \frac{\partial u_3}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right| - \left| \frac{\partial u_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial u_2}{\partial q_3} \right|.$$

Левая часть в (11) имеет пределом $\frac{d\omega_1}{dt}$. Значит и первая строка в (11) имеет предел. Обозначим этот предел через

$$K(q_1, q_2, q_3, t). \tag{12}$$

Из (11) имеем:

$$\frac{d\omega_1}{dt} - \left| \frac{\partial u_1}{\partial q_1}, \frac{\partial u_3}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right| + \left| \frac{\partial u_1}{\partial q_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial u_2}{\partial q_3} \right| = K(q_1, q_2, q_3, t \tag{11'}$$

Установив это, умножим обе части равенства (11′) на 1 под видом второго определителя J; мы обратим левую часть равенства (11′) в

$$\frac{d\omega_1}{dt} - \left(\omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Итак, функция (12) равна нулю.

Мы будем в дальнейшем считать, что τ таково, что разность между (12) и переменным, имеющим этот нуль пределом, меньше ε, где ε наперед выбранное положительное число.

3. Переходим теперь к доказательству высказанного утверждения. Воспользуемся теоремой 3-ей моей работы „О действиях над функциями, неимеющими производных“ [1])

По этой теореме, для того, чтобы выражение (9) было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы для всякой области (ω), внутри (D_t), ограниченной поверхностью (σ), были соблюдены равенства

$$\begin{gathered}
\int\limits_{(\sigma)} \left(\frac{du_3}{dt} \cos(Nx_2) - \frac{du_2}{dt} \cos(Nx_3) \right) d\sigma = 0, \\
\int\limits_{(\sigma)} \left(\frac{du_1}{dt} \cos(Nx_3) - \frac{du_3}{dt} \cos(Nx_1) \right) d\sigma = 0, \\
\int\limits_{(\sigma)} \left(\frac{du_2}{dt} \cos(Nx_1) - \frac{du_1}{dt} \cos(Nx_2) \right) d\sigma = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

[1]) Известия Академии Наук 1924, 1925 г.

Мы будем считать, что (σ) не имеет общих точек с (S_t). Какова-бы ни была точка внутри (D_t), всегда можно построить такую область, ограниченную (σ), которая заключает внутри эту точку.

Устанавливая справедливость равенств (13), мы ограничимся рассмотрением первого из них.

Положим, что поверхности (σ) соответствует в (D_0) поверхность (σ_0). Пользуясь формулами, указанными в пар-фе 2-м, мы преобразуем левую часть (13) в

$$(14)\qquad \int\limits_{(\sigma_0)} \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} \text{ мин.} \frac{\partial x_2}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} \text{ мин.} \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right) \cos(N_0 q_i)\, d\sigma_0.$$

Положим

$$(15)\qquad Y_i = \frac{1}{\tau h^3} \int\limits_{t}^{t+\tau} d\lambda \int\limits_{q_1}^{q_1+h} dp_1 \int\limits_{q_2}^{q_2+h} dp_2 \int\limits_{q_3}^{q_3+h} dp_3\, x_i(p_1, p_2, p_3, \lambda),$$

считая, что h и τ настолько малы, что, во-первых, точка (p_1, p_2, p_3) остается во время интегрирования внутри (D_t) и, во-вторых, соблюдены неравенства

$$(16)\qquad \left| \frac{\partial^2 x_j}{\partial p_i \partial \lambda} - \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t} \right| < \varepsilon, \left| \frac{\partial^2 x_j}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} \right| < \varepsilon, j=1,2,3, i=1,2,3.$$

Тогда соблюдены также и неравенства

$$(17)\qquad \left| \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t} - \frac{\partial^2 Y_j}{\partial q_i \partial t} \right| < \varepsilon, \left| \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y_j}{\partial t^2} \right| < \varepsilon,\ j=1,2,3,\ i=1,2,3.$$

Положим далее, что

$$(18)\qquad X_i = \frac{1}{h_1^3} \int\limits_{q_1}^{q_1+h_1} dp_1 \int\limits_{q_2}^{q_2+h_1} dp_2 \int\limits_{q_3}^{q_3+h_1} dp_3\, x_i(p_1, p_2, p_3, t),$$

где h_1 настолько мало, что, во-первых, точка (p_1, p_2, p_3) остается внутри (D_t) и, во-вторых, соблюдены неравенства

$$(19)\qquad \left| \frac{\partial x_j}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right| < \varepsilon\tau < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\partial^2 x_j}{\partial p_i \partial t} - \frac{\partial^2 x_j}{\partial q\, \partial t} \right| < \varepsilon\tau < \varepsilon,\ j=1,2,3,\ i=1,2,3,$$

соблюдение которых влечет за собою соблюдение неравенств

$$(20)\qquad \left| \frac{\partial x_j}{\partial q_i} - \frac{\partial X_j}{\partial q_i} \right| < \varepsilon\tau,$$

$$\left| \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_i \partial t} - \frac{\partial X_j}{\partial q_i \partial t} \right| < \varepsilon\tau,\ j = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$(14')\qquad \int\limits_{(\sigma_0)} \sum_{i=1}^{i=3} \left\{ \frac{\partial^2 Y_3}{\partial t^2} \text{ мин. } \frac{\partial X_2}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} \text{ мин. } \frac{\partial X_3}{\partial q_i} \right\} \cos\,(N_0 q_i)\, d\sigma_0.$$

Вследствие неравенств (17) и (20), интеграл (14′) отличается от интеграла (14) на число вида $a\varepsilon$, где a от ε не зависит.

Применяя теорему Грина, мы получим, что (14′) равен

$$(21)\qquad \int\limits_{(\omega_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^3 Y_3}{\partial t^2 \partial q_i} \text{ мин. } \frac{\partial X_2}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^3 Y_2}{\partial t^2 \partial q_i} \text{ мин. } \frac{\partial X_3}{\partial q_i} \right\} d\omega_0,$$

где (ω_0) — область, ограниченная поверхностью (σ_0), так как

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial q_i} \text{ мин. } \frac{\partial X_2}{\partial q_i} = 0,\quad \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial q_i} \text{ мин. } \frac{\partial X_3}{\partial q_i} = 0.$$

Функция, стоящая в (21) под знаком интеграла, равна

$$(22)\qquad \frac{1}{h^3} \int\limits_{q_1}^{q_1+h} dp_1 \int\limits_{q_2}^{q_2+h} dp_2 \int\limits_{q_3}^{q_3+h} dp_3\,.$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Delta \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial t \partial p_i}}{\tau} \text{ мин. } \frac{\partial X_2}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Delta \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial p_i \partial t}}{\tau} \text{ мин. } \frac{\partial X_3}{\partial q_i} \right\}.$$

Но вследствие неравенств (20):

$$(20')\qquad \left| \text{мин. } \frac{\partial x_j}{\partial q_i} - \text{мин. } \frac{\partial X_j}{\partial q_i} \right| < a_1 \varepsilon\tau,\ j = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, 3$$

и вследствие неравенств (19):

$$(19')\qquad \left| \text{мин. } \frac{\partial x_j}{\partial p_i} - \text{мин. } \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right| < a'\tau\varepsilon,\ i = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, 3,$$

гда a' и a_1 по причине ограниченности производных от x_1, x_2, x_3, а значит и производных от X_1, X_2, X_3, не зависят от ε и τ.

Следовательно (22) благодаря ограниченности производных $\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\, \partial p_i}$ отличается от

$$(22') \quad \frac{1}{h^3} \int\limits_{q_1}^{q_1+h} dp_1 \int\limits_{q_2}^{q_2+h} dp_2 \int\limits_{q_3}^{q_3+h} dp_3 \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Delta \frac{\partial^2 x_3}{\partial p_i\, \partial t}}{\tau} \text{ мин.} \frac{\partial x_2}{\partial p_i} \right. -$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Delta \frac{\partial^2 x_2}{\partial p_i\, \partial t}}{\tau} \text{ мин.} \frac{\partial x_3}{\partial p_i} \right\},$$

на число вида $b\varepsilon$, где b не зависит ни от ε, ни от τ.

Но предел интеграла (22′) при $\tau \to 0$ равен

$$\frac{1}{h^3} \int\limits_{q_1}^{q_1+h} dp_1 \int\limits_{q_2}^{q_2+h} dp_2 \int\limits_{q_3}^{q_3+h} dp_3 \quad K(p_1, p_2, p_3, t) = 0,$$

при чем по сделанному выбору τ интеграл (22′) отличается от его предела менее чем на ε.

Значит интеграл (21), а с ним вместе и (14′), абсолютно меньше числа $c\varepsilon$, где c не зависит ни от ε, ни от τ.

Рассмотрим теперь разность между (14) и (14′). Как сказано выше, она вида $a\varepsilon$. Так как (14′) вида $c\varepsilon$, интеграл (14) абсолютно меньше числа $g\varepsilon$, где g не зависит от ε и, значит, вследствие произвольности ε, интеграл (14) равен нулю, что и требовалось доказать.

Доказав таким образом справедливость первого из равенств (13), мы аналогичным образом можем доказать также и справедливость остальных, чем будет установлено, что (9) действительно полной дифференциал.

Sur les équations d'hydrodynamique.

N. Gunther.

On demontre que l'expression

$$\frac{du_1}{dt} dx_1 + \frac{du_2}{dt} dx_2 + \frac{du_3}{dt} dx_3$$

est un differentiel exact, si les conditions (I), (II), (III), (IV), mentionnées dans le texte, sont satisfaites.

О числе нулей функции и ее производной.

С. А. Гершгорин.

В настоящей работе доказывается одно общее предложение, устанавливающее связь между числом корней производной данной функции $W = f(z)$ в некоторой области C и видом той кривой L, которая представляет отображение на плоскость W контура S области C.

Из сравнения этого предложения с теоремой Коши, с которой оно представляет известную аналогию, вытекает ряд следствий.

В конце работы дается геометрическое истолкование нашей основной теоремы в виде некоторого соотношения на Римановой поверхности.

§ 1. О числе нулей производной.

Пусть дана некоторая функция $W = U + iV = f(z)$, мероморфная в замкнутой конечной области C плоскости z, ограниченной простым контуром S. Положим, что производная $f'(z)$ этой функции имеет m нулей и μ полюсов (сосчитанных соответственно их порядкам), расположенных внутри C, при чем ни один из них не лежит на самом контуре S. Заметим, что $\mu = \nu + l$, где ν—полное число полюсов самой функции внутри C, а l—число отдельно лежащих полюсов.

Если z обойдет контур S в положительном направлении (то-есть, так, чтобы область C оставалась слева), то $W = f(z)$ опишет на плоскости W замкнутую кривую L.

Пусть α — угол, образованный касательной к кривой S в точке z с осью Ox, а β — угол, образованный касательной к кривой L в соответствующей точке W с осью Ou. В таком случае, как известно,

$$\beta = \alpha + \omega, \tag{1}$$

где ω — аргумент производной $f'(z)$. После полного обхода точкой z контура S в положительном направлении, β получит приращение $\Delta\beta$, связанное с приращениями $\Delta\alpha$ и $\Delta\omega$ углов α и ω соотношением:

$$\Delta\beta = \Delta\alpha + \Delta\omega. \tag{2}$$

Так как S, по предположению, простой замкнутый контур, обходящий в положительном направлении конечную область, то, очевидно, $\Delta\alpha = 2\pi$; $\Delta\omega$, как приращение аргумента функции $f'(z)$, равно, на основании теоремы Коши, помноженной на 2π разности между числом нулей и полюсов этой функции, откуда следует

$$\Delta\beta = 2\pi\ (m - \mu + 1). \tag{3}$$

Определение. Отношение $\frac{\Delta\beta}{2\pi}$, равное числу оборотов, которое делает касательная к кривой L при полном обходе этой кривой в направлении движения точки W, назовем числом витков i кривой L.

В силу самого определения знак i зависит от направления обхода кривой L. Понятие о числе витков может применяться и к незамкнутым кривым. Если кривая замкнута, то i необходимо число целое, так как после обхода касательная возвращается в прежнее положение. При пользовании введенным обозначением, равенство (3) принимает вид

$$i = m - \mu + 1 = m - \nu - l + 1. \tag{4}$$

Теорема I. Если $W = f(z)$—функция мероморфная в конечной области C, ограниченной простым контуром S, то число витков кривой L, описываемой точкой W при обходе точкой z контура S в положительном направлении, на единицу больше разности между числом нулей и полюсов производной $f'(z)$ этой функции, заключенных внутри C.

Отметим сейчас же весьма важный частный случай, когда $W = f(z)$ голоморфна в области C. Тогда

$$i = m + 1. \tag{5}$$

Если область C содержит бесконечно-удаленную точку, то имеет место следующая теорема.

Теорема II. Если функция $W = f(z)$ мероморфна в области C, содержащей бесконечно-удаленную точку, то число витков кривой L на единицу меньше разности между числом нулей и полюсов производной $f'(z)$, заключенных внутри C.

$$i = m - \mu - 1. \tag{6}$$

Это следует из равенства (2), принимая во внимание, что в данном случае при положительном обходе контура S области C $\Delta\alpha = -2\pi$. Если $W = f(z)$—голоморфна в области C, то

$$i = m - 1. \tag{7}$$

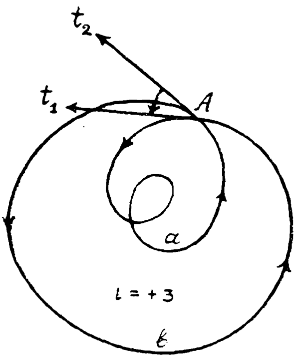
О подсчете числа витков данной кривой. Число витков i кривой L равно сумме чисел витков отдельных частей этой кривой. Так, например, если кривая L в кратной точке A (черт. 1) разбивается на 2 части AaA и AbA, которым соответствуют числа витков i' и i'', то

$$i = i' + i''. \tag{8}$$

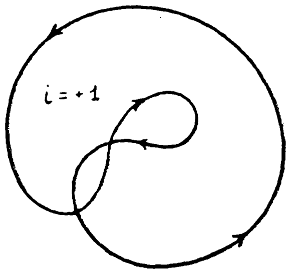
Рассматривая теперь части AaA и AbA, как отдельные замкнутые кривые, на которые распалась кривая L, мы должны положить, что их числа витков i_1 и i_2 равны соответственно:

$$i_1 = i' + (t_2,\ t_1),\ i_2 = i'' - (t_2,\ t_1), \tag{9}$$

где (t_2, t_1)—измеренный в оборотах наименьший угол, на кото-



Черт. 1.



Черт. 2.

рый нужно повернуть касательную At_2 для совмещения с At_1. Из (8) и (9) следует, что

$$i = i_1 + i_2. \tag{10}$$

Продолжая таким же образом, можем разбить всю кривую L на ряд замкнутых простых контуров. Последовательное применение равенства (10) дает:

$$i = s + t, \tag{11}$$

где s — число простых контуров, обходимых в положительном направлении, а t—обходимых в отрицательном.

Определения. Условимся кривую L, имеющую i витков, называть $|i|$ — витковой кривой, где $|i|$ — абсолютное значение числа i.

Если при этом $i > 0$, то кривая называется положительной, если же $i < 0$, то она называется отрицательной.

Отметим некоторые следствия из вышеприведенных теорем.

Следствие 1. Если функция $W = f(z)$ голоморфна в конечной области C, ограниченной простым контуром S, то необходимым и достаточным условием отсутствия внутри C

нулей производной $f'(z)$ является равенство единице числа витков кривой L, соответствующей на плоскости W контуру S ($i=+1$).

Это следует из равенства (5). Заметим, что одновитковая кривая необязательно должна быть простой, как видно из черт. 2. Частный случай этого следствия (когда L — простая кривая) был известен ранее.

Следствие 2. Если функция $W=f(z)$ мероморфна в конечной области C, а простому контуру S этой области соответствует на плоскости W положительная одновитковая кривая L, то число нулей производной $f'(z)$ внутри C (если они там, вообще, имеются) не может быть менее двух. В последнем случае внутри C существует, по крайней мере, один полюс функции $W=f(z)$.

Это следует из равенства (4), принимая во внимание, что простому полюсу функции W внутри C соответствует двойной полюс ее производной.

Следствие 3. Если $W=f(z)$ мероморфна в области C с простым контуром S и если соответствующая кривая L отрицательна ($i<0$), то число полюсов функции W внутри C по меньшей мере равно $\frac{|i|+1}{2}$.

a) Пусть область C конечна. Так как в этом случае $m\geq 0$, $\nu\geq l$, а $|i|=-i$, то, принимая во внимание равенство (4), приходим к неравенству:

$$\nu\geq\frac{|i|+1}{2}. \tag{12}$$

b) Область C содержит точку $z=\infty$. Необходимо различать 2 случая:

1) Точка $z=\infty$ есть точка регулярная. Тогда в ней имеется, по меньшей мере, двойной нуль производной и, следовательно, в этом случае $m\geq 2$, а $\mu=\nu+l$.

2) Точка $z=\infty$ есть полюс порядка ρ. Тогда производная имеет в этой точке полюс порядка $\rho-1$. Легко видеть, что при этом $\mu=\nu+l-2$, а $m\geq 0$.

В обоих случаях снова приходим к неравенству (12).

§ 2. О числе нулей функции.

Пусть $W=f(z)$ — функция мероморфная в области C, ограниченной простым контуром S. Обозначим через ν — число полюсов функции $f(z)$ внутри C, а через k_{W_0} — число значений z, обращающих функцию $W=f(z)$ в W_0 и расположенных внутри C. В таком случае ν будет числом полюсов и функции $W-W_0$, а k_{W_0} будет числом нулей этой функции, заключенных внутри C, Их разность $k_{W_0} - \nu$ будет, согласно теореме Коши, равна деленному на 2π приращению аргумента этой функции при полном обходе точкой z контура S в положительном направлении или, что то же самое, числу оборотов, которое сделает радиус—вектор $\overline{W_0 W}$ при полном обходе точкой W кривой L, соответствующей нашему контуру S.

Определение. Число j_{W_0} оборотов, которое сделает радиус-вектор $\overline{W_0 W}$ при обходе точкой W кривой L, называется порядком кривой L относительно точки W_0. Заметим, что это понятие может применяться и к незамкнутым кривым.

Из предыдущих рассуждений следует:

$$k_{W_0} = j_{W_0} + \nu. \tag{13}$$

Теорема III (Коши). Число k_{W_0} значений z, обращающих в W_0 функцию $W = f(z)$, мероморфную в области C, и лежащих в этой области, равно порядку j_{W_0} относительно точки W_0 кривой L, соответствующей простому контуру S области C, увеличенному на число ν полюсов этой функции внутри C.

В частности, число $n = k_0$ нулей функции $f(z)$ внутри C определяется равенством:

$$n = j_0 + \nu. \tag{14}$$

Если функция $W = f(z)$ голоморфна в области C, то

$$k_{W_0} = j_{W_0}. \tag{15}$$

Вычисление порядка данной кривой. Если разбить L на ряд отдельных простых контуров, то нетрудно видеть, что

$$j_{W_0} = s_{W_0} - t_{W_0}, \tag{16}$$

где s_{W_0} — число положительных, а t_{W_0} — отрицательных простых контуров, окружающих точку W_0. Вся плоскость W кривой L разбивается этой кривой на ряд зон с различными значениями j_{W_0}, а следовательно, и с различными значениями k_{W_0}.

Из сравнения теорем I и III вытекает следующая теорема.

Теорема IV [1]). Если функция $W = f(z)$ мероморфна в конечной области C с простым контуром S, которому на плоскости W соответствует простая кривая L (которая может несколько раз налегать на самое себя), содержащая внутри точку $W = 0$, то число n нулей функции $f(z)$ в этой области

---

[1]) Эта теорема представляет обобщение теоремы Макдональда, которая относится к случаю, когда $f(z)$ — голоморфна, а L — окружность с центром $W = 0$. См. Whittaker and Watson. A course of modern analysis. Cambridge 1915 (p. 121), а также Proc. London Math. Soc XXIX (1898).

связано с числом m нулей производной $f'(z)$ в той же области соотношением

$$n - m = 1 - l, \tag{17}$$

где l — число отдельно лежащих внутри C полюсов функции W. Это следует из равенств (4) и (14), принимая во внимание, что $i = j_0$.

Равенство (17) остается справедливым, если заменить в нем n числом k_{W_0}, если только тогда W_0 расположена внутри L.

Положим, при сохранении условий теоремы IV, что $m = 0$. Из равенства (17) следует, что при этом возможны лишь 2 случая: $l = 0$ или $l = 1$ (так как $n > 0$). Разберем оба случая отдельно:

a) $l = 0$, а значит и $\nu = 0$. Равенство (4) дает $i = +1$, откуда следует, что и $j_{W_0} = 1$, где W_0 — точка внутри L, в силу чего равенство (14) дает, что $k_{W_0} = 1$.

b) $l = 1$. В области C имеется единственный полюс, положим, кратности α ($\alpha \geq 1$). В этом случае $i = -\alpha$, $k_{W_0} = 0$ и $k_{W_1} = \alpha$, где W_0 — точка, лежащая внутри L, а W_1 — снаружи.

Мы приходим к следующему результату:

Следствие 4 [1]. Если $W = f(z)$ мероморфна и не имеет нулей производной в области C с простым контуром S, которому на плоскости W соответствует также простая кривая L (которая может, вообще говоря, налегать на самое себя), то $W = f(z)$: 1) либо отображает область C на внутреннюю по отношению к L часть плоскости W с сохранением конформности во всех точках, 2) либо отображает C α — кратно ($\alpha \geq 1$) на внешнюю часть плоскости W также конформно, за исключением точки $W = \infty$, где в случае $\alpha > 1$ будет точка разветвления (порядка $\alpha - 1$).

В случае 1) L будет кривой положительной (и притом обязательно одновитковой), в случае 2) L будет кривой отрицательной. Это обстоятельство может служить указанием на то, с каким случаем мы имеем дело.

Некоторые обобщения теорем I, II и III. Теоремы I и II непосредственно распространяются и на тот случай, когда функция $W = f(z)$ имет в области C, кроме полюсов, и логарифмические особенные точки [в которых она представляет собою сумму мероморфной функции и члена вида $A \log (z - a)$]. Так как ее производная $f'(z)$ остается в этом случае мероморфной, то все доказательство остается в силе. Заметим, что

---

[1]) Указанием на возможность этого следствия из равенства (17) я обязан проф. В. И. Смирнову, в диссертации которого: „Задача обращения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка“ доказан частный случай этого предложения. Условия этого предложения будут выполнены, если $f(z)$ есть отношение двух независимых решений линейного уравнения 2-го порядка, из чего видна его важность для теории дифференциальных уравнений.

в этом случае кривая L уже не будет, вообще говоря, замкнутой, тем не менее ее число витков i будет числом целым.

Нетрудно обобщить теоремы I и III на случай непростой замкнутой кривой S. Положим, что подобная кривая S с числом витков i расположена в области T плоскости z, в которой функция $W=f(z)$ остается мероморфной. Кривая S разбивает область T на ряд зон, которым соответствуют разные значения порядка j этой кривой. Пусть j_r обозначает порядок кривой S относительно точек r-ой зоны, а m_r и μ_r соответственно обозначают числа нулей и полюсов производнай $f'(z)$, расположенных в r-ой зоне. Можно показать, что число витков I кривой L, которая соответствует на плоскости W нашей кривой S, определяется следующей формулой:

$$I=i+\sum_r j_r(m_r-\mu_r), \tag{18}$$

где суммирование производится по всем зонам области T.

Точно также можно показать, что

$$J_{W_0}=\sum_r j_r\left(k_{W_0}^{(r)}-\nu^{(r)}\right), \tag{19}$$

где J_{W_0} — порядок кривой L относительно некоторой точки W_0 плоскости W, а $k_{W_0}^{(r)}$ и $\nu^{(r)}$ соответственно обозначают числа нулей и полюсов функции $f(z)-W_0$, расположенных в r-ой зоне.

Формулы (4) и (13) являются частными случаями формул (18) и (19).

§ 3. О Римановых поверхностях.

Теоремы I и II могут быть истолкованы, как определенные соотношения на Римановых поверхностях. Ограничимся случаем, когда W есть рациональная функция от z:

$$W=R(z). \tag{20}$$

При этом z, рассматриваемой, как функция от W, соответствует определенная распространенная по плоскости W Риманова поверхность R с конечным числом листов n, между которой и плоскостью переменной z устанавливается однозначное соответствие. При обходе точкой z простого контура S, ограничивающего некоторую область C (область C считается расположенной слева от направления обхода), точка W опишет замкнутую кривую L, которая будет простой на Римановой поверхности и рассечет ее на 2 части (как поверхность рода 0).

Ту из этих частей, которая расположена слева от L (и, следовательно, соответствует области C), назовем частью R_1, а вторую—частью R_2.

Нулям производной функции $R(z)$, находящимся внутри области C, соответствуют конечные точки разветвления части R_1, а полюсам функции $R(z)$ — бесконечно-удаленные точки этой части, которые могут быть одновременно и точками разветвления.

Разберем подробнее тот случай, когда область C конечна (случай теоремы I). Положим, что в части R_1 всего имеется Q точек разветвления, из них q—на конечном расстоянии, а p—бесконечно-удаленных ($Q=p+q$). Очевидно, что

(21) $$q=m.$$

(22) $$p=\nu-l,$$

где обозначения сохранены те же, что и в § 1.

Подставляя в равенство (4) значения m и l из равенств (21) и (22), приходим к следующему соотношению для части R_1:

(23) $$i=Q-2\nu+1.$$

Здесь i обозначает число витков кривой L, а ν — число бесконечно-удаленных точек части R_1.

Нетрудно показать, что соотношение (23) для части R_1 сохраняется и в том случае, когда область C содержит бесконечно-удаленную точку. Мы убеждаемся, таким образом, в том, что соотношение (23) применимо к любой части поверхности R (какова бы ни была соответствующая ей область C). Мы можем поэтому совершенно отвлечься от плоскости z и выразить результат в такой форме:

Теорема V. Если R_1 есть часть Римановой поверхности (рода 0), ограниченная кривой L, простой на этой поверхности и которой приписано такое направление, чтобы R_1 была расположена слева от L, то между числом витков i кривой L, числом Q точек разветвления и числом ν бесконечно-удаленных точек части R_1 существует зависимость

$$i=Q-2\nu+1.$$

В частности, когда часть R_1 конечна

(24) $$i=Q+1.$$

Соотношение (23) объединяет в себе формулы (4) и (6). Все следствия из этих формул находят свою интерпретацию на поверхности R.

Из соотношения (23) чрезвычайно просто вытекает следующее соотношение для Римановых поверхностей рода 0:

(25) $$P-2n+2=0,$$

где P—полное число точек разветвления, а n—полное число листов рассматриваемой поверхности. Это соотношение представляет собою частный случай известной формулы Римана, относящейся к поверхностям любого рода.

Uber die Anzahl der Nullstellen der Funktion und ihrer Ableitung.

S. Gerschgotin.

Zwischen den Eigenschaften der Funktion $W = f(z)$ in einem Gebiete C der Ebene der Veränderlichen z und dem Charakter der Kurve L, welche die Abbildung des Randes S des Gebietes C auf die W—Ebene darstellt, gibt es einen nahen Zusammenhang, und als einen Ausdruck desselben können wir den berühmten Cauchyschen Satz über die Anzahl der Nulstellen der Funktion betrachten. Die vorliegende Arbeit dringt in diesen Zusammenhang viel tiefer ein. Hier wird ein Satz bewiesen, welcher eine bestimmte Analogie mit dem Cauchyschen aufweist. Dieser Satz lautet, wie folgt. Die Differenz der Anzahl der Nullstellen und der Pole der Ableitung $f'(z)$ im Gebiete C ist um 1 minder, als die Windungszahl der Kutve L. Dabei wird unter der Windungszahl der in vollen Umdrehungen gemessene Winkel verstanden, um den sich die Tangente an die Kurve L bei voller Beschreibung dieser Kurve dreht. Aus dem Vergleiche dieses Satzes mit dem von Cauchy folgen auf sehr einfache und natürliche Weise einige sovie neue, als auch schon in weniger allgemeinen Form bekannte Resultate.

Am Schlusse dieser Arbeit wird eine geometrische Deutung unseres Fundamentalsatzes in Form einer bestimmten Relation auf der Riemannschen Fläche gegeben.

Ueber den Algorithmus der Erhöhung.

B. Delaunay.

Im Iahre 1915 gelang es mir die unbestimmte Gleichung $X^3q+Y^3=1$ vollständig zu lösen *). Das war überhaupt das erste Beispiel einer Lösung einer (nicht trivialen) binären kubischen Gleichung. Der entscheidende Umstand lag damals in der Bemerkung dass aus $\varepsilon_0{}^m=P.\sqrt[3]{q}+Q$ und den conjugierten Gleichungen man $\varepsilon_0{}^m+\theta.\varepsilon_0{}'^m+\psi.\varepsilon_0{}''^m=0$ bekommt, wo $\theta=e^{\frac{2\pi i}{3}}=\zeta$; $\psi=e^{\frac{4\pi i}{3}}=\zeta^2$ sind. Wenn man sich also den Beweis verschafft dass m sich nicht durch 3 u 2 teilen lässt, so kann man die Einheitswurzeln ζ und ζ^2 unter die Exponenten m hineinführen und denn Schluss ziehen dass $\zeta.\varepsilon_0{}'+\zeta^2.\varepsilon_0{}''$ (oder $\zeta^2.\varepsilon_0{}'+\zeta.\varepsilon_0{}''$), als Teiler von $\varepsilon_0{}^m$, eine Einheit ist, woraus man eine neue nicht triviale Bedingung erhält. [Das einzige wichtige Resultat über die unbestimmten Gleichungen 3-ten Grades, welches nicht meinen in Abhandlungen von 1915 und 1922 schon enthaltan war, erhielt T. Nagell (1925) **) indem er diese meine Methode auf die etwas allgemeinere Gleichung $AX^3+BY^3=1$ anwandt und mit ihrer Hilfe die Lösung dieser Gleichung auf diejenige meiner Gleichung $X^3q+Y^3=1$ zurückführte]. Man sieht aber nicht wie man diese Methode für die Gleichungen, welche nicht mit dem reinen, sondern mit dem allgemeinen kubischen Körper verknüpft sind, verwenden könnte, weil in diesem Falle θ und ψ keine Einheitswurzeln sind. Darum habe ich noch seit 1916 eine zweite Methode verwendet (den Algorithmus der Erhöhung) welche mich im Iahre 1919 zum vollständigen Beweise meines Hauptsatzes über die Anzahl der Darstellungen der Zahlen durch binäre kubische Formen von negativen Discriminante führte ***).

Ich will hier einige weitere Untersuchungen (welche in den C. R. 1921 und 1924 skiziert wurden) über diese meine zweite Methode mitteilen.

---

*) Journal der Math Ges. zu Charkow. 1915, so wie Mem. der S. Petersb. Akad. d. Wiss. 1922.

**) Journal de Math pures et appliquées, 1925.

***) Memoiren der S. Petersb. Akad. d Wiss. 1922.

1. Ueber eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der unbestimmten Gleichung $\Phi(x, y) = 1$. Sei $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Ey^3 = (A, B, C, E) = \Phi(x, y)$ eine gegebene binäre kubische Form, und seien ω_1 nnd ω_2 die Wurzeln der Gleichungen $\omega_1{}^3 - B\omega_1{}^2 + AC\omega_1 - A^2E = 0$ und $\omega_2{}^3 - C\omega_1{}^2 + BE\omega_2 - AE^2 = 0$, wobei $\omega_1\omega_2 = AE$. Man kann leicht beweisen (s. dieses Journal S. 40) dass der Modul $[\omega_1\ \omega_2\ 1]$ ein Ring ist. Wir werden diesen Ring $O(\Phi)$ oder $O[\omega_1\ \omega_2\ 1]$ bezeichnen. Seine Discriminante ist der Discriminante von Φ gleich. Aequivalenten Formen entspricht ein und derselbe Ring. Wie man es leicht aus der Theorie der Idealen sieht, kann nicht jede Form Φ als Norm (in $\Omega(\Phi) = \Omega\omega_2$) einer Zahl von der Form $\lambda \cdot X + \mu \cdot Y$, wo λ und μ ganze Zahlen aus $\Omega(\Phi)$ sind, dargestellt werden. Wenn aber Φ die Zahl 1 darzustellen fähig ist, so ist sie einer „ganzen" Form $f(x, y)$, d. h. einer solchen, bei welcher $E = 1$ ist, äquivalent, z. B. $(A, B, C, E) = (q, -p, n, 1) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, und wenn ρ die Wurzel von $\rho^3 = n\rho^2 + p\rho + q$ ist, so bekommen wir $(A, B, C, E) = N_\Omega(\lambda \cdot X + \mu \cdot Y)$, wo $\lambda = \alpha\rho + \gamma$; $\mu = \beta\rho + \delta$, d. h. hat dann Φ eine solche „ganze" Zerlegung in seinem eigenen Ringe, da $O(\Phi) = O[\rho^2, \rho, 1]$ ist. Wenn Φ primitif ist, was wir voraussetzen wollen, so sind die Zahlen λ, μ relatif prim. Wir haben aber $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\omega_2}{E}$ und also bekommen wir $E = \mu j$; $\omega_2 = \lambda \cdot j$, wo j eine ganze algebraische Zahl aus $\Omega(\Phi)$ ist. Die Zahl $\alpha E - \beta \cdot \omega_2$ des Ringes $O(\Phi)$ ist $= (\alpha \cdot \mu - \beta \cdot \lambda)\, j = j$, weil $\alpha \cdot \mu - \beta \cdot \lambda = 1$ ist. Das Ideal (ω_2, E) des Ringes $O(\Phi)$ muss also ein Hauptideal dieses Ringes sein. Wenn die Form Φ gegeben ist, kann man durch bekannte Methoden entscheiden ob das Ideal (ω_2, E) ein Hauptideal ist, und im Fall wo dies ist, die zugehöhrige gahze algebraische Zahl j berechnen. Dann können nur $\lambda = \frac{\omega_2}{j}$ und $\mu = \frac{E}{j}$ sein, oder von diesen Zahlen beide durch einen und denselben Einheitsfactor verschieden sein. „Für die Möglichkeit der Lösung der Gleichung $\Phi(x, y) = 1$ ist also das Vorhandensein einer solchen Zerlegung von Φ in seinem eigenen Ringe notwendig".

Beispiele zeigen aber dass diese Bedingung noch nicht hinreichend ist.

2. Ueber zwei Kongruenzen welchen alle Lösungen P, Q von $\Phi(x, y) = 1$ genügen müssen, wenn Φ eine binäre kubische Form von negativen Discriminante ist. Setzen wir voraus dass diese Bedingung erfüllt ist, und sei $\lambda = r\omega_1 + s\omega_2 + t$; $\mu = u\omega_1 + v\omega_2 + w$. Wenn wir $\Phi(P,Q) = 1$ haben, so ist $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q$ eine positive Einheit des Ringes $O(\Phi)$. Wenn die Form Φ von negativen Discriminante ist, so hat der Ring $O(\Phi)$ nur eine einzige unabhängige Fundamentaleinheit. Sei $\varepsilon_0 = a\omega_1 + b\omega_2 + c$ die direckte positive Fundamentaleinheit d. h. diejenige für welche $0 < \varepsilon_0 < 1$ ist.

Man kann die 9 Zahlen a, b, c; r, s. t; u, v, w aus den Zahlen A, B, C, E durch bekannte Methoden berechnen. Man hat also $\lambda \cdot P + \mu \quad Q = \varepsilon_0^{\ m}$. Man kann annehmen dass $m > 0$ ist, weil, wie man es leicht aus Zahlengeometrischen Gründen sieht, Lösungen (P, Q) mit $m < 0$ bei gegebenen λ, μ nur mit solchen m vorkommen können welche absolut genommen eine gewisse angebbare (nicht grosse) Grenze h nicht übersteigen. Man kann sie z. B. sogar auch alle finden. Oder kann man anstatt λ und μ, $\lambda \cdot \varepsilon_0^{\ -h}$, $\mu \cdot \varepsilon_0^{\ -h}$ nehmen, und dann werden gewiss schon keine Lösungen mit $m < 0$ vorhanden sein. Wir haben also $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q = (rP + uQ)\ \omega_1 + (sP + vQ)\quad \omega_2 + (tP + wQ) = F\omega_1 + + G\omega_2 + H = \varepsilon = \varepsilon_0^{\ m} = (a\omega_1 + b\omega_2 + c)^m$. Wenn wir diese Gleichung für die konjugierten Ringe schreiben und substragieren, erhalten wir $F\ (\omega_1{}' - \omega_1{}'') + G\ (\omega_2{}' - \omega_2{}'') = \varepsilon_0{}'^m - \varepsilon_0{}''^m = (\varepsilon_0{}' - \varepsilon_0{}'') \cdot (U\omega_1 + + V_2\omega + W) = [a\ (\omega_1{}' - \omega_1{}'') + b\ (\omega_2{}' - \omega_2{}'')] \cdot (U\omega_1 + V\omega_2 + W)$ wo U, V, W auch ganze rationale Zahlen sind. Wir haben

$$\omega_1{}' - \omega_1{}'' = \frac{AE\,(\omega_2{}'' - \omega_2{}')}{\omega_2{}'\ \omega_2{}''} = \frac{AE\,\omega_2\,(\omega_2{}'' - \omega_2{}')}{AE^2} = -\frac{\omega_2}{E}\,(\omega_2{}' - \omega_2{}'').$$

Also bekommen wir, nach geeigneter Kürzung, $-F\omega_2 + EG = = (-a\omega_2 + Eb) \cdot (U\omega_1 + V\omega_2 + W)$. Die Vergleichung der Koefficienten gibt 3 Gleichungen durch deren Lösung wir $\Delta U = a\ (bF - aG)$; $\Delta \cdot V = b\ \ (bF - aG)$; $\Delta \cdot W = b\ \ (aC - bE)\ \ G + a\ \ (aA - bB)\ F$ bekommen, wo $\Delta = a^3A - a^2bB + ab^2C - b^3E$ ist. Sei $\delta = (a, b)$ und $a = a_1\delta$; $b = b_1\delta$ und bezeichnen wir $\dfrac{\Delta}{\delta^3}$ durch $\varkappa$, dann hahen wir $\varkappa \cdot \delta \cdot U = a_1\ \ (b_1F - a_1G)$; $\varkappa\delta V = b_1\ \ (b_1F - a_1G)$; $\varkappa \cdot \delta \cdot W = = b_1\ (a_1C - b_1E)\ G + a_1\ \ (a_1A - b_1B)\ F$. Aus den beiden ersten Gleichungen, da $(a_1, b_1) = 1$ ist, bekommen wir $b_1F - a_1G \equiv 0 \pmod{\varkappa\delta}$ oder

$$P \cdot K + Q \cdot L \equiv 0 \pmod{\varkappa\delta} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{wo } K = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ r & s \end{vmatrix};\ L = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ u & v \end{vmatrix} \text{ ist, und aus der dritten}$$

$$P\ \ \mathrm{K} + Q \cdot \mathrm{L} \equiv 0 \pmod{\varkappa\delta} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{wo } \mathrm{K} = \begin{vmatrix} Ca_1\ b_1 - Eb_1{}^2, & Ba_1\ b_1 - Aa_1{}^2 \\ r & s \end{vmatrix};$$

$$\mathrm{L} = \begin{vmatrix} Ca_1\ b_1 - Eb_1{}^2, & Ba_1\ b_1 - Aa_1{}^2 \\ u, & v \end{vmatrix}.$$

Diesen Kongruenzen (1) und (2) müssen alle Lösungen P, Q der Gleichung $\Phi\ (x, y) = 1$ genügen.

3. Ueber den Fall, in welchem die Kongruenzen (1) und (2) identisch erfüllt, sind. Sei λ, μ eine Zerlegung von Φ

n $O(\Phi)$, dann ist $\lambda_k = \lambda \cdot \varepsilon_0^{\kappa}$; $\mu_\kappa = \mu \cdot \varepsilon_0^{\kappa}$ auch eine solche Zerlegung. Wenn wir die Zahlen K, L, K, L für diese Zerlegung durch K_κ, L_κ K_κ, L_κ bezeichnen, so berechnet man leicht dass $K_1 = K \cdot c + \delta \cdot \mathrm{K}$, $L_1 = Lc + \delta \mathrm{L}$ und $\mathrm{K}_1 \equiv \mathrm{K}c + \delta K \varphi$; $\mathrm{L}_1 \equiv \mathrm{L} \cdot c + \delta \cdot L \cdot \varphi \pmod{\varkappa\delta}$ ist, wo $\varphi = -ACa_1^2 + (AE+BC)a_1 b_1 - BEb_1^2$ ist. Wenn die Kongruenzen (1) und (2) identisch erfüllt sind, d. h. $K \equiv L \equiv \mathrm{K} \equiv \mathrm{L} \equiv 0 \pmod{\varkappa\delta}$ ist, so sind also die Kongruenzen (1_κ) und (2_κ) auch identisch erfüllt.—Sei σ ein gemeinsamer Teiler von K und L, dann ist σ auch Teiler von $\begin{vmatrix} r & s \\ u & v \end{vmatrix}$, da a_1 und b_1 relativ prim sind. $\begin{vmatrix} r & s \\ u & v \end{vmatrix}$ ist der Index des Moduls $[\lambda, \mu, 1]$ in Bezug auf den Modul $[\omega_1, \omega_2, 1]$. Setzen wir voraus dass die Gleichung $\Phi(x, y) = 1$ eine Lösung hat, dann ist $\lambda = (\alpha\rho + \gamma) \cdot \varepsilon$; $\mu = (\beta\rho + \delta) \cdot \varepsilon$, wo ε eine Einheit ist, und eine Einheit des Ringes $[\omega_1. \omega_2, 1] = [\rho^2, \rho, 1]$, weil man $\alpha \cdot \mu - \beta \cdot \lambda = \varepsilon$ hat. Es sei $\varepsilon = \mathrm{A}\rho^2 + \mathrm{B}\rho + \Gamma$, wir haben dann

$$\begin{vmatrix} r & s \\ u & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}\alpha n + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{A}\gamma, \\ \mathrm{A}\beta n + \mathrm{B}\beta + \mathrm{A}\delta, \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \mathrm{A}\alpha p + \Gamma\alpha + \mathrm{B}\gamma \\ \mathrm{A}\beta p + \Gamma\beta + \mathrm{B}\delta \end{matrix}\Bigg| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{A}n + \mathrm{B}, & \mathrm{A} \\ \mathrm{A}p + \Gamma, & \mathrm{B} \end{vmatrix} = \mathrm{AB}n + \mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2 p - \mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A}',$$

wo A' der Koefficient von ρ_1^2 bei $\eta = \varepsilon^{-1}$ ist. Jeden g. g. Teiler von K und L ist also Teiler von diesem A'. Wenn $K \equiv L \equiv 0 \pmod{\varkappa\delta}$ und σ das Produkt aller verschiedenen Primzahlen ist, welche in $\varkappa$ aufgehen, dann muss A' durch $\sigma \cdot \delta$ teilbar sein. Die Zahl $N[\mathrm{A}'(n-\rho) + \mathrm{B}']$ ist der Index von η in Bezug auf $O(\rho)$ und, da η eine Potenz von ε_0^{-1} ist, muss sie sich durch den Index $\varkappa\delta^3$ von ε_0 in Bezug auf $O(\rho)$ teilen. Man sieht aber leicht, dass A' und B' δ als gemeinsamen Teiler haben müssen, d. h. $\mathrm{A}' = \mathrm{A}'_1 \cdot \delta$; $\mathrm{B}' = \mathrm{B}_1' \cdot \delta$, und also muss $N[\mathrm{A}_1'(n-\rho) + \mathrm{B}_1']$ sich durch $\varkappa$ teilen. Da aber $\mathrm{A}_1' \equiv 0 \pmod{\varkappa}$ ist, so muss $\mathrm{B}_1'^3 \equiv 0 \pmod{\varkappa}$ sein, d. h. $\mathrm{B}_1' \equiv 0 \pmod{\sigma}$ sein. Wenn also die Kongruenz (1) identisch erfüllt ist, so ist σ Teiler von A_1' und B'_1. Wenn wir jetzt zu den Kongruenzen (1_1) (2_1) übergehen, so müssen sie sich nach der obengemachten Bemerkung, wenn (1) und (2) sich identisch erfüllen, auch identisch sein. Wenn wir also $\varepsilon \cdot \varepsilon_0 = \mathrm{A}''\rho^2 + \mathrm{B}''\rho + \Gamma''$ und $\varepsilon_0 = \bar{a}\rho^2 + \bar{b}\rho + \bar{c}$ setzen, so müssen auch A_1'' und B_1'' sich durch σ teilen. Wenn wir aber A_1'', B_1'' durch A', B', Γ' und $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ausdrücken, so erhalten wir dass $\bar{a}_1\Gamma'$ und $\bar{b}\Gamma'$ sich durch σ teilen müssen, wenn man $\bar{a} = \bar{a}_1\ \delta$; $\bar{b} = \bar{b}_1 . \delta$ setzt, da aber $(\bar{a}_1\ \bar{b}_1) = 1$ ist (da, wie man es leicht sieht der g. g. Teiler von $\bar{a}$ und $\bar{b}$ ist derselbe wie derjenige von a und b, also δ) und Γ nicht durch σ teilbar sein kann, wenn $\sigma > 1$ ist, so muss $\sigma = 1$ sein. Daraus schliessen wir dass $\varkappa = \pm 1$ ist. Die Zahl $\rho = a_1\omega_1 + b_1\omega_2$ in $O(\Phi)$ hat demnach in Bezug auf $O(\Phi)$ den Index ± 1, und also ist die Form $(q, -p, n, 1)$, welche die Wurzel ρ hat, eine ganze der Form Φ äquivalente Form. Es ist so eine Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ gefunden. Wir werden aber gleich zeigen dass es deren ja auch zwei gefunden werden können.

In der Tat, aus $K \equiv L \equiv \mathrm{K} \equiv \mathrm{L} \equiv 0 \pmod{\varkappa\delta}$ bekommen wir leicht dass $r \equiv s \equiv u \equiv v \equiv 0 \pmod{\varkappa\delta}$ ist; z. B. $K \cdot (Ba_1b_1 - Aa_1^2) - \mathrm{K}b_1 = (-Aa_1^3 + Ba_1^2b_1 - Ca_1b_1^2 + Eb_1^3) \cdot s = -\varkappa \cdot s$. Es muss also $\mathrm{A}' = \begin{vmatrix} r & s \\ u & v \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\delta^2}$ sein. Die Einheit η und also auch ε liegt demnach im Ringe $O\,(\delta\rho)$. Es sei $\varepsilon = \varepsilon_0^{\tau}$, d. h. $(\overline{a} \cdot \delta\rho^2 + \overline{b_1}\delta\rho + \overline{c})^{\tau} = \mathrm{A}_1\delta^2\rho^2 + \mathrm{B}_1\delta\rho + \Gamma$. Durch die vergleichung der Koefficienten von ρ^2 bekommen wir daraus dass $\tau \cdot \overline{a_1}\ \ \delta\overline{c}^{\tau-1} \equiv 0 \pmod{\delta^2}$ ist. Da aber $(\overline{c}, \delta) = 1$ ist und $(\tau, \delta) = 1$ vorausgesetzt werden kann (da man anderfals von λ; μ zu $\lambda \cdot \varepsilon_0^{\kappa}$; $\mu \cdot \varepsilon_0^{\kappa}$ übergehen kann, so dass man anstatt τ, $\tau - k$ hat, und dabei k so wählt, dass $(\tau - k, \delta) = 1$ ist). So hat man $\overline{a_1} \equiv 0 \pmod{\delta}$. Die Einheit ε_0 selbst liegt also in dem Ringe $O\,(\delta\rho)$. Der Index von ε_0 in Bezug auf $O\,(\rho)$ ist gleich $\pm\delta^3$, da $\varkappa = \pm 1$ ist. Es ist also ε_0 eine Einheit im Ringe $O\,(\delta\rho)$ welche in Bezung auf diesen Ring den Index ± 1 hat. Die dem Ringe $O\,(\delta\rho)$ gehörige Form $(\delta^3q, -\delta^2p, \delta n, 1)$ ist also einer „reversiebelen" Form $(1, -p', n', 1)$ äquivalent. Die Gleichung $(\delta^3q, -\delta^2p, \delta n, 1) = 1$ hat also wenigstens 2 Lösungen $(0,1)$ und $(\delta X_1, Y_1)$ und folglich hat auch die Gleichung $(A, B, C, E) = 1$ 2 Lösungen, weil $(A, B, C, E) \backsim (q, -\rho, n, 1)$ ist. Wir haben das Theorem: „W e n n d i e b e i d e n K o n g r u e n z e n (1) u n d (2) i d e n t i s c h e r f ü l l t s i n d u n d $\varkappa \mp \pm 1$ i s t, h a t d i e G l e i c h u n g $\Phi\,(x, y) = 1$ k e i n e L ö s u n g e n, w e n n a b e r $\varkappa = \pm 1$ i s t, s o h a t s i e z w e i L ö s u n g e n, w e l c h e m a n a u c h b e r e c h n e n k a n n".

4. A l g o r i t h m u s d e r E r h ö h u n g. Seien die Kongruenzen (1) und (2) nicht beide identisch erfüllt. Sei z. B. (1) nicht identisch. Wenn man dann durch d den g. g. Teiler von K, L und $\varkappa\delta$ bezeichnet und wenn $K = dK'$: $L = dL'$; $\varkappa\delta = d\varkappa'$ ist, so wird $PK' + QL' \equiv 0 \pmod{\varkappa'}$. Wenn jetzt weiter $(K', L') = d'$ und $K' = K'' \cdot d'$; $L = L''\ d'$ ist, so haben wir $(d', \varkappa') = 1$ und also $P \cdot K'' + Q \cdot L'' \equiv 0 \pmod{\varkappa'}$ wo schon $(K'', L'') = 1$ ist. Wenn wir von der Form (A, B, C, E) zu der Form (A', B', C', E') durch die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha, & -L'' \\ \gamma, & K'' \end{pmatrix}$ übergehen, wo $\alpha \cdot K'' + \gamma \cdot L'' = 1$ ist, so bekommen wir $A'P'^3 + B'P'^2Q' + C'P'Q'^2 + E'Q'^3 = 1$, wo $P' \equiv 0 \pmod{\varkappa'}$ ist, weil $P' = P \cdot K'' + Q\ L''$ ist. Setzen wir $P' = \overline{P}\varkappa'$ und $\overline{A} = A'\varkappa'^3$; $\overline{B} = B'\varkappa'^2$; $\overline{C} = C' \cdot \varkappa'$; $\overline{E} = E$, so bekommen wir die Gleichung $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{E}) = 1$ auf deren Lösung die Lösung der gegebehen Gleichung $(A, B, C, E) = 1$ reduciert ist. Die Form $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{G}, \overline{E})$ hat aber eine $\varkappa'^6$ mal grössere Discriminante als die gegebene Form (A, B, C, E), und $\varkappa'$ ist $\mp \pm 1$ weil wir vorausgesetzt haben dass (1) nicht identisch ist. Von der Form $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{E})$ schreiten wir in derselben Weise zu einer Form $(\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}, \overline{\overline{E}})$ u. s. w. Dieses Verfahren kann nur dann abbrechen, wenn auf einem der Schritte entweder die zugehöhrige Form keine Zerlegung in

seinem eigenen Ringe hat, und dan hat die Gleichung $\Phi\ (x, y) = 1$, keine Lösungen, oder die Kongruenzen (1) und (2) identisch werden, und dann hat die Gleichung $\Phi\ (x, y) = 1$, wie wir gezeigt haben, entweder keine, oder 2 Lösungen, welche man dabei auf diesem Schritte auch finden kann.

5. Erster Fall, wenn die Gleichung $\Phi\ (x, y) = 1$ eine und nur eine Lösung hat. In deisem Falle, welcher sehr oft vorkommt, wird nach § 3 dieser Algorithmus gewiss *nicht endigen.* Die nähere Untersuchung dieses sehr merkwürdigen Umstandes behalten wir uns auf ein anderes Mal vor.

6. Zweiter Fall, wenn die Gleichung $\Phi\ (x, y) = 1$ wenigstens 2 Lösungen hat. In diesem Falle wird gewiss auf einem Schritte des Algorithmus der Erhöhung der Umstand auftreten das die Kongruenzen (1) und (2) identisch befriedigt werden. Das sieht man leicht aus Zahlengeometrischen Gründen welche wir im nähsten § auseinandersetzen wollen.

7. Das Annähern an die Lösungen mittels des Algorithmus der Erhöhung. Wenn man das quadratische Gitter (x, y), wo (x, y) alle Punkte der Ebene, welche in einem zu Grunde gelegtem rechtwinkeligen Koordinatensystem ganzzahlige Koordinaten x und y haben, betrachtet, so bilden alle Punkte (P, Q) deren ganzzahlige Koordinaten die Kongruenzen $K'' \cdot P + L''\ \ Q \equiv 0 \pmod{\varkappa'}$ erfüllen, oder der unbestimmten Gleichung $K'' \cdot P + L''\ \ Q = \varkappa' \cdot t$, wo t eine beliebige veränderliche ganze rationale Zahl ist, genügen, ein parallelogrammatisches Teilsystem in diesem Gitter. Iede weitere Erhöhung durch unseren Algorithmus führt immer zu einem neuen Teilsysteme, welches wenigstens einen 2 Mal grösseren Inhalt seines Grundparallelogrammes hat und immer den Punkt (0,0) enthält. Wenn eine Lösung (P_1, Q_1) vorhanden ist, so reduciert sich die ganze Sache zur Wegschaffung von Punktreihen, welche der Punktreihe (0,0) (P_1, Q_1) parallel sind. Das kann ohne Ende gehen, wie es im Falle wo es nur eine Lösung gibt, ja auch, wie wir es gezeigt haben, tatsächlich auftritt. Wen es aber zwei Lösungen gibt, (P_1, Q_1) und (P_2, Q_2), so kann der Inhalt des Grundparallelogramms den Inhalt des Parallelogramms (0,0) (P_1, Q_1) (P_2, Q_2) nicht übersteigen, weil dieses Parallelogramm in allen Teilsystemen vorkommen muss, und also muss der Algorithmus endigen. Wenn vir in jedem Teilsystem das Minimum, d. h. den Punkt $(x_0\ y_0)$, welcher der nächste zum (0,0) ist, bestimmen, so wird gewiss die kleinste Lösung (P, Q) der Gleichung $\Phi\ (x, y) = 1$ sich in der Reihe dieser aufeinanderfolgenden Minima finden. So kann man die Lösung auch im Falle des § 5, wenn der Algorithmus unendlich ist, aufsuchen.

8. Die Berechnung der Zahlen λ, μ für die erhöhten Formen. Seien λ und μ für die gegebene Form $\Phi\ (x, y)$ schon berechnet, wie dies in dem § 1 angedeutet wurde, also wie die Zahl ε_0. Wenn wir nach § 4 von Φ zu der Form Φ' durch die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & -L'' \\ \gamma & K'' \end{pmatrix}$ übergehen, so sind $\lambda' = \alpha\lambda + \gamma\mu$; $\mu' = \mu K'' - \lambda L''$. Setzen wir voraus das dies schon geschehen ist, d. h. $\lambda' = \lambda$; $\mu' = \mu$. Dann ist

$(A, B, C, E) = N(\lambda, \mu)$; $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{E}) = \overline{N}(\varkappa'\lambda, \mu) = (A\varkappa'^3, B\varkappa'^2, C\varkappa', E)$, die Basis dieser erhöhter Form ist $\overline{\omega}_1 = \varkappa'^2\omega_1$; $\overline{\omega}_2 = \varkappa'\omega_2 \cdot \varkappa' \cdot \lambda \cdot$ und μ ist eine Zerlegung von $\overline{\Phi}$ in $O(\Phi)$, sie muss aber eine Zerlegung $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$ in seinem eigenen Ringe $O(\overline{\Phi})$ haben, dann muss aber $\overline{\lambda} = \varkappa' \cdot \lambda \quad \varepsilon_0^{\tau}$; $\overline{\mu} = \mu \quad \varepsilon_0^{\tau}$ sein, wo τ ein ganzer positiver Exponent $< \nu$ ist, wenn ε_0^{ν} die erste Potenz ist welche in $O(\overline{\Phi})$ liegt.

9. Kriterium des Aufenthaltes. Es kann sein dass die Gleichung $\Phi(x, y) = 1$ gar keine Lösungen hat, man soll einen Umstand finden welcher auf einem oder anderen Schritte des Algorithmus der Erhöhung die Unnützlichkeit weiterer Rechnungen ins Licht setze. Wenn wir einen solches zuverlässiges Kriterium hätten, dessen Auftreten auf einem von Forn herein von oben begrenztem Schritte auftreten sollte, wäre das ganze Problem gelöst. Einen solches haben wir bis jetzt nicht gefunden. Wir können aber die folgenden zwei Kriterien anzeigen. Erstens kann es geschehen dass eine erhöhte Form keine Zerlegung in seinem eigenen Ringe hat, was man nach der Methode des § 8 immer beurteilen kann. Zweitens kann es geschehen dass die Kongruenzen (1) und (2) unvereinbar sind, was, wie man leicht sieht, dann und nur dann auftritt, wenn $\begin{vmatrix} r & s \\ u & v \end{vmatrix}$ nicht durch δ teilbar ist.

10. Zwei Beispiele. Sei die Form (2,0, 3,2), $D = -648$ gegeben; $\omega_1^3 + 6\omega_1 - 8 = 0$; $\omega_2^3 - 3\omega_2 - 8 = 0$, $\omega_1 - 1 = \varepsilon$ ist eine Einheit, die Zahlen λ und μ des Ringes O (2,0 3,2) müssen die Norm 2 haben; wenn man aber die bekannten Methoden benutzt, berechnet man leicht, dass im Ringe O (2,0, 3,2) es keine Zahlen mit der Norm 2 gibt. Die Form (2,0, 3,2) hat also keine Zerlegung in seinem eigenen Ringe. Hier tritt also der Fall des ersten Kriterium des Aufenthalts. Die Gleichung $(2,0\ 3,2) = 1$ hat also keine Lösungen. — Sei jetzt die Form (3,3, 4,2), $D = -516$ gegeben; $\omega_1^3 - 3\omega_1^2 + 12\omega_1 - 18 = 0$; $\omega_2^3 - 4\omega_2^2 + 6\omega_2 - 12 = 0$; wir berechnen die Zahlen λ und μ, sie sind $\lambda = -3 + \omega_2$; $\mu = 2 - \omega_1$; die Fundamentaleinheit des Ringes O (3,3, 4,2) ist $\varepsilon_0 = 23 - 7\omega_2$; $\delta = 7$; $\begin{vmatrix} r & s \\ u & v \end{vmatrix} = 1$ und ist durch 7 nicht teilbar, die Kongruenzen (1) und (2) sind also unvereinbar. Hier tritt also der Fall des zweiten Kriteriums des Aufenthaltes. Die Gleichung $(3,3\ 4,2) = 1$ hat also keine Lösungen. [Das ist u. a. die Form mit der kleinsten Discriminante welche die Zahl 1 aus nicht trivialen Gründen nicht darstellen kann].

11. Algorithmus der Erhöhung im Falle einer ganzen Form. Wenn die Form Φ „ganz" ist, z. B. $(q, -p, n, 1)$, so bekommen wir $K = a_1$; $L = 0$; $\mathrm{K} = a_1 b_1 n - b_1^2$; $\mathrm{L} = 0$ und also, da $(a_1, b_1) = 1$ ist, reducieren sich die beiden Kongruenzen (1) und (2) zu der einzigen $P \equiv 0 \pmod{\varkappa\delta}$, und wir bekommen so denjenigen Algorithmus der Erhöhung, welchen wir in unseren Abhandlung (1920 in C. R.) in den Memoiren der S.-Petersburger Akademie der Wissenschaften zum Beweise unseres Hauptsatzes, dass $(A, B, C, E) = 1$ nicht mehr als 5 Lösungen haben kann, benutzten.

12. Kriterium des Aufenthalts im Falle einer ganzen Form. In diesem Falle können niemals die Kriterien des § 9 auftreten, man kann aber ein anderes Kriterium angeben (sein analoges gibt es auch für allgemeine Formen). Wenn $\rho^3 = n\rho^2 + p\rho + q$ ist und $\varepsilon_0 = a\rho^2 + b\rho + c$, so kommt die Auflösung von $(q, -p, n, 1) = 1$ auf die Auffindung aller Potenzen $(a\rho^2 + b\rho + c)^m$ welche von der Form $P\rho + Q$, d. h. „binom" sind. Wenn a und b resp. durch k^2 und k teilbar sind, dann kann man anstatt ρ, $k\rho$ nehmen. Eine Einheit, bei welcher es keine solche Zahl $k > 1$ existiert, werden wir deshalb „reduciert" nennen. Keine Potenz von ε_0 kann binom sein, wenn ε_0 reduciert ist und wenn es eine ungerade Primzahl π existiert durch welche sich a und b teilen. In der Tat es se $a = a_1\pi$; $b = b_1\pi$, aber $a_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, dann ist der Koefficient von ρ^2 in $\varepsilon_0{}^m$ gleich

$$m \cdot c^{m-1} \cdot \pi \cdot a_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} c^{m-2} \cdot \pi^2 \cdot A_2 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^{m-3} \pi^3 A_3 + \ldots$$

wo A_2, A_3 ... ganze rationale Zahlen sind. Dieser Koefficient kann nicht gleich o sein weil $(a_1, \pi) = 1$ und $(c, \pi) = 1$ ist, und also, wenn m genau durch π^τ teilbar ist, so haben wir (wenn $\pi > 2$ ist) $\pi^2 > 3$, $\pi^3 > 4$ u. s. w.—Wir werden jeden gemeinsamen Teiler von a und b „Teiler" der Einheit ε_0 nennen.—Sei ε^μ die niedrigste Potenz der Fundamentaleinheit ε_0 welche den Teiler π besitzt. Es können dann zwei Fälle eintreten: entweder wird der Koefficient von ρ^2 in $\varepsilon_0{}^\mu$ nur durch π teilbar, oder wenigstens durch π^2. Im ersten Falle werden wir π von „erster" Art und im zweiten Falle von „zweiter" Art in bezug auf ε_0 nennen. Es ist anderseits leicht zu sehen dass, wenn $\varepsilon_0{}^m$ den Teiler π hat, so ist, $\varepsilon_0{}^m$ eine Potenz von $\varepsilon_0{}^\mu$. Wenn wir also auf einem (nicht durchaus auf dem ersten) Schritte des Algorithmus der Erhöhung einen erhöhenden Multiplicator π begegnen, welcher eine Primzahl der Ersten Art in Bezug auf die anfängliche Fundamentaleinheit ist, so gibt es keine Lösungen und man kann die Rechnung aufheben. In allen Fällen wo wir diese Methode anwandten stiessen wir auf einen erthöhenden Multiplicator der ersten Art im allgemeinen auf dem ersten oder zweiten Schritte, und immer hat uns diese Methode die vollständige Lösung der Gleichung gegeben. Wir haben aber bis jetzt keinen Beweis gefunden dass es ind er Tat auf einem oder änderem Schritte des Algorithmus der Erhöhung, wenn es keine Lösungen sind, eine Primzahl der ersten Art begegnet wird.

Da es für ziemlich grosse π die Potenz $\varepsilon_0{}^\mu$ modulo π^2 zu berechnen sehr umständlich ist, so haben wir uns der folgenden zwei Determinanten, welche diese Rechnung erleichtern, bedient. Wir geben hier diese

Determinanten der Kürze wegen ohne Beweis. Wir werden varaussetzen dass π nicht ein Teiler der Discriminante von ρ ist. Dann kann die Primzahl π in $\Omega\rho$ nur entweder ein Produkt von 3 Primidealen $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ des ersten Grades, oder eines Ideals des 2-ten $\mathfrak{q}$ und eines des ersten Grades $\mathfrak{p}$ sein, sie kann aber nich selbst Primideal sein da sie ein Teiler der Norm von $-a\rho+b+an$ ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dass π von der zweiten. Art sei ist, im Falle $\pi=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$, $\Delta\equiv 0 \pmod{\pi}$ und im Falle $\pi=\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ $\nabla\equiv 0 \pmod{\pi}$, wo

$$\Delta=\begin{vmatrix} \sigma_1+\dfrac{\psi(x_1)\ (2ax_1+b)}{\varepsilon_1\cdot f'(x_1)}, & x_1, & 1 \\ \sigma_2+\dfrac{\psi(x_2)\ (2ax_2+b)}{\varepsilon_2\cdot f'(x_2)}, & x_2, & 1 \\ \sigma_3+\dfrac{\psi(x_3)\ (2ax_3+b)}{\varepsilon_3\ f'(x_3)}, & x_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

hier ist $f(x)=x^3-nx^2-px-q=(x-x_1)\ (x-x_2)\ (x-x_3)+$ $+\pi\cdot\psi(x)$; $\sigma_i=\dfrac{\varepsilon_i^{\pi-1}-1}{\pi}$; $\varepsilon_i=ax_i^2+bx_i+c$ (wo $x_i=x_1, x_2, x_3$); $f'(x)=3\ x^2-2nx-p$

$$\nabla=\begin{vmatrix} \dfrac{\varepsilon_1^{\pi-1}-1}{\pi}+\dfrac{\psi(x_1)\ (2ax_1+b)}{\varepsilon_1\ f'(x_1)}, & x_1, & 1 \\ \dfrac{(A-B\theta)^{\pi+1}-\nu}{\nu\pi}+\dfrac{\psi(\beta')\ (2a\beta'+b)}{(A+B\theta)\ f'(\beta')}, & \beta', & 1 \\ \dfrac{(A+B\theta)^{\pi+1}-\nu}{\nu\pi}+\dfrac{\psi(\beta'')\ (2a\beta''+b)}{(A-B\theta)\ f'(\beta'')}, & \beta'', & 1 \end{vmatrix}$$

wo $f(x)=(x-x_1)(x^2+hx+k)+\pi\ \ \psi(x)$; wo $-\pi<h<\pi$; $h=2h_1$ ist; $\theta=\sqrt{h_1^2-k}$; $\beta'=-h_1+\theta$; $\beta''=-h_1-\theta$; $a\beta'^2+b\beta'+c=$ $=A+B\theta$; $\nu=A^2-B^2(h_1^2-k)$; $\varepsilon_1=ax_1^2+bx_1+c$; $f'(x)=3x^2-$ $-2nx-p$.

13. Beispiel. $(2, 6, 3, 1)=1$; $D=-216$ (Ueber diese specielle Gleichung, welche mit $U^3-V^2=-2$ verknüpft ist findet man eine ganze kleine Literatur, die erste Auflösung erfolgte 1926 durch A. Brauer, s. Math. Zeitschr. 25 B. 3H. S. 499, welcher zeigte dass im Falle wenn in der Gleichung $U^3-V^2=-k$, $k=2$ ist, kann man sie durch eine specielle Methode auflösen. Ich habe aber durch den Algorithmus der Erhöhung unter anderem alle Gleichungen $(A, B, C, E)=1$, deren Discriminanten absolut genommen kleiner als 301 sind, noch im Iahre 1920 vollständig gelöst; also auch diese Gleichung). Man hat $(2, 6, 3, 1)\backsim(2, 3, 0, 1)$; $\rho^3=-3\rho+2$; $\varepsilon_0=-\rho^2-\rho+1$; $-a\rho+b+an=\rho-1$, d. h. $\varkappa=2$, $\delta=1$, also der erste Erhöherungs-

multiplicator ist $\pi = 2$. Man muss in den Ring $O(\bar{\rho})$ wo $\bar{\rho} = 2\rho$ ist übergehen. Wir erhalten $\varepsilon_0^2 = -\bar{\rho}^2 - 3\bar{\rho} + 5$; $-a\bar{\rho} + \bar{b} + \bar{a}n = \rho - 3$, und also der zweite Multiplicator ist $\pi = 47$. Da 47 ziemlich gross ist werden wir uns der augeführten Detirminanten bedienen. $47 = pq$ in $\Omega\rho$, wir müssen alsso ∇ berechnen. $x^3 + 3x - 2 = (x - 25)(x^2 - 22x + 111) + 47(x^2 - 14x + 59)$, d. h. $x_1 = 25$; $\varepsilon_1 = 649$; $\sigma = \frac{649^{46} - 1}{47} \equiv 34$ (mod. 47); $\beta' = 11 + \theta$, wo $\theta = \sqrt{10}$; $A + B\theta = = -141 - 23\theta$, $\nu = 872$ (mod. 47^2); die Zahl $872^{-1} \cdot 47^{-1} \cdot [(-141 + + 23\theta)^{48} - 872] \equiv 10\theta - 2$ (mod. 47). Wir bekommen also $\nabla \equiv \equiv 18\theta \not\equiv$ (mod. 47). Die Primzahl 47 ist also in Bezug auf $\varepsilon_0 = -\rho^2 - \rho + 1$ von der ersten Art, und also hat die Gleichung $(2, 6, 3, 1) = 1$ keine Lösungen. (Diese Gleichung bildet zufälligerweise das schwierigste Beispiel zwischen allen in denen $|D| \leqq 300$ ist. In fast allen anderen Fällen hat man keine Notvendigkeit sich der Δ oder ∇ zu bedienen.

Ich bin bis jetzt keiner einzigen Gleichung von der Form $AX^3 + + BX^2Y + CXY^2 + EY^3 = 1$ (mit $D < 0$) begegnet welche durch die Methode der §§ 9 und 12 ich allgemein nicht Lösen konnte. Und dennoch habe ich keinen Beweis dessen dass diese Methode in allen Fällen hinreichend ist.

Tabelle aller Lösungen aller Gleichungen $(A, B, C, E) = 1$ mit $0 < -D \leqq 300$.

D	(A, B, C, E)	(X, Y)
23	(1,0,−1,1)	(0,1)(1,0)(1,1)(−1,1)(4,−3)
31	(1,1,0,1)	(0,1) (1,0) (−1,1) (3,−2)
44	(1,1,−1,1)	(0,1)(1,0)(2,−1)(−103,56)
59	(1,2,0,1)	(0,1((1,0) (−2.1)
76	(1,3,1,1)	(0,1) (1,0) (−36,13)
83	(1,2,−2,1)	(0,1) (1,0)
87	(1,2,−1,1)	(0,1) (1,0)
104	(2,−1,0,1,)	(0,1) (2,−3)
107	(1,4,2,1)	(0,1) (1,0) (−7,2)
108	(2,0,0,1)	(0,1) (1,−1)
116	(2,0,1,1)	(0,1)
135	(1,3,0,1)	(0,1) (1,0) (−3,1)
139	(1,6,4,1)	(0,1) (1,0)
140	(1,5,3,1)	(0,1) (1,0)
152	(2,−2,1,1)	(0,1)
172	(2,0,2,1)	(0,1)
175	(1,3,−2,1)	(0,1) (1,0)
176	(1,3,−1,1)	(0,1) (1,0)
199	(1,4,1,1)	(0,1) (1,0)
200	(4,3,2,1)	(0,1)
204	(3,1,1,1)	(0,1)
211	(1,10,6,1)	(0,1) (1,0)
212	(2,4,1,1)	(0,1) (2,−1)
216	(2,3,0,1)	(0,1)
231	(1,5,−4,1)	(0,1) (1,0)
236	(1,−1,2,1)	(0,1)
239	(3,−1,0,1)	(0,1) (3,−5)
243	(1,12,-1,1)	(0,1) (1,0)
244	(2,4,5,1)	(0,1)
247	(1,4,−3,1)	(0,1) (1,0)
255	(1,8,5,1)	(0,1) (1,0)
268	(1,13,7,1)	(0,1) (1,0)
279	(1,5,2,1)	(0,1) (1,0)
283	(1,4,0,1)	(0,1) (1,0) (−4,1)
300	(2,2,4,1)	(0,1)

Об алгорифме повышения.

Б. Н. Делоне.

В настоящей статье автор излагает в весьма краткой форме свои дальнейшие исследования, относящиеся к выяснению того способа перехода от заданного неопределенного уравнения к другим со все большим и большим дискриминантом, который в мемуаре 1922 года, в Трудах Российской Академии Наук, дал автору возможность найти основную теорему о числе решений неопределенного уравнения $AX^3+BX^2Y+CXY+EY^3=1$, где (A, B, C, E) кубическая двойничная форма отрицательного определителя.

Sur quelques séries de polynomes.

V. Smirnoff.

1. Dans ses recherches sur les figures d'équilibre d'un liquide en rotation Liapounoff a rencontré le problème d'analyse suivant: P_0, P_1, P_2, ... étant des polynomes en variables x_1, x_2, ..., x_k, le degré de P_n ne dépassant pas n, trouver le domaine de convergence par rapport à x_s ($s = 1, 2, \ldots, k$) de la série

$$(1) \qquad P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \ldots,$$

si $|P_n| < L$ (L est une constante) quelque soit n et quelles que soient les valeurs réelles des x_s, appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$, le paramètre α satisfaisant à la condition $|\alpha| < 1$. La solution de ce problème a été donnée par Liapounoff dans son mémoire „Sur les séries de polynomes (Bull. de l'Acad. des Sciences, Petrograd, 1915, p. 1857). Dans la note présente nous voulons faire voir que le résultat de Liapounoff pourrait être perfectionné et le problème généralisé. Nous donnons une détermination exacte du domaine de convergence de la série (1) par rapport à x_s dans le cas où l'inégalité $|P_n| < L$ a lieu quand les x_s appartiennent à quelques ensembles E_s de points. Nous démontrerons dans la suite le théorème suivant.

Soit P_n—les polynomes en variables x_1, x_2, ..., x_k le degré de P_n ne dépassant par n. Supposons que l'inégalité

$$(2) \qquad |P_n| < L \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; L\text{—une constante})$$

a lieu quand chaque x_s est situé sur un ensemble fermé et borné E_s ($s = 1, 2, \ldots, k$), et que les ensembles E'_s complémentaires à E_s, qui contiennent le point à l'infini, constituent les domaines simplement connexes avec le contour, ayant plus d'un point. Soit

$$(3) \qquad x_s = \tau_s z_s + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(s)}}{z_s^j} \quad (s = 1. 2, \ldots, k)$$

la fonction qui fournit la représentation conforme du domaine E_s' sur le domaine $|z_s| > 1$ et soit $C_\rho^{(s)}$ — la courbe sur le plan x_s, qui est l'image de la circonférence $|z_s| = \rho$ ($\rho > 1$; $s = 1, 2, \ldots, k$). Dans ces conditions on peut affirmer que la série (1) avec le paramètre α ($|\alpha| < 1$) converge absolument et uniformément, si chacun des x_s appartient à un domaine, situé avec son contour à l'intérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(s)}$. On ne peut pas perfectionner ce résultat, c. à. d. si un des x_s au moins est situé à l'extérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(s)}$, on peut construire les polynomes P_n qui satisfont aux conditions mentionnées, mais pour lesquels la série (1) diverge.

2. Considérons d'abord le cas $k = 1$. Nous aurons les polynomes $P_n(x_1)$ d'une variable x_1. Substituons dans le polynome $P_n(x_1)$, au lieu de x_1 son expression (3). Le quotient

$$P_n\left(\tau_1 z_1 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{(1)} z_1^{-j}\right) : z_1^n,$$

est une fonction holomorphe dans le domaine $|z_1| > 1$, y compris $z_1 = \infty$, et quand z_1 approche du contour de ce domaine, le module du quotient susdit devient en vertu de (2) moindre que L, et par conséquent ce module est moindre que L pour tous les points z_1 du domaine $|z_1| > 1$. Nous aurions donc l'inégalité

$$|P_n(x_1)| < L\rho^n$$

pour les valeurs de x_1 sur la courbe $C_\rho^{(1)}$, et la convergence de la série (1), indiquée dans le théorème du n^0 1, serait la conséquence immédiate de cette inégalité.

Démontrons maintenant qu'il est impossible de perfectionner ce résultat. Soit

$$T_n^{(1)}(x_1) = x_1^n + a_1^{(1)} x_1^{n-1} + \ldots + a_n^{(1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

—les polynomes de Tchebycheff pour l'ensemble E_1 et $m_n^{(1)}$ — maximum du module de $T_n^{(1)}(x_1)$ sur cet ensemble. Supposons d'abord que le contour de E_1 soit une courbe analytique. Dans ce cas les polynomes auraient sur la courbe $C_\rho^{(1)}$ l'expression asymptotique suivante (Faber, Crelle Journal t. 150):

$$T_n^{(1)}(x_1) = \tau_1^n z_1^n \left[1 + \vartheta(x_1) G \cdot \gamma^n\right],$$

où $|\vartheta(x_1)| < 1$, G et γ—les constantes et $0 < \gamma < 1$. On sait aussi que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m_n^{(1)}}{|\tau_1|^n} = 1.$$

Les polynomes $\dfrac{T_n^{(1)}(x_1)}{m_n^{(1)}}$ satisfont aux conditions du théorème du n° 1, mais la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n^{(1)}(x_1)}{m_n^{(1)}} \alpha^n$$

est évidemment divergente, si x_1 est situé à l'extérieur de $C^{(1)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$.

Dans le cas où le contour de E_1 serait arbitraire, prenons au lieu de E_1 l'ensemble $E_{1,\eta}$ dont le contour est la courbe analytique $C_\eta^{(1)}$ $(\eta > 1)$. Introduisons les symboles

$$\tau_{1,\eta};\ C^{(1)}_{\rho,\eta};\ T^{(1)}_{n,\eta}(x_1);\ m^{(1)}_{n,\eta},$$

qui ont la signification précédente, mais se rapportent à l'ensemble $E_{1,\eta}$. Il est évident que la courbe $C_\rho^{(1)}$ est identique avec la courbe $C^{(1)}_{\frac{\rho}{\eta},\eta}$.
Soit ξ_1 — une valeur de x_1 situé à l'extérieur de $C^{(1)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$ et ζ_1 — la valeur correspondante de z_1, d'où il suit que $|\zeta_1| > \dfrac{1}{|\alpha|}$.

Nous avons l'expression asymptotique

$$T^{(1)}_{n,\eta}(x_1) = \tau^n_{n,\eta}\left(\frac{z_1}{\eta}\right)^n [1 + \vartheta(x_1) G\gamma^n]$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m^{(1)}_{n,\eta}}{|\tau_{1,\eta}|^n} = 1.$$

Nous avons

$$\left|\frac{T^{(1)}_{n,\eta}(x_1)}{m^{(1)}_{n,\eta}}\right| < 1 \text{ sur } E_1,$$

mais la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{(1)}_{n,\eta}(\xi_1)}{m^{(1)}_{n,\eta}} \alpha^n$$

est divergente, si le nombre η est assez près de l'unité. Ainsi le théorème du n° 1 est démontré pour le cas des polynomes P_n d'une variable.

3. Supposons maintenant que P_n soient des polynomes en variables $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ et qu'ils satisfont aux conditions du n° 1.

Remplaçons dans P_n chacun des x_s par l'expression (3). Nous aurons une série généralement infinie de la forme

$$(4) \qquad P_n = \sum_{(m_1, m_2, \ldots, m_\kappa)} a^{(n)}_{m_1 m_\kappa \ldots m_\kappa} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_\kappa^{m_\kappa}$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs de $m_1, m_2, \ldots, m_\kappa$ à partir de n à $(-\infty)$, et la somme de ceux des nombres m_s, qui sont positifs, ne doit pas dépasser n.

Supposons d'abord que le contour de chaque ensemble E_s soit une courbe analytique. Dans ce cas la série (4) converge absolument et uniformément pour les valeurs $|z_s| = 1$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$. En remplaçant dans cette série chaque z_s par $e^{\theta_s i}$ et en intégrant $|P_n|^2$ par rapport à chaque θ_s de 0 à 2π, nous aurons en vertu de (2) l'inégalité

$$(5) \qquad \sum_{(m_1, m_2, \ldots m_\kappa)} \left| a^{(n)}_{m_1 m_2 \ldots m_\kappa} \right|^2 < L^2.$$

Supposons que chacun des x_s soit situé à l'intériuur ou sur la courbe $C^{(s)}_\rho$. L'application à la série (4) de l'inégalité de Cauchy nous donne en vertu de (5) l'inégalité

$$(6) \qquad |P_n|^2 < L^2 \sum_{(m_1 m_2 \ldots m_\kappa)} \rho^{2(m_1 + m_2 + \ldots + m_\kappa)}$$

où la régle de sommation est celle qui a été exliqué plus haut. Si au lieu de cette régle nous effectuons la sommation pour chaque m_s à partir de n à $(-\infty)$ avec la condition complémentaire

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_\kappa \leq n,$$

l'inégalité (6) aura lieu d'autant plus. Le nombre des termes de la somme, qui sont égaux à ρ^{2j}, s'éxprime par le coefficient binomial

$$\binom{nk - j + k - 1}{k - 1},$$

et par suite

$$(7) \qquad |P_n| < L^2 \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(n+1)(k-1)+s}{k-1} \rho^{2n-2s}.$$

Pour les valeurs de ρ, qui satisfont à l'inégalité

$$\rho \geq \rho_1 > 1,$$

où ρ_1 est un nombre fixé, l'équation (7) nous donne l'inégalité

$$(8) \qquad |P_n| < L^2 C n^{k-1} \rho^{2n}$$

où C est une constante qui ne dépend ni de ρ, ni de n. De cette inégalité dérive immédiatement la convergence absolue et uniforme de la série (1), si chacun des x_s est situé sur le courbe $C_\rho^{(s)}$ où $\rho < \frac{1}{|\alpha|}$.

Par conséquent, la convergence de la série (1), signalée au n° 1, est demontrée.

Rejetons maintenant la supposition que le contour de chaque E_s soit une courbe analytique. Le quotient

$$\frac{P_n}{z_1^n z_2^n \ldots z_\kappa^n}$$

où dans P_n chacun des x_s est remplacé par l'expression (3), est une fonction holomorphe de z_s dans les domaines $|z_s| > 1$, et l'application du principe du module nous donne, comme au n° 2, l'inégalité

$$(9) \qquad |P_n| < L\eta^{kn}$$

pour les valeurs x_s sur les courbes $C_\eta^{(s)}$ $(\eta > 1;\ s = 1, 2, \ldots, k)$. Remplaçons dans la série (4) chaque z_s par $\eta z_s'$

$$P_n = \sum_{(m_1, m_2, \ldots, m_\kappa)} b^{(n)}_{m_1 m_2 \ldots m_\kappa} z_1'^{m_1} z_2'^{m_2} \ldots z_\kappa'^{m_\kappa}.$$

Dans cette série on peut poser $z_s' = e^{\theta_s i}$ et intégrer $|P^n|^2$ par rapport à θ_s de 0 à 2π, ce qui donne en vertu de (9) l'inégalité analogue à (5)

$$\sum_{(m_1 m_2 \ldots m_\kappa)} |b^{(n)}_{m_1 m_2 \ldots m_\kappa}|^2 < L^2 \eta^{2\kappa n}.$$

En reprenant les raisonnements précédents et ayant égard à ce que la condition $|z_s| = \rho$ soit équivalente à $|z_s'| = \frac{\rho}{\eta}$, nous aurons pour P_n au lieu de (8) l'inégalité

$$(10) \qquad |P_n| < L^2 C n^{\kappa-1} \eta^{2(\kappa-1)n} \rho^{2n}.$$

Le nombre η on peut prendre assez près de l'unité et on peut tirer de l'inégalité (10) la convergence de la série (1), signaleé au n° 1.

Il est facile de construire les polynomés P_n, qui contiennent toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ et satisfont aux conditions du n° 1, mais pour lesquelles la série (1) diverge, si un des x_s au moins est situé à l'extérieur de $C^{(s)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$. Dans le cas où x_1 serait situé à l'extérieur de $C^{(1)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$ et où le contour de E_1 serait une courbe analytique on pourrait prendre, par exemple,

$$P_{n+\kappa-1} = \frac{T_n^{(1)}(x_1)}{m_n^{(1)}} x_2 x_3 \ldots x_\kappa.$$

4. Si l'ensemble E_s est constitué par le segment $(-\lambda_s, +\lambda_s)$ de l'axe réelle, la courbe $C^{(s)}_\rho$ est, comme on sait bien, l'ellipse

$$\frac{4x^2}{\lambda_s^2\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{4y^2}{\lambda_s^2\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2} = 1. \tag{11}$$

Supposons que la condition $|P_n| < L$ a lieu pour les valeurs réelles des variables x_s, satisfaisant à l'inégalité

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\kappa^2 \leq 1. \tag{12}$$

Limitons la variation de chacuns des x_s par le segment $(-\lambda_s, +\lambda_s)$ où λ_s satisfont à la condition

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_\kappa^2 = 1. \tag{13}$$

L'inégalité (12) sera satisfaite, et nous aurons pour ces valeurs de variables x_s la condition $|P_n| < L$. Par conséquent, en vertu du théorème du n° 1, la série (1) sera convergente à l'intérieur des ellipses (11) On arrive ainsi à la proposition suivante.

Soit P_n — les polynomes en variables $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$, le degré de P_n ne dépassant pas n Supposons que l'inégalité (2) a lieu pour les valeurs réelles des variables x_s, satisfaisant à l'inégalité (12). Dans ces conditions ou peut affirmer que la série (1) converge absolument et uniformément, si chacuns des x_s appartient à un domaine qui avec son cantour est situé à l'intérieur de l'ellipse (11), λ_s étant les nombres réels quelconques, qui satisfont à la condition (13).

Ce probléme a été traité aussi par Liapounoff dans son mémoire susdit, mais le résultat de Liapounoff est plus restreint que le nôtre.

Supposons en dernier lieu que la condition par rapport au degré des polynomes P_n soit remplacée par une autre, plus générale, à savoir qu'on peut fixer deux entiers m et l de telle manière que le degré de P_n ne dépasse pas $(mn + l)$. La proposition du n° 1 serait encore vraie, pour vu que l'on remplaçât les courbes $C^{(s)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$ par les courbes $C^{(s)}_{\frac{1}{\sqrt[m]{|\alpha|}}}$.

О некоторых рядах полиномов.

В. И. Смирнов.

В настоящей заметке доказывается теорема:

Пусть P_n — полиномы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, при чем степень P_n не превосходит n. Предположим, что имеет место неравенство

$$|P_n| < L \,(n = 0, 1, 2, \ldots, L \text{ — постоянная}),$$

если каждое x_s принадлежит некоторой замкнутой, ограниченной совокупности E_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$, и предположим, что совокупности E_s', дополнительные для E_s и содержащие бесконечно далекую точку, суть односвязные области с контуром, содержащим более одной точки. Пусть

$$x_s = \tau_s z_s + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{(s)} z_s^{-j} \quad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

функция, совершающая конформное преобразование E_s' в область $|z_s| > 1$, и пусть $C_\rho^{(s)}$ — кривая на плоскости x_s, являющаяся изображением окружности $|z_s| = \rho$ $(\rho > 1; s = 1, 2, \ldots, k)$. При этих условиях можно утверждать, что ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \alpha^n$$

с параметром α $(|\alpha| < 1)$ сходится абсолютно и равномерно, если всякое x_s принадлежит области, которая вместе со своим контуром находится внутри $C^{(s)}_{\frac{1}{|\alpha|}}$. Полученную область сходимости нельзя расширить.

Ueber eine Zahlentheoretische Anwendung der Laguerreschen Polynome.

Von N. Koschliakov.

Es sei $r_\kappa(m)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichungen

$$x_1^2 + x_1^2 + + \ldots + x_\kappa^2 = m, \quad k \geq 2.$$

Bezeichnen also

$$q = e^{-\pi a}, \quad a > 0$$

und stellen sich die Aufgabe den asymptotischen Ausdruck für die weit stehende Gliedern in Entwiklung der Function

$$(1) \qquad \theta_\kappa(u) = 1 + r_\kappa(1)\, q e^{-u} + \ldots + r_\kappa(n)\, q^n e^{-nu} + \ldots$$

in Potenzreiche zu finden.

Die Formel (1) ergibt

$$\theta_\kappa(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n u^n,$$

wo der Kürze wegen

$$(2) \qquad A_n = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} r_\kappa(m)\, m^n e^{-\pi a m}.$$

Um den asymptotischen Ausdruck der A_n bei grossen n zu erhalten, beweisen wir die Transformationformel

$$(3) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} r_\kappa(m)\, m^n e^{-\pi a m} =$$

$$= \frac{n!}{\pi^n \cdot a^{n+\frac{\kappa}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} r_\kappa(m)\, e^{-\frac{\pi m}{a}} L_n^{\left(\frac{\kappa}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right),$$

wo die $L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)$ die zum Parameter $\alpha = \frac{k}{2} - 1$ gehörigen Laguerreschen Polynome sind:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n e^{-x} x^{n+\alpha}}{dx^n}, \quad \alpha > -1, \tag{4}$$

Mittels (4) und der elementaren Formel [1])

$$\frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{e^{-\frac{\mu^2}{a}}}{(\sqrt{a})^k}\right\} = \frac{(-1)^n}{\mu^{k-2} \cdot a^{n+1}} \frac{d^n e^{-\frac{\mu^2}{a}}\left(\frac{\mu^2}{a}\right)^{n+\frac{k}{2}-1}}{d\left(\frac{\mu^2}{a}\right)^n},$$

erhalten wir

$$\frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{e^{-\frac{\mu^2}{a}}}{(\sqrt{a})^k}\right\} = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+\frac{k}{2}}} L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\mu^2}{a}\right) e^{-\frac{\mu^2}{a}}. \tag{5}$$

Differentiiert man die bekante Formel

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_k(m)\, e^{-\pi m a} = \sum_{m=0}^{\infty} r_k(m) \frac{e^{-\frac{\pi m}{a}}}{(\sqrt{a})^k}$$

n mal nach a, so kommen wir zur gesuchten Transformationformel (3)

Aus (2) und (3) folgt

$$A_n = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \pi^n a^{n+\frac{k}{2}}} + \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{\pi^n \cdot a^{n+\frac{k}{2}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_\kappa(m) L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right) e^{-\frac{\pi m}{a}}.$$

Um den asymptotischen Ausdruck der Summen (6) bei grossen n zu erhalten, ersetzen wir den Laguerreschen Polynom $L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right)$ durch seihen asymptotischen Ausdruck.

---

[1]) Auf diese Formel für den Spezial Fall $k = 1$ hat uns H. P. Bernays hingewiesen.

In einen neuderdings veröffentlichen Arbeit hat H. G. Szegö [1]) gezeigt, dass

$$(7) \quad e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) + R_n,$$

wobei

$$R_n = x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) + x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}+x}\right)$$

und

$$n^{-\delta} \leq x \leq n^{\varepsilon}, \quad 0 < \delta < 1, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad x > \frac{3\varepsilon}{2}.$$

sind.

Es gilt nach (7)

$$(8) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} r_k(m) L_n^{\left(\frac{k}{2}-1\right)}\left(\frac{\pi m}{a}\right) e^{-\frac{\pi m}{a}} =$$

$$= \pi^{-\frac{k+1}{4}} a^{\frac{k-1}{4}} n^{\frac{k-3}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_k(m)}{m^{\frac{k-1}{4}}} \cos\left(2\sqrt{\frac{\pi m n}{a}} - \frac{k-1}{4}\pi\right) e^{-\frac{\pi m}{2a}} +$$

$$+ O\left(n^{\frac{k+5}{4}+\eta}\right),$$

wobei η eine beliebig kleine, feste positive Zahl ist.

Aus (6) und (8) folgt

$$A_n = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \pi^n a^{n+\frac{k}{2}}} +$$

$$+ \frac{n^{\frac{k-3}{4}}}{\pi^{n+\frac{k+1}{4}} a^{n+\frac{k+1}{4}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_k(m)}{m^{\frac{k-1}{4}}} \cos\left(2\sqrt{\frac{\pi m n}{a}} - \frac{k-1}{4}\pi\right) e^{-\frac{\pi m}{2a}} +$$

$$+ \frac{1}{(\pi a)^n} O\left(n^{\frac{k-5}{4}+\eta}\right).$$

---

[1]) Mathem. Zeitschrift. 25 Bd. 1 h. 1926.

Mittels der Stirlingschen Formel erhalten wir den asymptotischen Ausdruck

$$(9)\qquad A_n = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{n!\,(\pi a)^{n+\frac{k+1}{4}}}\left\{\frac{\pi^{\frac{k+1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)a^{\frac{k-1}{4}}}+\right.$$

$$\left.+n^{\frac{1-k}{4}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_k(m)}{m^{\frac{k-1}{4}}}\cos\left(2\sqrt{\frac{\pi mn}{a}}-\frac{k-1}{4}\pi\right)e^{-\frac{\pi m}{2a}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{\kappa+1}{4}-\eta}}\right)\right\}.$$

Aus (9) folgt dann für genügend grosse n

$$(10)\qquad A_n = \frac{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}\right)}{n!\,(\pi a)^{n+\frac{\kappa+1}{4}}}\left\{\frac{\pi^{\frac{\kappa+1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)a^{\frac{\kappa-1}{4}}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{\kappa-1}{4}}}\right)\right\}.$$

Für $k=1$ muss die Function $\theta_\kappa(u)$ durch Iacobische Functionen

$$\theta_1(u) = 1+2q\cos 2\nu+2q^4\cos 4\nu+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n u^{2n},$$

$$H_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos\nu+2\sqrt[4]{q^9}\cos 3\nu+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n u^{2n},$$

$$\theta(u) = 1-2q\cos 2\nu+2q^4\cos 4\nu+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n u^{2n},$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin\nu-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3\nu+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D_n u^{2n+1},$$

$$q=e^{-\pi\frac{\kappa'}{\kappa}},\quad \nu=\frac{\pi}{2}\,\frac{u}{k},$$

ersezt werden.

Die asymptotischen Ausdrücke für A_n, B_n, C_n und D_n habe ich in der Arbeit „On Sonine's Polynomials" [1]) erhalten. Ich bewiese dort das folgende

$$(11) \qquad A_n = \left(\frac{e\pi}{4nkk'}\right)\sqrt{\frac{k}{2\pi nk'}}\left\{1 + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{\infty} \cos\left[2m\sqrt{\frac{n\pi k}{k'}}\right] e^{-\frac{\pi\kappa m^2}{2\kappa'}} + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$B_n = \left(\frac{e\pi}{4nkk'}\right)\sqrt{\frac{k}{2\pi nk'}}\left\{1 + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos\left[2m\sqrt{\frac{n\pi k}{k'}}\right] e^{-\frac{\pi\kappa m^2}{2\kappa'}} + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$C_n =$$

$$= \left(\frac{e\pi}{4nkk'}\right)\sqrt{\frac{k}{2\pi nk'}}\left\{2\sum_{m=1}^{\infty} \cos\left[(2m-1)\sqrt{\frac{n\pi k}{k'}}\right] e^{-\frac{\pi\kappa(2m-1)^2}{8\kappa'}} + \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$D_n =$$

$$= \left(\frac{e\pi}{4nkk'}\right)\frac{1}{2\sqrt{2nk'}}\left\{2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sin\left[(2m-1)\sqrt{\frac{n\pi k}{k'}}\right] e^{-\frac{\pi\kappa(2m-1)^2}{8\kappa'}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{n}}\right\}$$

wobei die Grössen ε_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ in Bezug zu n begrentz sind.

Die Hauptglieder in den Formeln (11) für die Koefficiente A_n und C_n sind dieselben, wie in bekanten Stieltlesschen Formel, die er auf ganz anderem Weg erhalten hat [2]).

---

[1]) Messenger of Mathematics, February ,1926.

[2]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. t. I. lettre 227.

О приложении полиномов Лагерра к теории чисел.

Н. С. Кошляков.

Автор дает асимптотическое выражение для коэффициентов разложения функции

$$\theta_k\ (u) = 1 + r_k\ (1)\ q\ e^{-u} + \ldots + r_k\ (n)\ q^n\ e^{-nu} + \ldots,$$

где $q = e^{-\pi a}$ $(a > 0)$ и $r_k\ (m)$ число целых решений уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = m\ (k \geq 2).$$

При $k = 1$ функция $\theta_k\ (u)$ заменяется известными функциями Jacobi, и соответствующие асимптотические выражения были даны автором в его статье „On Sonine's Polynomials“ (Messenger of Math., February, 1926).

Об асимптотическом выражении суммы дробных частей функции двух переменных.

М. Гельбке.

Во многих вопросах аналитической теории чисел требуется найти асимптотическое выражение числа „целых точек“ (т. е. точек с целыми координатами) внутри некоторого переменного объема, а это сводится к нахождению асимптотического выражения суммы дробных частей функции двух переменных. Последнему вопросу и посвящена нижеизложенная общая теорема.

Предлагаемая теорема доказана весьма элементарным способом, отличается простотой условий, распространяющихся лишь на вторые производные, и сравнительно хорошей оценкой остаточного члена. Последнее я поясню на общеизвестном примере.

Gauss дал асимптотическое выражение суммы:

$$h(-1)+h(-2)+h(-3)+\ldots+h(-m),$$

(где h $(-\Delta)$ есть число классов чисто коренных квадратичных форм показателя $-\Delta$) без доказательства.

Впоследствии формула Gauss'а была доказана различными авторами и с различной точностью оценки остаточного члена: Landau [1]) — $0\,(m^{5/6}\,lgm)$, Виноградов [2]) — $0\,(m^{3/4}\,(lgm)^{2})$, Виноградов [3]) — $0\,(m^{3/4})$, Van der Korput [4]) — $0\,(m^{\eta})$, где η несколько меньше, чем $^{5}/_{6}$.

С помощью предлагаемой теоремы остаточный член получается $0\,[m^{3/4}\,(lgm)^{3/2}]$.

Считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность моему глубокоуважаемому учителю профессору Ивану Матвеевичу Виноградову, обратившему мое внимание на желательность получения подобного рода теоремы и указавшему в общих чертах метод доказательства.

---

[1]) Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien 1912.

[2]) Сообщения Харьк. Мат. О-ва 1916 г.

[3]) Магистерская дисс. 1920 г.

[4]) Comptes rendus. 1922.

Теорема. Пусть область Ω ограничена таким замкнутым контуром, что любая прямая, параллельная оси x или оси y, делит область не более, как на две части. Весь контур или части его можно не причислять к области.

Пусть в области Ω функция $F(x, y)$ имеет первые и вторые производные, при чем:

$$\frac{1}{A} \leqslant F''_{xx}(x, y) \leqslant \frac{k}{A},$$

$$\frac{1}{B} \leqslant F''_{yy}(x, y) \leqslant \frac{l}{B},$$

$$|F''_{xy}(x, y)| \leqslant s\sqrt{F''_{xx}(x, y) F''_{yy}(x, y)},$$

где A и B положительные величины, удовлетворяющие условиям:

$$(*) \quad \frac{A^{3/8}}{B^{1/8}}(lgAB)^{3/4} \geqq t > O \qquad \frac{B^{3/8}}{A^{1/8}}(lgAB)^{3/4} \geqq t > O \qquad t = Const.$$

и могущие принимать сколь угодно большие значения одновременно с изменением области Ω и вида функции $F(x, y)$, буквы же k, l, s обозначают конечные постоянные числа, из которых

$$s < 1 \quad s < \frac{1}{\sqrt[4]{kl}}.$$

Пусть, сверх того, разность между крайними абсциссами и разность между крайними ординатами области Ω соответственно не больше gA и hB, где g и h постоянные числа.

При этих условиях сумма дробных частей $F(x, y)$, распространенная по целым точкам области Ω, может быть представлена в форме:

$$\sum_{\Omega}\sum \left\{F(x, y)\right\} = \frac{1}{2}\Pi + O\left[(AB)^{3/4}(lgAB)^{3/2}\right],$$

где Π есть число целых точек в области. Под Π можно разуметь также и площадь области Ω.

Замечание I. Если, в противоположность условиям (*)

$$\frac{A^{3/8}}{B^{1/8}}(lgAB)^{3/4} \text{ или } \frac{B^{3/8}}{A^{1/8}}(lgAB)^{3/4}$$

есть величина бесконечно-малая, то теорема получается непосредственно из соответствующей теоремы для функции одного переменного (даже с меньшим остаточным членом), только в этом случае под П нельзя разуметь площадь области, см. §§ 5, 6.

Замечание II. Во многих случаях, когда условие

$$s < \frac{1}{\sqrt[4]{kl}}$$

не соблюдено, область можно разделить на конечное число частей, в каждой из которых условия теоремы уже соблюдены.

§ 1. Рассмотрим два семейства кривых

$$F'_x(x, y) = C$$
$$F'_y(x, y) = D.$$

Докажем, что две кривые различных семейств не могут иметь более одной общей точки, а две кривые одного семейства совсем не могут иметь общих точек.

Вследствие того, что $F''_{xx}(x, y)$ не равна нулю, первое уравнение можно решить относительно x и найти $\frac{dx}{dy}$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|-\frac{F''_{xy}(x, y)}{F''_{xx}(x, y)}\right| \leqslant s\sqrt{\frac{F''_{yy}(x, y)}{F''_{xx}(x, y)}} \leqslant s\sqrt{\frac{lA}{B}}.$$

Точно также для кривой второго семейства

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqslant s\sqrt{\frac{kB}{A}}.$$

Эти неравенства говорят, что:

угловой коэффициент касательной в любой точке кривой первого семейства

$$\geq \frac{1}{s}\sqrt{\frac{B}{lA}},$$

угловой коэффициент касательной в любой точке кривой второго семейства

$$\leqslant s\sqrt{\frac{kB}{A}},$$

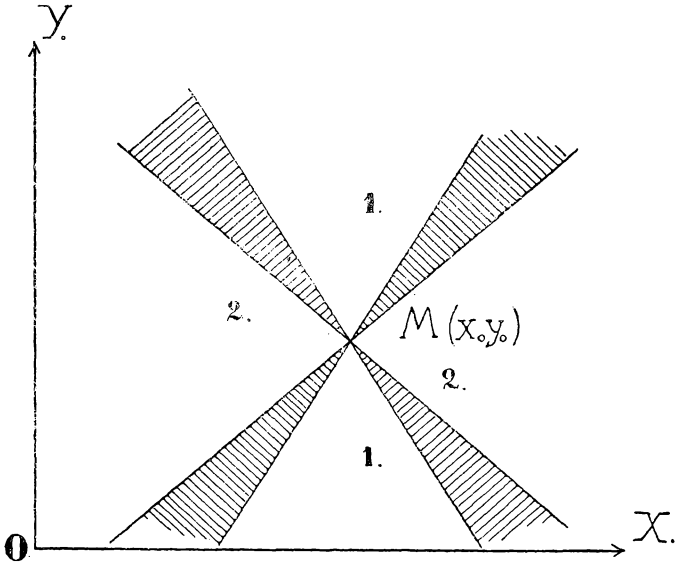
при этом, так как $s < \frac{1}{\sqrt[4]{kl}}$, то $\frac{1}{s}\sqrt{\frac{B}{lA}} > s\sqrt{\frac{kB}{A}}$.

Из сказанного легко видеть, что если точка M есть общая точка двух кривых различных семейств (черт. 1), то кривая первого семейства проходит внутри пары вертикальных углов 1, а кривая второго семейства проходит внутри пары вертикальных углов 2, при чем в заштрихованных углах точек кривых нет. Следовательно, кроме M, кривые не могут иметь ни одной общей точки.

Теперь покажем, что через точку M не могут проходить две кривые одного, скажем первого, семейства, соответствующие различным значениям параметра.

Положим в равенстве:

$$F'_x(x, y) = C; \quad y = y_0.$$



Черт. 1.

Тогда, вследствие того, что $F''_{xx}(x, y)$ не равна нулю, между x и C устанавливается однозначное соответствие, что и доказывает наше утверждение.

Введем обозначения:

$$\frac{A^{3/8}}{B^{1/8}}(lgAB)^{3/4} = X; \quad \frac{B^{3/8}}{A^{1/8}}(lgAB)^{3/4} = Y; \quad A^{5/8}B^{1/8}(lgAB)^{-3/4} = G;$$

$$B^{5/8}A^{1/8}(lgAB)^{-3/4} = H.$$

Выберем из указанных семейств кривых следующие две системы:

$$F'_x(x, y) = \frac{c}{G},$$

$$F'_y(x, y) = \frac{d}{H},$$

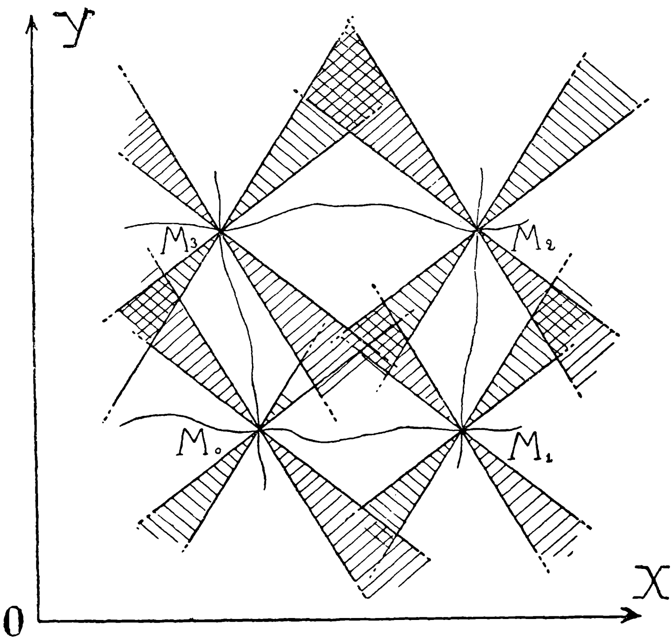
где c и d пробегают все целые числа. Систему точек пересечения этих кривых назовем системой точек Γ.

В настоящем параграфе мы разделим известным образом область на равные прямоугольники и докажем, что в каждом прямоугольнике есть хоть одна точка системы Γ.

Рассмотрим криволинейный четыреугольник, образованный кривыми:

$$F'_x(x, y) = C, \qquad F'_y(x, y) = D,$$
$$F'_x(x, y) = C + \frac{1}{G}, \quad F'_y(x, y) = D + \frac{1}{H},$$

предполагая, что он лежит в области Ω (черт. 2).



Черт. 2.

Для кривой первого семейства $F'_y(x, y)$ можно рассматривать, как сложную функцию одного y, производная которой:

$$[F'_y(x, y)]'_y = -\frac{[F''_{xy}(x, y)]^2}{F''_{xx}(x, y)} +$$
$$+ F''_{yy}(x, y) \geq (1 - s^2)\, F''_{yy}(x, y) \geq \frac{\sigma}{B}, \text{ где } \sigma = 1 - s^2.$$

Точно также для кривой второго семейства:

$$[F'_x(x, y)]'_x \geq \frac{\sigma}{A}$$

Пользуясь формулой Lagrange'a, получаем:

$$(y_3 - y_0)\frac{\sigma}{B} \leqslant F'_y(x_3, y_3) - F'_y(x_0, y_0) = \frac{1}{H} \text{ или } y_3 - y_0 \leqslant \frac{Y}{\sigma}$$

и вполне аналогично:

$$y_2 - y_1 \leqslant \frac{Y}{\sigma};\ x_1 - x_0 \leqslant \frac{X}{\sigma};\ x_2 - x_3 \leqslant \frac{X}{\sigma}.$$

Теперь оценим $x_3 - x_0$, $x_2 - x_1$, $y_1 - y_0$, $y_2 - y_3$. Обращая внимание на параллелограмы, указанные на черт. 2, и замечая, что при данном $y_3 - y_0$, $|x_3 - x_0|$ наибольшее тогда, когда соответствующий параллелограм обратится в прямую, находим:

$$|x_3 - x_0| \leqslant \frac{Y}{\sigma} s \sqrt{\frac{lA}{B}} = s\frac{\sqrt{l}}{\sigma} X$$

и точно также:

$$|x_2 - x_1| \leqslant s\frac{\sqrt{l}}{\sigma} X;\ |y_1 - y_0| \leqslant s\frac{\sqrt{k}}{\sigma} Y;\ |y_2 - y_3| \leqslant s\frac{\sqrt{k}}{\sigma} Y.$$

Далее сложением находим:

$$-\frac{s\sqrt{k}}{\sigma} Y \leqslant y_2 - y_0 \leqslant \frac{1 + s\sqrt{k}}{\sigma} Y,$$

$$-\frac{s\sqrt{l}}{\sigma} X \leqslant x_2 - x_0 \leqslant \frac{1 + s\sqrt{l}}{\sigma} X.$$

Обозначим

$\gamma_1 \dfrac{1 + 2s\sqrt{l}}{\sigma} = \lambda$; $\gamma_2 \dfrac{1 + 2s\sqrt{k}}{\sigma} = \mu$; где γ_1 и $\gamma_2 > 1$, но ограничены.

Очевидно, что прямоугольник, образованный прямыми:

$$x = x_0 - \gamma_1 \frac{s\sqrt{l}}{\sigma} X,\ y = y_0 - \gamma_2 \frac{s\sqrt{k}}{\sigma} Y,$$

$$x = x_0 + \gamma_1 \frac{1 + s\sqrt{l}}{\sigma} X,\ y = y_0 + \gamma_2 \frac{1 + s\sqrt{k}}{\sigma} Y$$

со сторонами λX и $Y\mu$ содержит внутри себя не только все четыре точки M_0, M_1, M_2, M_3, но и все четыре параллелограма, указанные на черт. 2, а следовательно, и всю криволинейную фигуру, и притом так, что ни одна точка ее не лежит на контуре прямоугольника. Но внутри криволинейной фигуры, или на ее контуре, в силу свойств кривых, имеется хоть одна точка системы Г. Значит внутри прямоугольника есть точка системы Г.

Вообще, если дан прямоугольник рассмотренного типа, легко найти точку, которую можно взять за точку M_0, так, чтобы криволинейная фигура лежала заведомо внутри него. А это доказывает существование в каждом таком прямоугольнике хоть одной точки системы Г.

Разделим область Ω сетью прямых:

$$x = \lambda X u,$$
$$y = \mu Y v,$$

где u и v пробегают все целые числа.

Из не задетых контуром Ω прямоугольников исключим по соответственной паре смежных сторон. В каждой такой прямоугольной области, по доказанному, есть точка системы Г.

Выберем γ_1 и γ_2 так, чтобы λX и μY были целыми числами. Тогда число целых точек в не задетых контуром областях равно площади этих областей. Задетыми же прямоугольниками можно пренебрегать по следующей причине: контур Ω можно разбить на четыре части, в каждой из которых возрастанию x соответствует монотонное изменение y; каждая такая часть контура задевает

$$O\left(\frac{A}{X} + \frac{B}{Y}\right)$$

прямоугольников; поэтому, как площадь задетых прямоугольников, так и число целых точек в них равно

$$O(AY + BX),$$

что при условиях (*) есть величина порядка остаточного члена.

§ 2. Чтобы далее не отвлекаться, прежде всего вычислим, сколько значений в области Ω может принимать c и сколько значений при заданном c может принимать d.

Пусть K и L суть точки области, в которых $F'_x(x, y)$ принимает наименьшее и наибольшее значение. Вследствие свойств контура области, от K к L можно перейти по такой ломаной линии, чтобы составляющие ее отрезки были бы параллельны осям координат, а x и y изменялись бы монотонно.

При передвижении на α параллельно оси x, $F'_x(x, y)$ изменится не более, чем на

$$\frac{k}{A}\alpha,$$

а при передвижении на β параллельно оси y изменится не более, чем на

$$\sqrt{\frac{kl}{AB}}\beta.$$

При переходе от K к L $\Sigma\alpha \leqslant gA$, $\Sigma\beta \leq hB$, следовательно, $F'_x(x, y)$ изменится не более, чем на

$$gk + h\sqrt{kl}\sqrt{\frac{B}{A}} \leq gk + h\sqrt{kl} = \rho_1,$$

если предположить, что $B \leq A$, что не нарушит общности доказательства. Число же значений c меньше или равно

$$\rho_1\ G + 1 \leq (\rho_1 + 1)\ G.$$

При выбранном c, т. е. для определенной кривой первого семейства,

$$[F'_y(x, y)]'_y \leq (1 + s^2)\frac{l}{B}$$

Следовательно, изменение $F'_y(x, y)$ на этой кривой

$$\leq hl(1 + s^2) = \rho_2,$$

число же значений d меньше или равно $(\rho_2 + 1)\ H$.

Пусть ω есть одна из прямоугольных областей и $M(x', y')$ есть некоторая находящаяся в ней точка системы Г. Положим: $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$ и разложим $F(x, y)$ в ряд Taylor'а вблизи точки $M(x', y')$

$$F(x, y) = F(x', y') + \xi F_x'(x', y') + \eta F_y'(x'\ y') +$$
$$+ \frac{\theta}{2}\left(\frac{k\lambda^2X^2}{A} + \frac{2\sqrt{kl}\lambda\mu XY}{\sqrt{AB}} + \frac{l\mu^2Y^2}{B}\right) = A_\omega + B_\omega\xi + C_\omega\eta +$$
$$+ \theta L(AB)^{-1/4}(lgAB)^{3/2},$$

L — конечное число.

Рассмотрим

$$z = A_\omega + B_\omega\xi + C_\omega\eta + \varepsilon L(AB)^{-1/4}(lgAB)^{3/2},\text{ где } \varepsilon = \pm 1.$$

z отличается от $F(x, y)$ тем, что вместо истинного значения остаточного члена взят его высший или низший предел. Вычислим сперва асимптотическое выражение

$$\sum\sum_{\Omega} \{z\},$$

где z определяется указанным образом в каждой области ω отдельно.

К $F(x, y)$ возвратимся лишь в самом конце доказательства. В настоящем параграфе оценим порядок суммы

$$\sum\sum_{\Omega} e^{2\pi i m z},$$

где m — целое число.

$$\left|\sum\sum_{\omega} e^{2\pi i m z}\right| = \left| e^{2\pi i m \left[A_\omega + \varepsilon L (AB)^{-1/4} (lg AB)^{3/2}\right]}\right| \left|\sum\sum_{\omega} e^{2\pi i (m B_\omega \xi + m C_\omega \eta)}\right| =$$

$$= \left|\sum_{\xi} e^{2\pi i m B_\omega \xi}\right| \left|\sum_{\eta} e^{2\pi i m C_\omega \eta}\right| \leq \left|\frac{2}{e^{2\pi i m B_\omega} - 1}\right| \left|\frac{2}{e^{2\pi i m C_\omega} - 1}\right| =$$

$$= \left|\frac{2}{\sin \pi m B_\omega}\right| \left|\frac{2}{\sin \pi m C_\omega}\right| \leq \frac{1}{(m B_\omega)} \frac{1}{(m C_\omega)},$$

$$\text{где } (\varphi) \text{ означает } \begin{cases} \{\varphi\}, \text{ если } \{\varphi\} \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \{\varphi\} \text{ если } \{\varphi\} > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Очевидно, что после первого знака $\leq$ можно написать также $2\lambda X 2\mu Y$.

Итак:

$$\left|\sum\sum_{\omega} e^{2\pi i m z}\right| < EF, \text{ где } \begin{cases} E = \frac{1}{(m B_\omega)} \text{ или } 2\lambda X \\ F = \frac{1}{(m C_\omega)} \text{ или } 2\mu Y \end{cases}$$

по нашему усмотрению независимо друг от друга.

Просуммируем EF по всем областям ω

$$B_\omega = \frac{c}{G};\ C_\omega = \frac{d}{H};\ \sum\sum_{\Omega} EF = \sum_{c} E \sum_{d}' F,$$

где значек $'$ означает, что сумма взята при определенном значении c. Значения c и d могут итти не под ряд, так как не все точки системы Γ могут быть использованы.

Оценим $\sum\limits_{d}' F$. Число значений d не больше $(\rho_2 + 1) H$. Если бы d менялось непрерывно от своего наименьшего до своего наибольшего значения, то $\frac{md}{H}$ обратился бы в целое число не более $(\rho_2 + 1) m + 1$ раз. Рассмотрим ряд значений

$$\left\{\frac{md}{H}\right\}$$

при условии

$$i \leq \frac{md}{H} < i+1,$$

где i — целое число. Это будет некоторая арифметическая прогрессия a). Сравнивая ее с прогрессией

$$O, \frac{m}{H}, \ 2\frac{m}{H} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ b),$$

находим, что:

1) j-й член ряда a) не меньше j-го члена ряда b),

2) если расположить в порядке возрастания дополнения до 1-цы членов ряда a), то j-ый член полученного ряда не меньше j-го члена ряда b).

Всех промежутков для d, в которых

$$i \leq \frac{md}{H} < i+1,$$

где i принимает целые значения, не более $(\rho_2+1)m+1$, и каждый из них длиной не более $\frac{H}{m}$.

При $i \leq \frac{md}{H} \leq i+\frac{1}{2}$ (промежуток I типа) $F = \dfrac{1}{\left\{\dfrac{md}{H}\right\}}$.

При $i+\frac{1}{2} < \frac{md}{H} < i+1$ (промежуток II типа) $F = \dfrac{1}{1-\left\{\dfrac{md}{H}\right\}}$.

На основании замеченного, $\sum\limits_d{}' F$ по некоторому промежутку I или II типа

$$\leq 2\mu Y + \sum_{d=1}^{d \leqslant \frac{H}{2m}} \frac{1}{\dfrac{md}{H}}$$

Таким образом

$$\sum_d{}' F \leq 2\left[(\rho_2+1)m+1\right]\left(2\mu Y + \sum_{d=1}^{d \leqslant \frac{H}{2m}} \frac{1}{\dfrac{md}{H}}\right) = 0(mY + HlgH),$$

так как

$$\sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{n} = 0(lgN)$$

Теперь уже легко видеть, что:

$$\sum_{\Omega}\sum e^{2\pi i m z} = 0\,[m^2XY + m(XH + YG)\,lgAB + GH(lgAB)^2],$$

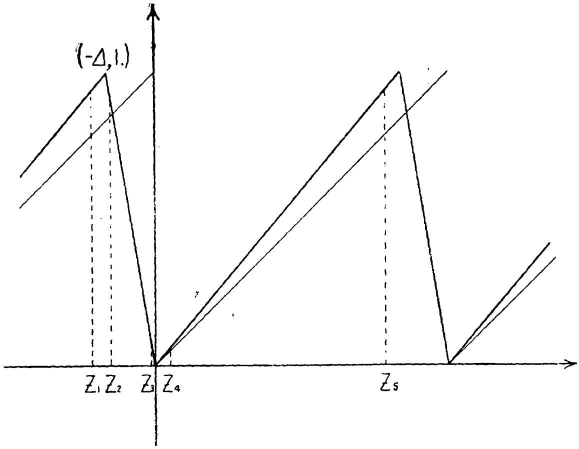
§ 3. В этом параграфе мы разрешим вопрос о нахождении асимптотического выражения суммы

$$\sum_{\Omega}\sum \{z\},$$

поставленный в предыдущем параграфе.

Предварительно сделаем следующие замечания. Пусть

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$



Черт. 3.

есть интерполяционная кривая Newton'а, удовлетворяющая условиям:

$$\text{при } x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y_0';$$
$$\text{при } x = x_1,\ y = y_1,\ y' = y_1',$$

при чем

$$x_1 - x_0 = 0(\Delta),\ y_0 \text{ и } y_1 = 0(1),\ y_0' \text{ и } y_1' = 0\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

где Δ — бесконечно-малое число.

1) Между x_0 и x_1 не более одной точки перегиба.

2) Легко вычислить, что $a_3 = 0\left(\frac{1}{\Delta^3}\right)$, $a_2 = 0\left(\frac{1}{\Delta^2}\right)$.

3) Не трудно видеть, что интерполяционная кривая Newton'а не меняет своего вида при переносе начала координат и при изменении направления оси y на обратное.

$\{z\}$, как функция от z изображена на черт. 3 тонкой чертой.

Построим новую функцию $\varphi(z)$ следующим образом. Возьмем ломаную линию, изображенную на черт. 3, и скруглим углы так, чтобы касательная менялась непрерывно. Для этого соединим точки ломаной линии, отстоящие от вершин на $\frac{\Delta}{2}$ интерполяционной кривой Newton'а.

На основании замечания 1) легко представить себе возможные виды кривой и установить, что между z_3 и z_4 $\varphi(z) > -1$. Далее, на основании замечания 3), ясно, что все криволинейные отрезки будут совместимы, если рассматривать их в пространстве. Просуммируем вместо $\{z\}$ фунцию $\varphi(z)$ по области Ω, а затем оценим порядок сделанной погрешности.

Разложим $\varphi(z)$ в ряд Fourier

$$\varphi(z) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos 2\pi mz + B_m \sin 2\pi mz).$$

Из теории рядов Fourier известно, что если функция и ее производная непрерывны, то коэффициенты разложения будут порядка

$$\frac{1}{m^3}.$$

Поэтому, вычисляя коэффициенты A_m и B_m, можно члены $\varphi(z)$ ниже второго порядка не выписывать, так как при интегрировании они дают величины порядка

$$\frac{1}{m^2} \text{ и } \frac{1}{m},$$

такого вида, что они должны целиком исчезнуть.

Но в данном случае коэффициенты зависят еще от параметра Δ. Оценим эти коэффициенты:

$$A_0 = \int_{z_1}^{z_5} \varphi(z)\,dz = \frac{1}{2} \text{ (из геометрических соображений).}$$

$$A_m = 2\int_{z_1}^{z_5} \varphi(z)\cos 2\pi mz dz = 2\int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)\cos 2\pi mz dz +$$

$$+ 2\int_{z_3}^{z_4} \varphi(z)\cos 2\pi mz dz + \ldots =$$

$$= 2\int_{z_3}^{z_4} [1 - \varphi(z)]\cos 2\pi m[-(z+\Delta)]\, dz +$$

$$+ 2\int_{z_3}^{z_4} \varphi(z)\cos 2\pi mz dz + \ldots =$$

$$= 2\int_{z_3}^{z_4} (a_3 z^3 + a_2 z^2)\ (p\cos 2\pi mz + q\sin 2\pi mz)\, dz + \ldots,$$

где p и q ограничены независимо от m и Δ.

Подобным образом находим, что при

$$m > \frac{1}{\Delta} \quad A_m \text{ и } B_m = 0\left(\frac{1}{\Delta^2 m^3}\right).$$

При $m \leq \frac{1}{\Delta}$ таким способом пригодной оценки A_m и B_m не получается. В этом случае сравним A_m и B_m с соответственными коэффициентами A'_m и B'_m разложения $\varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)$ изображается ломаной линией на черт. 3.

Очевидно

$$A'_m - A_m = 2\int_{z_1}^{z_2} [\varphi_1(z) - \varphi(z)]\cos 2\pi mz dz +$$

$$+ 2\int_{z_3}^{z_4} [\varphi_1(z) - \varphi(z)]\cos 2\pi mz dz.$$

Каждый интеграл, стоящий в правой части этого равенства есть

$$O(\Delta) = 0\left(\frac{1}{m}\right) \text{ при } m \leq \frac{1}{\Delta}.$$

Непосредственное же вычисление A'_m в предположении $m \leq \frac{1}{\Delta}$ дает $0\left(\frac{1}{m}\right)$, где зависимость от Δ уже принята во внимание.

Таким образом находим, что при $m \leqslant \frac{1}{\Delta}$

$$A_m \text{ и } B_m = 0\left(\frac{1}{m}\right).$$

Положим

$$\Delta = (AB)^{-1/4}\, lgAB$$

$$\sum\sum_{\Omega} \varphi(z) = \frac{1}{2}\Pi +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m \sum\sum_{\Omega} \cos 2\pi mz + B_m \sum\sum_{\Omega} \sin 2\pi mz\right),$$

где Π есть число целых точек области.

Внутренние суммы нами уже оценены в § 2. Кроме того, очевидно, что они не превосходят $0\,(AB)$

$$\sum\sum_{\Omega} \varphi(z) = \frac{1}{2}\Pi + O\left(\sum_{m=1}^{m \leqslant \frac{1}{\Delta}} \frac{1}{m}[m^2XY +\right.$$

$$+ m(XH + YG)\, lgAB + GH(lgAB)^2] + \sum_{m > \frac{1}{\Delta}}^{m \leq AB} \frac{1}{\Delta^2 m^3}[m^2XY +$$

$$\left. + m(XH + YG)\, lgAB + GH(lgAB)^2] + \sum_{m > AB}^{\infty} \frac{AB}{\Delta^2 m^3}\right).$$

Замечая, что

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots = 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

получаем

$$\sum\sum_{\Omega} \varphi(z) = \frac{1}{2}\Pi + O\left[(AB)^{3/4}(lgAB)^{3/2}\right].$$

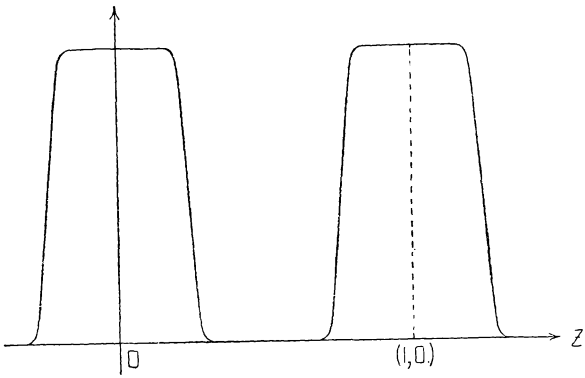
Остается оценить порядок суммы $\sum_{\Omega}\sum (\varphi(z) - \{z\})$.

Из черт. 3 видно, что ось z разбивается на чередующиеся промежутки двух типов:

1) промежутки, в которых $|\varphi(z) - \{z\}| \leq \Delta$,

2) те, в которых это не соблюдено.

Упомянутая сумма, распространенная только по значениям z из промежутков первого типа, очевидно, порядка остаточного члена. Чтобы доказать, что та же сумма, распространен-



Черт. 4.

ная по значениям из остальных промежутков, также порядка остаточного члена, достаточно показать, что

$$\sum_{\Omega}\sum \psi(z) = 0\,[(AB)^{3/4}(lg\,AB)^{3/2}],$$

где $\psi(z)$ изображенная на черт. 4 функция.

Точка $(-2\Delta, 0)$ и точка $(-\Delta, 1)$, точка $(+\Delta, 1)$ и точка $(+2\Delta, 0)$ и т. д. соединены попарно интерполяционной кривой. Доказательство вполне аналогично изложенному выше. Отличие этого случая в том, что $A_0 = 0\,(\Delta)$.

Итак:

$$\sum_{\Omega}\sum \{z\} = \frac{1}{2}\Pi + O\,[(AB)^{3/4}(lgAB)^{3/2}].$$

§ 4. Возвратимся к $F(x, y)$.

В § 2 было установлено $z = F(x, y) + 0\,[(AB)^{-1/4}\,lgAB)^{3/2}]$. При этом $z_{-1} \leq F(x, y) \leq z_{+1}$, где значек определяет выбор ε.

Если между z_{-1} и z_{+1} нет целого числа и z_{+1} — не целое число то:

$$\{z_{-1}\} \leq \{F(x,y)\} \leq \{z_{+1}\}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что число случаев, в которых это условие не соблюдено, будет порядка остаточного члена.

Число этих случаев равно

$$\sum_{\Omega}\sum [z_{+1}] - \sum_{\Omega}\sum [z_{-1}].$$

$$\sum_{\Omega}\sum [z_{\varepsilon}] = \sum_{\Omega}\sum z_{\varepsilon} - \sum_{\Omega}\sum \{z_{\varepsilon}\} =$$

$$= \sum_{\Omega}\sum F(x,y) - \frac{1}{2}\Pi + O\left[(AB)^{3/4}(lgAB)^{3/2}\right].$$

Таким образом, теорема доказана:

$$\sum_{\Omega}\sum \{F(x,y)\} = \frac{1}{2}\Pi + O\left[(AB)^{3/4}(lgAB)^{3/2}\right].$$

§ 5. Пользуясь тем же методом, очень просто доказать теорему, данную проф. И. М. Виноградовым [1]).

Теорема: Пусть в промежутке (R, Q) функция $F(x)$ имеет первую и вторую производные, при чем:

$$\frac{1}{A} \leq F''(x) \leq \frac{k}{A},$$

где A — положительная величина, превосходящая постоянное число, большее единицы, и могущая принимать сколь угодно большие значения одновременно с изменением промежутка (R, Q) и вида функции, буква же k обозначает конечное постоянное число. Пусть, сверх того, $Q - R \leq gA$, где g — постоянное число. При этих условиях сумма дробных частей $F(x)$, распространенная по целым значениям x из промежутка (R, Q), может быть представлена в форме:

$$\sum_{x \geqslant R}^{x \leq Q} \{F(x)\} = \frac{1}{2}(Q-R) + O\left(A^{2/3}(lgA)^{4/3}\right) \quad ^{2)}.$$

[1]) Известия Ак. Н. 1917 г и Магистерская дисс. 1920 г.

[2]) В формулировке теоремы мною сделаны несущественные отклонения от указанных работ И. М. Виноградова. При данных условиях первая работа даст остаточный член $0\ [(AlgA)^{2/3}]$, а вторая—$0\ (A^{2/3})$.

Доказательство не составит затруднения, если положить:

$$A^{1/3}(lgA)^{2/3}=X,\quad A^{2/3}(lgA)^{-2/3}=G,\quad A^{-1/3}(lgA)^{1/3}=\Delta,$$

за первую кривую взять ломаную, изображенную на черт. 3, а за вторую кривую — ломаную, полученную из кривой, изображенной на черт. 4, заменой отрезков параболы отрезками прямой.

§ 6. Возвратимся к нашей теореме.

Предположим, что одно из условий (*) не соблюдено. Пусть

$$\frac{B^{3/8}}{A^{1/8}}(lgAB)^{3/4},$$

есть величина бесконечно-малая и $B>C>1$, где С — постоян ное число.

Непосредственным применением теоремы предыдущего параграфа получаем

$$\sum_{\Omega}\sum\{F(x,\,y)\}=\frac{1}{2}\,\Pi+O\,[A^{2/3}B\,(lgA)^{4/3}],$$

где Π — число целых точек. В данном случае остаточный член более низкого порядка, чем

$$O\,[(AB)^{3/4}(lgAB)^{3/2}]$$

и тем значительнее, чем меньше B по сравнению с A. Только в данном случае под Π нельзя разуметь площадь области. При делении области сетью прямых:

$$x=u,$$
$$x=v,$$

где u и v пробегают все целые числа, замечаем, что разность между площадью области и числом целых точек, вообще говоря, того же порядка, как число задетых контуром квадратов; т. е. равна:

$$O(A+B),$$

что не является в данном случае величиной порядка остаточного члена.

В заключение замечу, что явное или скрытое участие в данном вопросе вторых производных существенно. Поэтому на вряд ли можно найти подобную теорему при значительно более простых условиях.

В целях краткости я не излагаю никаких приложений доказанной теоремы, тем более, что применение ее не представляет затруднений.

Ueber einen asymptotischen Ausdruck für die Summe der gebrochenen Teile einer Funktion zweier Argumente.

M. Gelbcke.

In vielen Fragen der analytischen Zahlentheorie ergibt sich die Notwendigkeit einen asymptotischen Ausdrück für die Zahl der Gitterpunkte innerhalb eines gewissen variablen Volumens aufzustellen; dieses Problem reduziert sich seinerseits auf die Angabe eines asymptotischen Ausdrucks für die Summe der gebrochenen Teile einer Funktion zweier Argumente. In der vorliegenden Arbeit wird der folgende allgemeine Satz bewiesen.

Es sei das Gebiet Ω der Veränderlichen x und y durch eine solche Linie begränzt, dass eine beliebige der x—Axe oder der y—Axe parallele Gerade das Gebiet Ω in nicht mehr als zwei Teile trennt. Die Linie selbst oder gewisse Teile derselben brauchen dem Gebiete Ω nicht anzugehören. Ferner soll die Funktion $F(x, y)$ im Cebiete Ω die ersten und zweiten Ableitungen besitzen, wobei

$$\frac{1}{A} \leq F_{xx}''(x, y) \leq \frac{k}{A}$$

$$\frac{1}{B} \leq F_{yy}''(x, y) \leq \frac{l}{B}$$

$$| F_{xy}''(x, y) | \leq s \sqrt{F_{xx}''(x, y)\ F_{yy}(x, y)}$$

während A und B Grössen vorstellen, welche $> C > 1$ sind und bei Veränderung des Gebietes Ω und der Wahl der Funktion $F(x, y)$ beliebig grosse Werte annehmen können, C—eine Konstante und k, l, s absolute Konstanten bedeuten, welche den Ungleihungen $s < 1$ und $s < \frac{1}{\sqrt[4]{kl}}$ genügen. Endlich sei die Differenz der extremen Abszissen— und Ordinaten-werte nicht grösser als gA bezw. hB, wo g und h Konstanten vorstellen. Unter den angegebenen Bedingungen kann die Summe der gebrochenen Teile der Funktion $F(x, y)$ über sämmtliche innerhalb des Gebietes Ω befindlichen Gitterpunkte in der Form

$$\sum_{\Omega}\sum \{F(x, y)\} = \frac{1}{2}\Pi + O\left((AB)^{3/4}\ (lg\ AB)^{3/2}\right)$$

dargestellt werden, wobei Π die Anzahl der Gitterpunkte im Gebiete Ω bedeutet. Unter den ergänzenden Bedingungen

$$\frac{A^{3/8}}{B^{1/8}}(lg\ AB)^{3/4} \geq t > 0;\ \frac{B^{3/8}}{A^{1/8}}\ (lg\ AB)^{3/4} \geq t > 0;\quad t = Const.$$

kann unter Π auch der Flächeninhalt von Ω verstanden werden.

О законе притяжения.

Н. П. Неронов.

§ 1. Представление потенциала силы притяжения бесконечным рядом.

Предположим закон притяжения таким, что потенциал силы притяжения между двумя материальными точками с массами M (солнце), m (планета) и взаимным расстоянием ρ выражается бесконечным рядом, где опущена произвольная постоянная,

$$(1) \quad U = fmM\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{\nu}{\rho^4} + \dots\right); \ \rho \geq \rho_0 > 0.$$

Отсюда сила притяжения

$$(2) \quad F = \frac{dU}{d\rho} = -fmM\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2\lambda}{\rho^3} + \frac{3\mu}{\rho^4} + \frac{4\nu}{\rho^5} + \dots\right); \ \rho \geq \rho_0 > 0.$$

Коэффициенты λ, μ, ν, ... вполне определяются заданием той или иной формы закона для силы притяжения после разложения ее в бесконечный ряд.

Если принять закон притяжения Ньютона ($\lambda = \mu = \nu = \ldots = 0$), то относительное движение планеты по отношению к солнцу будет определяться в функции времени t уравнениями [1])

$$n = \sqrt{\frac{f(M+m)}{a^3}}; \ \zeta = n(t-\tau); \ u - e \sin u = \zeta;$$

$$(3) \quad r = a(1 - e\cos u);$$

$$\operatorname{tang}\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{u}{2}; \ r = \frac{\rho}{1+e\cos w}; \ \rho = \frac{b^2}{a}$$

Здесь введены обозначения: a и b—соответственно большая и малая полуоси эллиптической орбиты планеты; e—эксцентриситет эллипса; r—радиус вектор, соединяющий планету с центром тяжести солнца; w—истинная аномалия планеты;

[1]) Tisserand: „Traité de Mécanique céleste“, t. I, § 31.

u—эксцентрическая аномалия; ζ—средняя аномалия; τ - момент прохождения планеты через перигелий. Сохраняя обозначения Небесной механики и соответствующую терминологию [1]), введем следующие углы, определяющие положение планеты в пространстве, с той только разницей, что роль плоскости эклиптики для 1-го января 1850 года у нас будет играть плоскость солнечного экватора: θ—долгота восходящего узла плоскости орбиты относительно плоскости солнечного экватора, φ—наклонение плоскости орбиты к той же плоскости, $\overline{\omega}$—долгота перигелия, $\overline{\nu}$—долгота планеты на ее орбите.

Тогда истинная и эксцентрическая аномалии представятся в виде, если ввести ε—среднюю долготу эпохи,

$$w = \overline{\nu} - \overline{\omega};\ \zeta = n\ (t - \tau) = nt + \varepsilon - \overline{\omega}. \tag{4}$$

Если закон притяжения отличен от закона Ньютона, то постоянные a, e, φ, θ, $\overline{\omega}$, ε в уравнениях (3) эллиптического движения планеты можно рассматривать, как неизвестные функции времени, подлежащие определению.

Приняв, что сила притяжения между двумя материальными точками выражается рядом (2), вычислим ее потенциал, считая солнце сплошным телом, а планету по прежнему точкой. Главный центральный эллипсоид инерции солнца примем за эллипсоид вращения.

Будем иметь

$$\begin{aligned} U &= fm \int\limits_M \left(\frac{1}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{\nu}{\rho^4} + \ldots \right) dM = \\ &= fm \left\{ \frac{M}{r} + \frac{\lambda M}{r^2} + \frac{2\mu' M + 3i \sin^2 (\overline{\nu} - \theta) \cdot \sin^2 \varphi}{2r^3} + \left[\frac{1}{r} \right]_4 \right\}; \\ \mu' &= \mu - \frac{i}{2M};\ i = A - C. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь r имеет прежнее значение, а A и C суть главные центральные моменты инерции солнца: A относительно оси, лежащей в плоскости экватора, и C относительно оси вращения эллипсоида.

Применяя метод усиливающих функций, можно показать, что ряд (5) для U будет сходящимся, если $r > \rho_0 + \delta_{max}$, где δ_{max} обозначает наибольшее расстояние от центра тяжести солнца до его поверхности.

Точно таким же образом доказывается сходимость ряда, полученного из ряда (5) дифференцированием его по прямоугольным координатам планеты или по какому-либо параметру, функцией которого являются эти координаты.

---

[1]) Tisserand, ibid., § 32.

В общем случае сила притяжения перестает быть центральной. Она превращается в центральную, если считать солнце материальной точкой или, например, принять, что оно ограничено сферической поверхностью и плотность его в каждой точке есть функция только одного расстояния этой точки до центра ограничивающей сферы ($i=0$).

§ 2. Первый частный случай [1]).

Если в рядах (1) и (2) все коэффициенты μ, ν, ..., кроме λ, равны нулю и кроме того солнце и планета рассматриваются, как материальные точки, благодаря чему сила притяжения получается центральной, то можно показать, исходя из интегралов живой силы и площадей, что уравнения движения планеты будут отличаться от уравнений эллиптического движения (3) лишь тем, что истинная аномалия w приобретет множитель $\sqrt{\frac{\rho}{\rho+2\lambda}}$. Если этот множитель является рациональным числом, то траектория планеты будет замкнутой алгебраической кривой. Смещение перигелия за один оборот планеты вокруг солнца представится в виде, если воспользоваться разложением в ряд при малом λ,

$$2\pi\left(\sqrt{1+\frac{2\lambda}{\rho}}-1\right)=\frac{2\pi\lambda}{\rho}+\ldots \tag{6}$$

§ 3. Второй частный случай.

Считая силу притяжения центральной (§ 2), положим, что в рядах (1) и (2) все коэффициенты ν, ..., кроме λ и μ, равны нулю. Пользуясь интегралами живой силы и площадей, получаем уравнение траектории планеты в полярных координатах r и w [2])

$$r=\frac{b_0}{4\,\wp\,(\omega'+w)-b_1} \tag{7}$$

Здесь через $\wp\,(\omega'+w)$ обозначена эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами

$$g_2=\frac{12\,(b_1^2-b_0b_2)}{16}\,;\quad g_3=\frac{3b_0b_1b_2-2b_1^3-b_0^2b_3}{16} \tag{8}$$

---

[1]) Routh: „A treatise on Dynamics of a particle", 1898, § 359.

[2]) Общая теория относительности дает уравнение траектории такого же вида: Forsyth, „Proceedings of the Royal Society", Section A, vol. XCVII, 1920, p. 145; Morley, „American Journal of Mathematics", vol. XLIII, 1921, p. 29; Jans, Académie Royale de Belgique, Classe des sciences, 1923, Mémoires. t. VII, fasc. 5.

В свою очередь

$$(9)\qquad b_0=\frac{2f\mu\ (M+m)}{D^2};\ 3b_1=-1+\frac{2f\lambda\ (M+m)}{D^2};$$

$$3b_2=\frac{2f\ (M+m)}{D^2};\quad b_3=\frac{h}{D^2}$$

Через $\frac{mh}{2}$ и D обозначены произвольные постоянные интегралов живой силы и площадей

$$(10)\qquad \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]=U+\frac{mh}{2};\ \ r^2\ \frac{dw}{dt}=D.$$

Наконец, 2ω и $2\omega'$ суть вещественный и чисто-мнимый периоды эллиптической функции, а $e_1=\wp\ (\omega)$, $e_2=\wp\ (\omega+\omega')$, $e_3=\wp\ (\omega')$ $(e_1>e_2>e_3)$ вещественные корни полинома $4x^3-g_2x-g_3$.

Когда полярный угол w возрастает от нуля до ω, функция $\wp\ (\omega'+w)$ возрастает от e_3 до e_2. При дальнейшем возрастании угла w до ∞, изменение функции $\wp\ (\omega'+w)$ будет заключаться в тех же границах. Соответствующие значения радиуса вектора r планеты будут заключены между r_{max} и r_{min}.

Закон движения планеты по ее орбите выражается уравнением

$$(11)\qquad \frac{16D\wp'(v)}{b_0^2}\,(t-\tau)=\frac{d}{dv}\left\{\left[\frac{log\,\frac{\sigma\ (u-v)}{\sigma\ (u+v)}+2u\,\zeta\,(v)}{\wp'\ (v)}\right]_{u=\omega'}^{u=\omega'+w}\right\}.$$

Здесь введены обычные обозначения σ и ζ функций Вейерштрасса. Постоянный параметр v определяется уравнением $\wp\ (v)=\frac{b_1}{4}$. Полагая в равенстве (11) $w=2\omega$, получим время T, протекающее между двумя последовательными прохождениями планеты через перигелий,

$$(12)\qquad T=\frac{b_0^2}{4D\wp'\ (v)}\ \frac{d}{dv}\ \frac{\omega\zeta\,(v)-v\zeta\,(\omega)}{\wp'\,(v)}.$$

Считая λ и μ малыми, представляем смещение перигелия за один оборот планеты вокруг солнца в виде ряда

$$(13)\qquad 2\omega-2\pi=\frac{2\pi\lambda}{\rho}+\frac{6\pi\mu}{\rho^2}+\ldots$$

При малых λ и μ параметр ρ можно считать имеющим то же значение, что и в эллиптическом движении.

§ 4. Интервал сходимости процесса последовательных приближений.

Переходя от разобранных частных случаев к общему, применим метод вариации произвольных постоянных и будем считать, что интегралы изучаемого движения совпадают с интегралами эллиптического движения (3), но шесть произвольных постоянных последнего a, e, φ, θ, $\overline{\omega}$, ε суть неизвестные функции времени t. Будем интегрировать получающуюся систему дифференциальных уравнений по методу последовательных приближений, принимая за начальное значение независимого переменного t_0, а за начальные значения неизвестных функций a_0, e_0, φ_0, θ_0, $\overline{\omega}_0$, ε_0. Займемся прежде всего вопросом о сходимости этого процесса. Для упрощения вычислений ограничимся случаем центральной силы, рассматривая солнце и планету, как материальные точки. Вводим пертурбационную функцию R

$$U = mk^2\left(\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^3} + \frac{\nu}{r^4} + \ldots\right) =$$

$$= m\left(\frac{k^2}{r} + R\right);\quad k = \sqrt{f\,(M+m)};$$

$$R = k^2\left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^3} + \frac{\nu}{r^4} + \ldots\right); \tag{14}$$

$$F = -\,mk^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\lambda}{r^3} + \frac{3\mu}{r^4} + \frac{4\nu}{r^5} + \ldots\right).$$

Дифференциальные уравнения, определяющие неизвестные функции, представляются в виде [1])

$$(1)\ \frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon};\qquad (2)\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,sin\,\varphi}\,\frac{\partial R}{\partial \varphi};$$

$$(3)\ \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{tang\,\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial\varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial e};$$

$$(4)\ \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial\overline{\omega}} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}; \tag{15}$$

$$(5)\ \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,sin\,\varphi}\,\frac{\partial R}{\partial\theta} -$$

$$-\frac{tang\,\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\overline{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right);$$

---

[1]) Tisserand, ibid., chap. IX, X.

$$(6)\ \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varphi} +$$

$$+\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Так как пертурбационная функция R не содержит переменных φ и θ, то 2-ое и 5-ое уравнения предыдущей системы дают $\varphi = const.$, $\theta = const.$, т. е. движение получается плоским. Обозначим через h искомую величину интервала времени $(t_0,\ t_0+h)$, в пределах которого мы можем быть уверены в сходимости процесса последовательных приближений.

Предполагая выполнение условия $0 < e_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, будем иметь два случая в зависимости от величины начального эксцентриситета.

Если

$$(16)\qquad e_0 < \frac{9}{7}\sqrt[3]{\frac{3|\lambda|(1+\chi)\left[1-2\sqrt{\frac{9}{7}}\,e_0\,(1+e_0)\right]}{2a_0\left(1-\frac{11}{9}\,e_0\right)^4}},$$

то

$$(17)\qquad h = \frac{1}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{7}{2}}\frac{a_0 e_0\left(1-\frac{11}{9}\,e_0\right)^4}{n_0\,|\lambda|\,(1+\chi)}\ ;\quad n_0 = k a_0^{-\frac{3}{2}}$$

При этом переменные a и e будут заключены в интервалах

$$a_0\left(1\pm\frac{2}{9}\right);\quad e_0\ \left(1\pm\frac{2}{9}\right).$$

Если

$$(18)\ e_0\left[(1+e_0)+\sqrt{(1+e_0)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{a_0 e_0\left(1-\frac{6}{5}e_0\right)^4}{\lambda|\,(1+\chi)}}\right] > \sqrt{\frac{4}{5}}$$

или, усиливая,

$$(19)\qquad e_0 > \frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{5\,|\lambda|\,(1+\chi)}{3a_0\left(1-\frac{6}{5}\,e_0\right)^4}},$$

то

$$(20)\ h = \frac{1}{6n_0e_0}\left[-(1+e_0)+\sqrt{(1-e_0)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{a_0e_0\left(1-\frac{6}{5}\,e_0\right)^4}{|\lambda|\,(1+\chi)}}\right],$$

Значения функций a и e не выйдут из интервалов

$$a_0\left(1 \pm \frac{1}{5}\right);\quad e_0\left(1 \pm \frac{1}{5}\right).$$

Для определения коэффициента χ нужно составить функцию $S(r)$

$$S(r) = -\frac{F}{mk^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda}{r^3} - \frac{3\mu}{r^4} + \frac{4\nu}{r^5} + \ldots \tag{21}$$

Так как $r = a(1 - e\cos u)$, то наиболее широкому из двух предыдущих интервалов для a и e соответствует следующий интервал для r

$$r_{min} = \frac{7}{9}a_0\left(1 - \frac{11}{9}e_0\right);\quad r_{max} = \frac{11}{9}a_0\left(1 + \frac{11}{9}e_0\right). \tag{22}$$

Коэффициент χ определяется неравенством

$$\chi > \left|\frac{r^3}{2\lambda}S(r)\right|;\quad r_{min} < r < r_{max}. \tag{23}$$

При беспредельном возрастании a_0 число χ можно взять сколь угодно малым.

В основу наших рассуждений было положено, что коэффициент λ не равен нулю. Если бы он был равен нулю, то вместо него в формулы вошел бы коэффициент μ, полагая последний не равным нулю. Как и раньше, мы имели бы два случая в зависимости от величины начального эксцентриситета.

Если

$$e_0 < \frac{11}{9}\sqrt[3]{\frac{121\,|\mu|\,(1+\chi)\left[1 - 2\sqrt{\frac{11}{9}e_0(1+e_0)}\right]}{36\,a_0^2\left(1 - \frac{13}{11}e_0\right)^5}}, \tag{24}$$

то

$$h = \frac{2}{33}\left(\frac{9}{11}\right)^{\frac{9}{2}}\frac{a_0^2e_0\left(1 - \frac{13}{11}e_0\right)^5}{n_0\,|\mu|\,(1+\chi)}. \tag{25}$$

Переменные a и e будут заключены в интервалах

$$a_0\left(1 \pm \frac{2}{11}\right);\quad e_0\left(1 \pm \frac{2}{11}\right).$$

Если

$$e_0\left[(1+e_0) + \sqrt{(1+e_0)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{a_0^2\,e_0\left(1 - \frac{7}{6}e_0\right)^5}{|\mu|\,(1+\chi)}}\right] > \sqrt{\frac{5}{6}} \tag{26}$$

или, усиливая,

$$(27) \qquad e_0 > \frac{6}{5} \sqrt[3]{\frac{18\,|\,\mu\,|\,(1+\chi)}{5a_0^2\left(1-\frac{7}{6}\,e_0\right)^5}}\,,$$

то

$$(28) \quad h = \frac{1}{6n_0e_0}\left[-(1+e_0)+\sqrt{(1+e_0)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{a_0^5\,e_0\left(1-\frac{7}{6}e_0\right)^5}{|\,\mu\,|\,(1+\chi)}}\,\right].$$

Значения функций a и e не выйдут из интервалов

$$a_0\left(1 \pm \frac{1}{6}\right)\,;\;\; e_0\,\left(1 \pm \frac{1}{6}\right).$$

Функция $S\,(r)$ имеет вид

$$(29) \qquad S\,(r) = -\frac{F}{mk^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{3\mu}{r^4} = \frac{4\nu}{r^5} + \ldots$$

Коэффициент χ определяется неравенством

$$(30) \qquad \chi > \left|\frac{r^4}{3\mu}\,S\,(r)\right|;\;\; r_{min} < r < r_{max}\,,$$

где

$$(31) \quad r_{min} = \frac{9}{11}\,a_0\left(1-\frac{13}{11}\,e_0\right);\; r_{max} = \frac{13}{11}\,a_0\left(1+\frac{13}{11}\,e_0\right)$$

Для больших значений a_0 имеет силу прежнее значение относительно малости χ.

Если ограничиваться только первым приближением, то ошибка, получающаяся при вычислении какой-либо из искомых функций для момента времени, не выходящего из выше определенного интервала, будет по абсолютной величине меньше, чем

$$(32) \qquad \frac{M}{A+B}\left[e^{(A+B)(t-t_0)} - 1 - (A+B)\,(t-t_0)\right],$$

где положительные количества M, A, B имеют те же значения, что и у Goursat [1]); $e = 2{,}71828\ldots\ldots$

Из найденных формул для h следует, что величина интервала сходимости процесса последовательных приближений зависит от отношения $\frac{a_0e_0}{|\,\lambda\,|}$, если $\lambda \neq 0$, или от отношения $\frac{a_0^2e_0}{|\,\mu\,|}$, если $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$. Ниже будут приведены некоторые соображения относительно чрезвычайной малости дроби $|\,\lambda\,| : a_0$ (§ 6). Но,

[1]) Goursat: „Cours d'Analyse mathématique", 1925, t. II, § 388.

вообще говоря, каковы бы ни были коэффициенты λ и μ, при начальном значении эксцентриситета, близком к нулю, интервал h будет чрезвычайно мал. Случай $e_0 = 0$ мы не рассматриваем.

§ 5. Общий случай.

В общем случае мы не будем приписывать каких-либо частных значений коэффициентам λ, μ, ν, ..., а также считать силу притяжения центральной.

Пренебрежем, благодаря малости m по сравнению с M, влиянием планеты на движение солнца.

Пертурбационная функция будет иметь вид

$$R = k^2\left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu'}{r^3}\right) + \frac{\delta}{r^3} sin^2(\bar{\nu} - \theta) \cdot sin^2\varphi + \ldots; \; k = \sqrt{fM};$$

$$\delta = \frac{3fi}{2}; \; \mu' = \mu - \frac{i}{2M}; \quad i = A - C. \tag{33}$$

Из формул эллиптического движения получаем следующие разложения [1]), сходящиеся при малых значениях e:

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\zeta + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2\zeta) + \ldots; \quad \zeta = nt + \varepsilon - \bar{\omega}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} = 1 + 2e\cos\zeta + \frac{e^2}{2}(1 + 5\cos 2\zeta) + \ldots$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-3} = 1 + 3e\cos\zeta + \frac{3e^2}{2}(1 + 3\cos 2\zeta) + \ldots \tag{34}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w = \bar{\nu} - \bar{\omega} = \zeta + 2e\sin\zeta + \frac{5e^2}{2}\sin 2\zeta + \ldots$$

Отсюда

$$\begin{aligned} sin^2(\bar{\nu} - \theta) = \frac{1}{2}\,[1 - \cos 2\,(nt + \varepsilon - \theta)] + \\ + 2e\sin(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) \cdot \sin 2\,(nt + \varepsilon - \theta) + \\ + \frac{e^2}{4}\,[\cos 2\,(\bar{\omega} - \theta) + \\ + 8\cos 2\,(nt + \varepsilon - \theta) - 9\cos 2\,(2nt + 2\varepsilon - \bar{\omega} - \theta)] + \ldots \end{aligned} \tag{35}$$

---

1) Tisserand, ibid., Chap. XVI.

Делая подстановку, получаем выражение пертурбационной функции в виде целого ряда относительно e

$$
\begin{aligned}
R = & \left\{\frac{k^2\lambda}{a^2} + \frac{k^2\mu'}{a^3} + \frac{\delta \sin^2\varphi}{2a^3}[1 - \cos 2(nt + \varepsilon - \theta)] + \ldots\right\} + \\
& + e\left\{\left(\frac{2k^2\lambda}{a^2} + \frac{3k^2\mu'}{a^3}\right)\cos(nt + \varepsilon - \theta) + \right. \\
& + \frac{\delta \sin^2\varphi}{4a^3}[6\cos(nt + \varepsilon - \overline{\omega}) - 7\cos(3nt + 3\varepsilon - \overline{\omega} - 2\theta) + \\
& \left. + \cos(nt + \varepsilon + \overline{\omega} - 2\theta)] + \ldots\right\} + \\
(36) \qquad & + e^2\left\{\frac{k^2\lambda}{2a^2}[1 + 5\cos 2(nt + \varepsilon - \overline{\omega})] + \right. \\
& + \frac{3k^2\mu'}{2a^3}[1 + 3\cos 2(nt + \varepsilon - \overline{\omega})] + \\
& + \frac{\delta \sin^2\varphi}{8a^3}[6 + 5\cos 2(\overline{\omega} - \theta) + 18\cos 2(nt + \varepsilon - \overline{\omega}) + \\
& \left. + 10\cos 2(nt + \varepsilon - \theta) - 39\cos 2(2nt + 2\varepsilon - \overline{\omega} - \theta)] + \ldots\right\} + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Подставляем значения производных пертурбационной функции по переменным a, e, φ, θ, $\overline{\omega}$, ε в систему дифференциальных уравнений (15) и приписываем этим переменным начальные значения. Тогда правые части уравнений будут содержать, как периодические члены с периодами $\frac{2\pi}{n_0}$, $\frac{2\pi}{2n_0}$, $\frac{2\pi}{3n_0}$, ..., где $n_0 = ka_0^{-\frac{3}{2}}$, так и непериодические.

Так как нас интересуют приращения функций a, e, φ, θ, $\overline{\omega}$, ε за время одного оборота планеты вокруг солнца $T = \frac{2\pi}{n_0}$, то мы возьмем в квадратурах первого приближения за пределы интегрирования t_0 и $t_0 + T$.

Операция интегрирования требует равномерной сходимости рядов, которыми выражаются упомянутые производные пертурбационной функции [1]).

---

[1]) Считая солнце и планету материальными точками, не трудно показать, пользуясь рядом Лангранжа (Goursat, ibid., t. II, § 302), что, напр., интеграл $\int_{t_0}^{t} \frac{\partial U}{\partial a}\, dt$ есть голоморфная функция эксцентриситета e.

Приращения функций a, e, φ, θ, $\overline{\omega}$, ε за один оборот планеты представятся степенными рядами относительно e_0 и $\frac{1}{a_0}$, в которых ниже выписаны только первые члены:

$$(a)_{t_0}^{t_0+T}=0;\quad (\theta)_{t_0}^{t_0+T}=\frac{3\pi i\cos\varphi_0}{Ma_0^2}+\ldots$$

$$(\omega)_{t_0}^{t_0+T}=\frac{2\pi\lambda}{a_0}+\frac{6\pi\mu'}{a_0^2}+\frac{15\pi i\sin^2\varphi_0}{4Ma_0^2}[2+\cos 2(\overline{\omega}_0-\theta_0)]+\ldots$$

$$(e)_{t_0}^{t_0+T}=\frac{15\pi e_0 i\sin^2\varphi_0\,.\,\sin 2(\overline{\omega}_0-\theta_0)}{4Ma_0^2}+\ldots \tag{37}$$

$$(\varphi)_{t_0}^{t_0+T}=-\frac{15\pi e_0^2 i\sin 2\varphi_0\,.\,\sin 2(\overline{\omega}_0-\theta_0)}{8Ma_0^2}+\ldots$$

$$(\varepsilon)_{t_0}^{t_0+T}=\frac{8\pi\lambda}{a_0}+\frac{12\pi\mu'}{a_0^2}+$$

$$+\frac{3\pi i\sin^2\varphi_0}{2Ma_0^2}\left[7-tg^2\frac{\varphi_0}{2}-3\cos 2(n_0t_0+\varepsilon_0-\theta_0)\right]+\ldots$$

Разность $\overline{\omega}-\theta$ измеряет угловое расстояние между перигелием и восходящим узлом плоскости орбиты. Смещение перигелия за один оборот планеты

$$(\omega-\theta)_{t_0}^{t_0+T}=\frac{2\pi\lambda}{a_0}+\frac{6\pi\mu'}{a_0^2}+ \tag{38}$$

$$+\frac{3\pi i}{4Ma_0^2}\left\{5\sin^2\varphi_0\cdot[2+\cos 2(\overline{\omega}_0-\theta_0)]-4\cos\varphi_0\right\}+\ldots$$

Этот результат при $i=0$ согласуется с найденными иным путем и для частных случаев выражениями (6) и (13), если в них положить для орбит почти круговых $\rho=a_0$.

Первые члены полученных рядов показывают, что изменение угла θ, т. е. прецессионное движение плоскости орбиты, и изменение угла φ, т. е. нутационное движение той же плоскости, обусловливаются исключительно коэффициентом i, характеризующим распределение массы на солнце. Следствием изменения углов θ и φ является движение узлов плоскости орбиты.

Изменение эксцентриситета e также зависит исключительно от коэффициента i.

Что же касается углового смещения перигелия $\overline{\omega}-\theta$, то оно зависит и от коэффициента i и от коэффициентов λ, μ ряда (2), выражающего силу притяжения.

§ 6. О численном значении коэффициентов λ, μ, i.

Определить с удовлетворительной степенью точности числовую величину коэффициентов λ, μ, i возможно только при наличии достаточно точных астрономических данных. В противном случае числовая оценка будет носить общий и приближенный характер. Следующие соображения позволяют оценить порядок величины коэффициента λ. Эйнштейну принадлежит выражение [1]), вытекающее из общей теории относительности, для смещения перигелия планеты за один ее оборот вокруг солнца

$$(39)\qquad \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)} = \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{3fM}{c^2}; \quad \left(p = \frac{b^2}{a}\right),$$

где c обозначает скорость света, а остальные обозначения совпадают с нашими. Для орбит почти круговых $p = a_0$. Что касается точности формулы Эйнштейна, то, как известно, она дает прекрасный результат, в смысле совпадения с астрономическими вычислениями, для Меркурия и, повидимому, не столь удовлетворительный для других планет, быть может, вследствие недостаточной точности результатов упомянутых выше вычислений для последних (планет).

Если сделать предположение, что коэффициент λ не равен нулю, то для достаточно больших значений a_0 в ряду (38) можно ограничиться его первым членом. Тогда сравнение с формулой Эйнштейна дает приблизительную величину коэффициента λ

$$(40)\qquad \lambda = \frac{3fM}{c^2}.$$

Sur la loi de l'attraction.

N. Neronoff.

Posons la loi de l'attraction ayant telle forme que le potentiel de la force d'attraction agissant entre deux points matériels de masses M et m s'exprime par la série (1), où ρ est leur distance [2]).

La force d'attraction a l'expression (2).

Déterminons la position d'une planète dans l'espace par le procédé employé en Mécanique céleste. Mais le plan de l'équateur du soleil

---

[1]) Einstein: „Sitzungsberichte der Preuss. Akademie der Wissenschaften", 1915, p. 831.

[2]) Voir la Note précédente (p. 299) dont le résumé a été énoncé à la Soc. Astron. de Leningrad au janvier 1926.

jouera le rôle du plan de l'écliptique au 1-er janvier 1850. Conservons aussi la terminologie correspondante [1]).

Considérons la planète comme le point matériel de masse m et le soleil comme le corps continu de masse M dont les moments d'inertie principaux relatifs à son centre de gravité sont $A=B$ et C.

Le potentiel de la force d'attraction se présente sous la forme de la série (5), où r désigne la distance de la planète au centre de gravité du soleil, θ—la longitude du noeud ascendant du plan de l'orbite par rapport au plan de l'équateur du soleil, φ—l'inclinaison de l'orbite par rapport au même plan et $\bar{v}$—la longitude de la planète dans son orbite.

Étudions la convergence de la série (5) par la méthode des fonctions majorantes (§ 1).

Examinons deux cas particuliers quand la force d'attraction, le soleil et la planète étant regardés comme les points matériels, est centrale et dans les séries (1) et (2) seulement quelques de premiers coefficients sont différents de zéro (§§ 2, 3).

Dans le cas général nous considérons les éléments du mouvement elliptique a (le demi grand axe de l'orbite), e (l'excentricité), φ, θ, $\bar{\omega}$ (la longitude du périhélie) et ε (la longitude moyenne de l'époque) comme les fonctions inconnues du temps t prenant les valeurs initiales a_0, e_0, φ_0, θ_0, ω_0, ε_0 pour $t=t_0$.

Déterminons ces fonctions du système des équations différentielles (15), où R désigne la fonction pertubatrice [2]).

Employons pour l'intégration du système (15) la méthode des approximations successives et trouvons l'intervalle du temps $(t_0,\ t_0+h)$ pour lequel le procédé sera convergeant en supposant, pour simplifier les formules, la force d'attraction comme centrale (§ 4).

Cette restriction n'a pas lieu plus loin.

Quand le temps reçoit l'accroissement $T=\frac{2\pi}{n_0}$, où $n_0=ka_0^{-\frac{3}{2}}$ et $k=\sqrt{fM}$, égal à la durée de la révolution de la planète sur son orbite, nous avons de la première approximation (§ 5) les expressions pour les accroissements des fonctions inconnues qui se présentent sous la forme des séries (37), ordonnées suivant les puissances de $\frac{1}{a_0}$ et e_0.

Le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète a la forme (38).

Les premiers termes des séries (37) et (38) montrent que:

1) le changement des angles θ et φ ne dépend que du coefficient i caractérisant la distribution de la masse du soleil. A cause du changement de ces angles a lieu le mouvement des noeuds du plan de l'orbite;

2) le changement de l'excentricité ne dépend que du coefficient i;

3) le déplacement du périhélie dépend en même temps du coefficient i et des coefficients λ, μ des séries (1) et (2).

---

[1]) Tisserand. „Traité de Mécanique céleste“, t. I, §§ 31, 32.

[2]) Tisserand, ibid., Chap. IX, X.

Si le coefficient λ est différent de zéro, nous ne retenons dans la série (38) pour les valeurs de $\frac{1}{a_0}$ et e_0 suffisamment petites que le premier terme. La comparaison à la formule d'Einstein (39), déduite de la théorie de la Relativité, où c désigne la vitesse de la lumière et pour les orbites presque circulaire $\rho = a_0$, donne la valeur approximative de λ (40).

Les valeurs exactes des coefficient λ, μ, i ne peuvent être reçues que des calculs astronomiques.

Ueber einige asymptotische Formeln.

A. Dymmann.

Herr Professor J. M. Winogradow hat in seiner Abhandlung: „Ueber eine asymptotische Gleichheit der Theorie der quadratischen Formen" (Perm, 1918, russisch) einen asymptotischen Ausdruck für die Summe:

$$\Theta\ (a+b)+\Theta\ (a+2b)+\ldots+\Theta\ (a+Zb)$$

gegeben [1]) Unter $\Theta(D)$ wird folgendes verstanden:

1) $\Theta(D)=h\ (D)$, d. h. der Classenanzahl quadratischer Formen erster Art der Determinante D, wenn $D<0$;

2) $\Theta(D)=0$, wenn D ein vollständiges Quadrat ist;

3) $\Theta(D)=\frac{1}{\pi}\cdot h\ (D)\,.\,lg\ (T+U\ \sqrt{D})$, wo T, U die kleinsten positiven Auflösungen der Pell'schen Gleichung $x^2-Dy^2=1$ bedeuten wenn $D>0$ und kein vollständiges Quadrat ist.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung besteht im Vorfinden analoger asymptotischer Ausdrücke für Summen beliebiger Potenzen der Funktionen $\Theta\ (D)$, d. h:

$$[\Theta\ (a+b)]^m+[\Theta\ (a+2b)]^m+\ldots+[\Theta\ (a+Zb)]^m.$$

Der Vereinfachung unserer Unrersuchungen halber aber, wollen wir, tatt der Progression $a+bx$, die natürliche Reihe betrachten, denn unsere Methode bleibt dieselbe auch für den Fall einer Progression.

1°. Bezeichnen wir mit $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ entweder das Jacobi'sche Symbol, oder Null, je nachdem die Zahlen 2α und β relativ-prim sind, oder nicht, und mit $H\ (D)$ eine folgendermassen definirte Funktion:

$$H\ (D)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\,. \tag{1}$$

wo D kein vollständiges Quadrat ist.

---

[1]) Diese Abhandlung war Herrn Winogradow's Kandidat-Dissertation, nach der Idee Herrn Prof. J. W. Uspensky (jetzt Akademiker) die Dirichlet'schen Reihen an die Berechnung asymptotischer Ausdrücke für die Funktion $\Theta\ (D)$ zu wenden, geschrieben.—Die vorliegende Abhandlung stellt dieselbe Anwendung der Dirichlet'schen Reihen dar.

Da die Reihe (1) bedingt convergent ist, wollen wir unter $[H(D)]^m$ folgendes verstehen:

$$[H(D)]^m = \lim_{\rho \to 0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} \right)^m, \quad \rho > 0.$$

Zeigen wir die Existenz dieses Grenzwerths.

Es ist leicht zu ersehen, dass:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} \right)^m = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\tau_m(n)}{n^{1+\rho}} \tag{2}$$

wo $\tau_m(n)$ die Anzahl aller Zerlegungen der Zahl n in m Faktoren bedeutet. Im Falle, wenn $m = 2$, stellt $\tau(n)$ die Divisorenanzahl der Zahl n dar.

Da die Reihe (2) eine Reihe von der Form

$$\Sigma a_n \cdot \psi_n(\rho), \quad \left(\text{wo } a_n = \left(\frac{D}{n}\right), \quad \psi_n(\rho) = \frac{\tau_m(n)}{n^{1+\rho}}\right),$$

st, und für sie folgende Bedingungen gelten:

1) $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ bleibe bei unendlich wachsendem Index n stets unter einem endlichen Werthe S;

2) $\psi_n(\rho)$ sei reell und positiv;

3) $\psi_n(\rho)$ nehme mit wachsendem Index n ab und convergire gegen Null;

4) $\psi_n(\rho)$ sei eine stetige abnehmende Funktion von ρ, — schliessen wir, dem § 4 Abschn. III der Bachmann'schen „Analytischen Zahlentheorie" zufolge, dass die Reihe (2) eine stetige Funktion von ρ sei. Um den Grenzwerth der Reihe (2), wenn $\rho \to 0$, zu erhalten, setzen wir in den einzelnen Gliedern der Reihe $\rho = 0$, und dann erhalten wir:

$$\lim_{\rho \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\tau_m(n)}{n^{1+\rho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\tau_m(n)}{n} \tag{3}$$

Wenn aber D ein vollständiges Quadrat ist, wollen wir die endliche Reihe:

$$[H(D)]^m = \sum_{n=1}^{Q} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\tau_m(n)}{n}$$

betrachten.

2°. Beschäftigen wir uns mit dem Vorfinden des asymptotischen Ausdrucks der Summe:

$$\Phi\ (X) = [H\ (1)]^m + [H\ (2)]^m + \ldots + [H\ (X)]^m,$$

wenn X unendlich wächst.—Wir setzen voraus, dass die früher genannte Grösse Q eine bestimmte Funktion von X sei, deren Gestalt wir später definiren.

Der Definition der Funktion $H\ (D)$ zufolge, erhalten wir:

$$\Phi\ (X) = \sum_{x>0}^{X} \sum_{n=1}^{Q} \left(\frac{x}{n}\right) \frac{\tau_m\ (n)}{n} + R_0\ (X),$$

wo

$$|\ R_0 (X)\ | < X \cdot \sum_{n>Q}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right) \frac{\tau_m\ (n)}{n}.$$

Wir setzen hier, wie auch überall im folgenden, $X > 4$ und $Q > 4$.

Berechnen wir zuerst das Restglied, und dafür bestimmen wir den Werth der Summe

$$S = \sum_{n=1}^{D} \left(\frac{x}{n}\right) \cdot \tau_m\ (n).$$

Im besonderen Falle, wenn $m = 2$, und, folglich, $\tau\ (n)$ die Anzahl der Zerlegungen der Zahl n in 2 Faktoren darstellt, hat die Summe S die Gestalt:

$$(4) \quad \begin{aligned} S = \left(\frac{x}{1}\right) + 2\left(\frac{x}{2.1}\right) + 2\left(\frac{x}{3.1}\right) + 2\left(\frac{x}{4.1}\right) + \left(\frac{x}{2.2}\right) + \ldots + \\ + 2\left(\frac{x}{d_1\delta_1}\right) + 2\left(\frac{x}{d_2\delta_2}\right) + \ldots + 2\left(\frac{x}{d_\kappa\delta_\kappa}\right). \end{aligned}$$

wo d_i, δ_i reziproke Divisoren der Zahl D bedeuten. Aus dem Ausdrucke (4) sehen wir, dass die Summe S sich folgendermassen darstellen lässt:

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{n=[\sqrt{D}]} \left(\frac{x}{n^2}\right) + 2\left(\frac{x}{1}\right)\left\{\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{x}{D}\right)\right\} + \\ + 2\left(\frac{x}{2}\right)\left\{\left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{x}{[D/2]}\right)\right\} + \\ + \ldots + 2\left(\frac{x}{[\sqrt{D}] - 1}\right)\left\{\frac{x}{[\sqrt{D}]}\right) + \left(\frac{x}{[\sqrt{D}] + 1}\right)\right\} \end{aligned}$$

Da die Anzahl vollständiger Quadrate in der Reihe 1, 2, 3, ... D nicht grösser, als $\sqrt{D}$ ist, jede von der in den grossen Parenthesen enthaltenen Summen aber, dem §. 3 der Winogradow'schen Abhandlung: „Ueber eine asymptotische Gleichheit der Theorie der quadratischen Formen" gemäss, die Ordnung $\sqrt{x}\ lgx$ hat, die Anzahl dieser Summen aber nicht grösser, als $\sqrt{D}$ ist,—erhalten wir:

$$|S| < F \cdot \sqrt{x}\ \ lgx \cdot \sqrt{D}.$$

Wenn aber $m > 2$, stellen wir $\tau_m(n)$ durch die τ—Funktion dar. Fangen wit mit $m=3$ an. — Die Zahl $\tau_3(n)$ ist gleich der Anzahl der Auflösungen in ganzen Zahlen der unbestimmten Gleichung:

(a) $$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = n$$

diese in der Form:

(b) $$x_1 \cdot x_2 = \frac{n}{x_3}$$

geschrieben, sehen wir, dass, für jede angegebene x_3, die Anzahl der Auflösungen der Gleichung (b) gleich $\tau\left(\frac{n}{x_3}\right)$ sei; da aber x_3 sämmtliche Divisoren der Zahl n durchläuft, erhalten wir, $\tau\left(\frac{n}{x_3}\right) = \tau\ (\delta)$ durch alle Divisoren δ der Zahl n summirend, dass die Anzahl der Auflösungen der Gleichung (a) gleich $\Sigma\tau\ (\delta)$ sei.

Darum wird die Summe $S = \sum\limits_{n=1}^{D} \left\{\left(\frac{x}{n}\right) \Sigma\tau\ (\delta)\right\}$ in diesem Falle folgendermassen dargestellt:

$$S = \left(\frac{x}{1}\right) + \left(\frac{x}{2.1}\right)\left(\tau\ (2) + \tau\ (1)\right) + \left(\frac{x}{3.1}\right)\left(\tau\ (3) + \tau\,(1)\right) +$$
$$+ \left(\frac{x}{4.1}\right)\left(\tau\ (4) + \tau\ (1)\right) + \left(\frac{x}{2.2}\right) \tau\ (2) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{x}{d_1\delta_1}\right)\left(\tau\ (d_1) + \tau\ (\delta_1)\right) + \ldots + \left(\frac{x}{d_s\delta_s}\right)\left((\tau\ (d_s) + \tau\ (\delta_s)\right)$$

Schreiben wir S in der Form:

$$S = \left(\frac{x}{1}\right)\left\{\left(\frac{x}{1}\right) \tau\ (1) + \left(\frac{x}{2}\right)\left(\tau\,(2) + \tau\ (1)\right) + \ldots +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{x}{D}\right)\left(\tau\ (D) + \tau\ (1)\right)\right\} + \left(\frac{x}{2}\right)\left\{\left(\frac{x}{2}\right) \tau\ (2) + \left(\frac{x}{3}\right)\left(\tau\ (3) + \tau\,(2)\right) +\right.$$
$$\left. + \ldots + \left(\frac{x}{[D/2]}\right)\left(\tau\ \left(\left[\frac{D}{2}\right]\right) + \tau\ (2)\right)\right\} +$$
$$+ \ldots + \left(\frac{x}{[\sqrt{D}]}\right)\left(\frac{x}{[\sqrt{D}]}\right) \cdot \tau\ ([\sqrt{D}]),$$

und fügen die Symbole mit den gleichen $\tau(k)$ zusammen. Dann wird die Summe S in der Form:

$$S = \tau(1) \sum_{n=1}^{D} \left(\frac{x}{n}\right) + \tau(2) \sum_{n=1}^{[D/2]} \left(\frac{x}{2n}\right) + \ldots + \tau([\sqrt{D}]) \cdot \left(\frac{x}{[\sqrt{D}]^2}\right)$$

dargestellt.

Da $\tau(n) = O(n^{\varepsilon})$, (wo ε beliebig klein ist), erhalten wir:

$$|S| < F' \cdot \sqrt{x}\, lg\, x \sqrt{D} \cdot D^{\varepsilon}.$$

Ebenso handeln wir im allgemeinen Falle; (m sei eine beliebige positive ganze Zahl). Dann ist: $\tau_m(n) = \Sigma\Sigma \ldots \Sigma\tau(\delta)$, wo das Σ — Zeichen $(m-2)$ Mal wiederholt wird, und die erste (äusserste) Summe auf sämmtliche Divisoren der Zahl n, die zweite auf sämmtliche Divisoren jeden der letzen,—u. s. w. bis zur letzen Summe,—ausgedehnt werden.

Nach denselben Betrachtungen, wie früher, erhalten wir:

$$|S| < F''. \sqrt{x}\, lgx\, . \sqrt{D}\, . D^{(m-2)\,.\,\varepsilon}.$$

Die Grösse $\left(\frac{x}{n}\right) \tau_m(n)$ lässt sich folgendermassen darstellen:

$$\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \tau_m(n) = \rho_n - \rho_{n-1},$$

wo

$$\rho_n = \Theta_n \,.\, F''. \sqrt{x} \cdot lgx \quad \sqrt{n}\, .\, n^{(m-2)}; \quad |\Theta_n| < 1.$$

und darum gehen wir von der Summe $\sum_{n>Q}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right) \frac{\tau_m(n)}{n}$ zu der folgenden Summe:

$$\sum_{n>Q}^{\infty} \frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{n} = -\frac{\rho Q}{Q+1} + \sum_{n>Q}^{\infty} \rho_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

über. Daraus erhalten wir:

$$|R_0(X)| < \left| X . \sum_{n>Q}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right) \frac{\tau_m(n)}{n} \right| < \frac{C \cdot X^{1/2}\, lg X \quad Q^{(m-2)\varepsilon}}{\sqrt{Q}}.$$

Beschäftigen wir uns jetzt mit der Berechnung der Summe:

$$(5) \qquad \sum_{x>0}^{X} \sum_{n=1}^{Q} \left(\frac{x}{n}\right) \frac{\tau_m(n)}{n}$$

Dem §. 2 der früher genannten Winogradow'sehen Abhandlung gemäss, gilt für die Summe:

$$S = \sum_{x=1}^{X} \left(\frac{x}{n}\right)$$

die Gleichheit: $S = X . \Pi \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) + T$ (wo ρ sämmtliche Primdivisoren den Zahl n durchläuft),—wenn n ein vollständiges Quadrat ist, und die Ungleichheit: $|\, S \,| < T$, wenn n kein vollständiges Quadrat ist (in beiden Fällen $|\, T \,| < \sqrt{n} \,.\, lgn$).

Darum wird die Reihe (5) in der Form:

$$\sum_{x>0}^{X} \sum_{n=1}^{Q} \left(\frac{x}{n}\right) \frac{\tau_m(n)}{n} = X \sum_{n=1}^{\sqrt{Q}} \frac{\Pi\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \cdot \tau_m(n^2)}{n^2} + \theta$$

dargestellt. Hier ist:

$$|\, \theta \,| < \left| \sum_{n=1}^{Q} \frac{\tau_m(n)\; lgn}{\sqrt{n}} \right| < C_1 . \sqrt{Q} \quad lgQ \cdot Q^{(m-1) . \varepsilon}$$

Wenn wir, statt der Summe:

$$\sum_{n=1}^{\sqrt{Q}} \frac{\Pi\left(1 - \frac{1}{p}\right) \tau_m(n^2)}{n^2}$$

die Summe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \tau_m(n^2)}{n^2}$$

betrachten, wird die bei unserer Berechnung erlaubene Abweichung die Grösse

$$\sum_{n>\sqrt{Q}}^{\infty} \frac{\tau_m(n^2)}{n^2} < C_2 \frac{Q^{(m-1)\varepsilon}}{\sqrt{Q}}$$

nicht übertreffen.

Das Restglied unserer asymptotischen Formel wird die Gestalt:

$$| R (X) | < \frac{C \cdot X^{3/2} \cdot lgX \quad Q^{(m-2)\varepsilon}}{\sqrt{Q}} +$$

$$+ C_1 \sqrt{Q} \quad lgQ \cdot Q^{(m-1)\varepsilon} + C_2 \cdot X \quad \frac{Q^{(m-1)\varepsilon}}{\sqrt{Q}}.$$

haben. $Q = X^{3/2}$ gesetzt, erhalten wir:

$$(6) \qquad | R (X) | < K \cdot X^{3/4 + \eta}$$

und schliesslich:

$$(\mathrm{I}) \qquad \Phi (X) = X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi (n) \quad \tau_m (n^2)}{n^3} + \rho \cdot K \cdot X^{3/4 + \eta}$$

wo $\varphi (n)$ die Euler'sche Funktion bedeutet und $| \rho | < 1$ [1]).

3°. Bezeichnen wir mit $h (D)$ die Classenanzahl quadratischer Formen erster Art der Determinante D, so haben wir, den Dirichlet'schen „Vorlesungen über Zahlentheorie" gemäss:

$$(1) \qquad h (D) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{|D|} \quad H (D),$$

wenn $D < -1$,

$$(2) \qquad h (D) = \frac{2 \cdot \sqrt{D}}{lg (T + U\sqrt{D})} \quad H (D),$$

wo T, U die kleinsten positiven Auflösungen der Pell'schen Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ bezeichnen,—wenn $D > O$ und kein vollständiges Quadrat ist.

---

[1]) Wenn $m = 2$, haben wir im Hauptgliede der Formel (I) die Divisorenanzalh der Zahl n^2. Wenn $m = 3$, haben wir:

$$\tau_3 (n^2) = \tau (n^2) \; \tau (n).$$

Die letzte Gleichheit folgt daraus, dass $\tau_3 (\nu) = \Sigma \tau (\delta)$ (wo die Summe auf sämmtliche Divisoren der Zahl ν ausgedehnt wird); der Ausdruck $\Sigma \tau (\delta)$ aber lässt sich mit Hilfe derselben Methode, welche in den Dirichlet'schen „Vorlesungen über Zahlentheorie" für den Beweis der Gleichheit $\Sigma \varphi (\delta) = n$ benutzt wird, in der Form:

$$\Sigma \tau (\delta) = \prod_i (\lambda_i + 1) \left(\frac{\lambda_i}{2} + 1 \right) \quad \text{wo} \quad \nu = \prod_i p_i^{\lambda_i}$$

darstellen.

Für $\nu = n^2$, ist also:

$$\Sigma \tau (\delta) = \tau (n^2) \, . \, \tau (n).$$

(Sie Dirichlet, 1871, I. Abschnitt, §. 14).

Beschäftigen wir uns mit dem Vorfinden des asymptotischen Ausdrucks der Summe:

$$[\Theta(1)]^m + \Theta(2)]^m + \ldots + \Theta(Z)]^m,$$

wo $\Theta(D)$ die früher definirte Funktion bedeutet, — wenn Z unendlich wächst.

Dafür finden wir zuerst den asymptotischen Ausdruck für die Summe:

$$W(Z) = [H(1)]^m + 2^{\frac{m}{2}} [H(2)]^m + \ldots + Z^{\frac{m}{2}} [H(Z)]^m,$$

wenn Z unendlich wächst.

Aus der Formel (I) sehen wir, dass:

$$[H(X)]^m = P + R(X) - R(X-1),\ X = 5,\ 6,\ \ldots Z,$$

wo P die im Hauptgliede der Formel (I) stehende Konstante, $R(X)$ aber das Restglied bedeuten.

$Z > 4$ vorausgesetzt, erhalten wir die folgende Formel:

$$W(Z) = [H(1)]^m + 2^{\frac{m}{2}} [H(2)]^m + 3^{\frac{m}{2}} [H(3)]^m + 4^{\frac{m}{2}} [H(4)]^m +$$
$$+ P\left(5^{\frac{m}{2}} + 6^{\frac{m}{2}} + \ldots + Z^{\frac{m}{2}}\right) - 5R^{\frac{m}{2}}(4) + Z^{\frac{m}{2}} R(Z) -$$
$$-\left(6^{\frac{m}{2}} - 5^{\frac{m}{2}}\right) R(5) - \ldots - \left(Z^{\frac{m}{2}} - (Z-1)^{\frac{m}{2}}\right) R(Z-1),$$

woraus ist es leicht zu finden:

$$\text{(II)} \qquad W(Z) = \frac{2}{m+2} \cdot P\, Z^{\frac{m+2}{2}} + \Theta \cdot M\, Z^{\frac{2m+3}{4} + \eta}.$$

Beim Uebergange zu der Funktion $\Theta(D)$, bemerken wir, dass, ihrer Definition gemäss, verschwindet die Differenz:

$$[\Theta(D)]^m - \frac{2^m}{\pi^m} D^{\frac{m}{2}} [H(D)]^m$$

nur im Falle, wenn D ein vollständiges Quadrat ist, nicht [1]).

---

[1]) Zwischen den negativen Werthen von D gibt es $D = -1$, wo die genannte Differenz auch nicht verschwindet.

Da

$$\left| \frac{2^m}{\pi^m} D^{\frac{m}{2}} [H(D)]^m \right| < G \cdot Z^{\frac{m}{2}+\eta},$$

die Anzahl vollständiger Quardrate in der Reihe 1, 2, 3, ... Z abe nicht grösser, als $\sqrt{Z}$ ist, hat die Differenz zwischen der Grösse $\frac{2^m}{\pi^m} \cdot W(Z)$ und der Summe:

$$[\Theta(1)]^m + [\Theta(2)]^m + \ldots + [\Theta(Z)]^m$$

die Ordnung $Z^{\frac{m+1}{2}+\eta}$.

Daraus erhalten wir:

$$\text{(III)} \quad [\Theta(1)]^m + [\Theta(2)]^m + \ldots + [\Theta(Z)]^m = \frac{2^{m+1}}{\pi^m (m+2)} P Z^{\frac{m+2}{2}} + \lambda \cdot N\, Z^{\frac{2m+3}{4}+\eta}$$

Dieselbe Methode, wie früher gesagt, gilt auch für das Vorfinden asymptotischer Ausdrücke solcher Summen beliebiger Potenzen der Funktionen $\Theta(D)$, wo D die Werthe der Glieder einer arithmetischen Progression von der Form $a+bx$ annimmt [1]), und liefert für die Summe $\sum_{x=1}^{Z} [\Theta(a+bx)]^m$ einen folgenden Ausdruck:

$$\sum_{n=1}^{Z} [\Theta(a+bx)]^m = \frac{2^{m+1} \cdot b^{\frac{m}{2}}}{\pi^m (m+2)} P \cdot Z^{\frac{m+2}{2}} + \Theta \cdot N \cdot Z^{\frac{2m+3}{4}+\eta}\, b^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}+\eta}$$

indem wir, der Einfachheit halber, $a \leqq \frac{1}{2} b$ gesetzt haben. — In der letzen Formel soll b hinreichend kleine Werthe annehmen.

Leningrad, 25. V. 1926,

---

[1]) Denn die Fundamentalungleichheit $\left| \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{x}{n}\right) \right| < \sqrt{x} \,.\, lg\, x$ gilt auch für den Fall einer Progression.

О некоторых асимптотических формулах.

А. Дымман.

В настоящей работе даются асимптотические выражения для сумм вида:

$$\sum_{D=1}^{Z} [\Theta(D)]^m \qquad .$$

и более общего вида:

$$\sum_{x=1}^{Z} [\Theta(a+bx)]^m,$$

где $\Theta(D) = h(D)$, т. е. числу классов квадратичных форм 1-го вида определителя D, когда $D < 0$;

$$\Theta(D) = \frac{1}{\pi} h(D) \cdot lg(T + U\sqrt{D}),$$

когда $D > 0$ и не есть полный квадрат (через T, U обозначены наименьшие положительные решения уравнения Pell'я $x^2 - Dy^2 = 1$), и, наконец, $\Theta(D) = 0$, когда D есть квадрат целого числа.

Представив функцию $h(D)$ в виде ряда Dirichlet и делая некоторые преобразования с функцией $\tau_k(n)$, выражающей число разложений числа n на k сомножителей, мы получаем окончательную формулу:

$$\sum_{x=1}^{Z} [\Theta(a+bx)]^m = \frac{2^{m+1} b^{\frac{m}{2}}}{\pi^m (m+2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n) \cdot \tau_m(n^2)}{n^3} Z^{\frac{m+2}{2}} +$$

$$+ \Theta \cdot N \cdot Z^{\frac{2m+3}{4}+\eta} \cdot b^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}+\eta},$$

годную для достаточно малых значений b.

СПИСОК ДОКЛАДОВ,

прочитанных в Заседаниях Ленинградского Физико-Математического Общества с 1922 по 1927 год.

1922—1923 год.

1. Н. И. Идельсон. Астрономические вопросы связанные с принципом относительности.
2. А. А. Фридман. О кривизне пространства.
3. А. С. Безикович. Новые основания теории интегралов Лебега.
4. Я. В. Успенский. О функциональном уравнении Гекке.
5. Ю. А. Крутков и В. А. Фок. Маятник лорда Рэлея.
6. Я. Д. Тамаркин. Об ассимптотических выражениях для решений линейных дифференциальных уравнений.
7. В. А. Фок. О некоторых интегральных уравнениях Volterra.
8. Я. А. Шохат. О разложении $\int_a^b \frac{\rho(y)\,dy}{x-y}$ в непрерывную дробь.
9. Я. Д. Тамаркин. О приближенном способе для вычисления решений интегральных уравнений 2-го рода.
10. В. И. Смирнов. К теории аутоморфных групп.
11. Б. Н. Делоне. Геометрическая интерпретация алгорифма Вороного.
12. Н. М. Гюнтер. О педагогической деятельности А. А. Маркова (заседание памяти А. А. Маркова).
13. В. А. Стеклов. Очерк жизни и деятельности А. А. Маркова (заседание памяти А. А. Маркова).
14. Я. В. Успенский. Очерк научной деятельности А. А. Маркова (заседание памяти А. А. Маркова).
15. А. С. Безикович. Работы А. А. Маркова по теории вероятностей (заседание памяти А. А. Маркова).
16. В. Д. Львовский. О замкнутых поверхностях постоянной кривизны.

17. Б. М. Коялович. О неопределенных дифференциальных уравнениях (три сообщения).
18. Л. Г. Лойцянский. О применении комплексной переменной к решению общей задачи теории механизмов.
19. Б. И. Извеков. Условия динамической возможности движения вязкой сжимаемой жидкости.
20. Н. М. Гюнтер. Об основной задаче гидродинамики.
21. Г. М. Фихтенгольц. О замкнутой системе ортогональных функций.
22. А. В. Васильев. Об издании собрания сочинений Н. И. Лобачевского.

1924 год.

1. Л. Г. Лойцянский. О приближенном обращении функций.
2. Н. М. Гюнтер. О действиях над функциями не имеющими производных.
3. В. А. Фок. Об одной задаче теории вероятностей.
4. Б. Н. Делоне. Об исследованиях Вороного, касающихся правильного заполнения пространства.
5. А. Ф. Гаврилов. Применение метода характеристик к интегрированию уравнения геодезических линий.
6. Б. Н. Делоне. О пустом шаре.
7. Я. В. Успенский. О коэффициентах формулы Cotes'a.
8. В. Д. Львовский. Об особых точках односторонних поверхностей.
9. Я. Д. Тамаркин. К теории интегральных уравнений.
10. В. А. Сперанский. К теории конечных ортогональных преобразований.
11. А. С. Безикович. Об относительных maxima и minima Ньтонова потенциала.
12. Л. Л. Сильвермен. О некоторых определениях суммируемости.
13. Л. Г. Лойцянский. Об одном графическом способе решения уравнений.
14. Н. М. Гюнтер. Об основной задаче гидродинамики.
15. Б. Н. Делоне. Новое доказательство кубической теоремы Fermat.

1925 год.

1. В. Д. Львовский. О замкнутых трехмерных пространствах класса Volterra и об их обобщениях.
2. Б. Н. Делоне. Об определении квадратичной формы по ее последовательным minima.
3. Я. В. Успенский. Замечание по поводу одного свойства иррациональных чисел.
4. Н. М. Гюнтер. О методах решения гидродинамической задачи.

5. Н. М. Гюнтер. О лемме Пуанкаре.
6. В. А. Тартаковский. О решении в целых числах уравнения $x^{2n} - \Delta y^{2n} = 1$.
7. А. Ф. Гаврилов. Замечание о центробежной силе.
8. М. А. Зарецкий. Расположение конгруентных совокупностей на отрезке.
9. О. К. Житомирский. Геометрия кругов с проективной точки зрения (Неевклидова геометрия кругов).
10. С. А. Гершгорин. Построение функций комплексного переменного помощью шарнирных механизмов.
11. В. И. Смирнов. Работы Brower'a и Weyl'я об основаниях математики.
12. В. И. Смирнов. Новые работы Hilbert'a об основаниях математики.
13. А. А. Геберг. Новое доказательство теоремы Betti.
14. Н. М. Гюнтер. О движении жидкости, заключенной и перемещающемся сосуде.
15. Р. О. Кузьмин. Об алгебраическом уравнении, все корни которого отрицательны.
16. В. И. Смирнов. Работы Ф. Клейна по теории функций (заседание памяти Ф. Клейна).
17. Н. В. Липин. Работы Ф. Клейна по алгебре (заседание памяти Ф. Клейна).
18. С. А. Богомолов. Работы Ф. Клейна по геометрии (заседание памяти Ф. Клейна).
19. В. К. Фредерикс. Работы Ф. Клейна по общему принципу относительности (заседание памяти Ф. Клейна).
20. Б. Б. Пиотровский. Работы Ф. Клейна по реформе преподавания математики (заседание памяти Ф. Клейна).
21. Ю. А. Крутков. Одно замечание об относительном движении точки.
22. В. И. Смирнов. Биография А. А. Фридмана (заседание памяти А. А. Фридмана).
23. И. В. Мещерский. Труды А. А. Фридмана по гидродинамике (заседание памяти А. А. Фридмана).
24. Б. Н. Извеков. Работы А. А. Фридмана по теоретической метеорологии (заседание памяти А. А. Фридмана).
25. В. К. Фредерикс. Работы А. А. Фридмана по общей теории относительности (заседание памяти А. А. Фридмана).

1926 год.

1. В. А. Фок. О конфорном изображении четыреугольника с нулевыми углами на полуплоскость (23/I).
2. Б. Г. Галеркин. Один случай равновесия треугольной пластинки (20/II).
3. Е. Л. Николаи. О колебаниях согнутого стержня (20/II).

4. В. Д. Львовский. О замкнутых трехмерных пространствах класса Volterra и об их обобщениях (сообщение II) (20/II).
5. Б. Н. Делоне. Решение задачи эквивалентности и табуляризация кубических двойничных форм отрицательного определителя (13/III).
6. И. М. Виноградов. О распределении дробных долей значений функции одного переменного (27/III).
7. И. И. Иванов. О двух сравнениях (27/III).
8. Н. Н. Семенов. Об одной двойной сумме (27/III).
9. Б. Н. Делоне. К теории параллелоедров (с демонстрацией моделей 4-хмерных параллелоедров) (10/IV).
10. Г. В. Колосов. Об одном обобщении задачи Saint Vènant'a (8/V).
11. Н. С. Кошляков. О некоторых свойствах полиномов Laguerre'a (8/V).
12. Н. М. Гюнтер. О движении жидкости в замкнутом сосуде (22/V).
13. А. Ф. Гаврилов. К теории сеток Чебышова (22/V).
14. В. И. Гливенко. Об изображении множеств F_σ в параметрической форме (5/VI).
15. С. Н. Бернштейн. О вероятности событий, связанных в цепь (25/IX).
16. А. В. Дымман. О некоторых асимптотических формулах теории чисел (25/IX).
17. М. А. Гельбке. Об асимптотических выражениях сумм дробных частей функций двух переменных (25/IX).
18. В. И. Смирнов. Биография В. А. Стеклова (заседание памяти В. А. Стеклова 9/X).
19. Б. Г. Галеркин. Работы В. А. Стеклова по теории упругости (заседание памяти В. А. Стеклова 9/X).
20. И. В. Мещерский. Работы В. А. Стеклова по гидродинамике (заседание памяти В. А. Стеклова 9/X).
21. Н. М. Гюнтер. Работы В. А. Стеклова по математической физике и теории замкнутости (заседание памяти В. А. Стеклова 9/X).
22. Р. О. Кузьмин. Работы В. А. Стеклова по механическим квадратурам (заседание памяти В. А. Стеклова 9/X).
23. К. В. Меликов. Одно замечание о функции рассеяния (23/X).
24. В. А. Фок. Приведение плоской задачи теории упругости к интегральному уравнению (23/X).
25. Р. О. Кузьмин. О некоторых тригонометрических неравенствах (23/X).
26. В. И. Смирнов. Об одной задаче Ляпунова (13/XI).
27. Н. П. Неронов. О законе притяжения (13/XI).
28. С. А. Янчевский. О теоремах колебания линейных дифференциальных уравнений (27/XI).
29. С. В. Абольник. О простых числах вида $(1+Nx)$ и о некоторых алгебраических теоремах (27/XI).

30. Р. О. Кузьмин. Об одном вопросе неопределенного анализа (11/XII).
31. В. А. Тартаковский. О полиномах, значения которых представляются другими полиномами одной переменной (11/XII).

1927 год.

(весенний семестр).

Оригинальные доклады.

1. С. А. Гершгорин. О числе нулей производной внутри данного контура (29/I).
2. Н. М. Гюнтер. Об одном приложении теории замкнутости (12/II).
3. И. М. Виноградов. Элементарное доказательство одной формулы Гаусса (12/II).
4. В. Д. Львовский. О сечениях трехмерного пространства (5/III).
5. Б. Н. Делоне. Об алгорифме повышения (26/III).
6. Н. М. Гюнтер. Об уравнениях гидродинамики (9/IV).
7. В. А. Сперанский. Некоторые замечания к теории групп (9/IV).
8. В. В. Голубев. Определенне аналитической функции ее значениями на контуре (14/V).
9. Н. И. Мусхелишвили. Единственность решения плоской задачи теории упругости в случае бесконечной плоскости (14/V).
10. В. А. Кречмар. Об одном сравнении (14/V).
11. Г. А. Гринберг. О разложении аналитической функции в ряды по функциям от аргументов, пропорциональных корням данного трансцендентного уравнения (28/V).
12. В. И. Смирнов. О некоторых рациональных преобразованиях уравнения Гаусса (гипергеометрического ряда) (28/V).

Обзорные (четверговые) доклады.

1. Н. В. Липин. О разрешимости алгебраических уравнений в радикалах (исторический очерк) (2 сообщения).
2. Б. Н. Делоне. Теория положительных квадратичных форм (2 сообщения).
3. Н. Н. Худеков и В. Д. Львовский. Современное состояние analisis situs. (2 сообщения).
4. Р. О. Кузьмин. О работах И. М. Виноградова.
5. В. А. Тартаковский. О представлении чисел бинарными формами.

ПРАВЛЕНИЕ

Ленинградского Физико-Математического Общества.

1. Председатель Николай Максимович Гюнтер.
   Ленинград. Б. Гребецкая д. 4, кв. 10, тел. 469-62.
2. Зам. председателя Яков Викторович Успенский.
   Ленинград. Широкая д. 16, кв. 14.
3. Зам. председателя Владимир Иванович Смирнов.
   Ленинград. Гончарная д. 18, кв. 3, тел. 202-94.
4. Член правления Григорий Михайлович Фихтенгольц.
   Ленинград. Ул. Красных Зорь 73/75, тел. 42-04.
5. Казначей Борис Михайлович Делоне.
   Ленинград. В. О. 5 линия д. 16, кв. 9, тел. 92-02.
6. Библиотекарь Константин Венедиктович Меликов.
   Ленинград. В. О. Средний пр. 27, кв. 2.
7. Секретарь Александр Феликсович Гаврилов.
   Ленинград. Аптекарский просп. д. 6, кв. 37, тел. 58-53.

Ревизионная комиссия Ленинградского Физико-Математического Общества.

1. Председатель Надежда Николаевна Гернет.
   Ленинград. Съезжинская д. 24, кв. 26.
2. Член Ревиз. Комиссии Родион Осиевич Кузьмин.
   Ленинград. Лесной, Беклешовская 8-а.
3. Член Рев. Комиссии Онуфрий Константинович Житомирский.
   Ленинград. Бронницкая 19, тел. 202-29.

Почетные члены Ленинградского Физико-Математического Общества.

1. Hilbert, Dawid, Goettingen.
2. Klein, Felix (скончался 22 июня 1925 г.).
3. Поссе, Константин Александрович. Ленинград.
4. Сохоцкий, Юлиан Васильевич. Ленинград.
5. Стеклов, Владимир Андреевич (скончался 30 мая 1926 г.).
6. Хвольсон, Орест Данилович. Ленинград.
7. Крылов, Алексей Николаевич. Ленинград.
8. Иванов, Иван Иванович. Ленинград.
9. Васильев, Александр Васильевич. Москва.

СПИСОК

действительных членов Ленинградского Физико-Математического Общества на 1/IV 1927 года.

1. Адамов, Алексей Алексеевич. Ленинград. Сосновка, Политехнический Институт.
2. Акимов, Михаил Иванович. Ленинград, Крестовский остров, Александровский просп., д. 18, кв. 4.
3. Амосов, Сергей Иванович. Ленинград, Мал. Объездная 18.
4. Бабанский, Евгений Васильевич. Ленинград, 8-я Красноармейская 5.
5. Безикович, Абрам Самойлович. Англия, Ливерпуль.
6. Безикович, Яков Самойлович. Ленинград, Петропавловская 6.
7. Беляевский, Владимир Александрович. Париж.
8. Берг, Борис Андреевич. Ленинград, В. О. Средний пр. 10, кв. 29, тел. 76-79.
9. Бернштейн, Сергей Натанович. Харьков, Инст. Народного Образования.
10. Билибин, Александр Яковлевич. Ленинград Плуталова 20, кв. 2, тел. 523-30.
11. Богомолов, Степан Александрович. Ленинград, Петроградская сторона, Малый пр. д. 71, кв. 4, тел. 636-53.
12. Болдырев, Василий Васильевич. Ленинград, Загородный 28, кв. 37.
13. Булгаков, Николай Александрович. Ленинград, В. О. 2-я линия д. 51, кв. 2.
14. Бурсиан, Виктор Робертович. Ленинград, Троицкая, д. 29, кв. 4.
15. Виноградов, Иван Матвеевич. Ленинград, Сосновка, Политехнический Институт.
16. Воронецкий, Валентин Александрович, Ленинград, Б. Пушкарская, д. 67, кв. 5.
17. Вороновская, Елизавета Владимировна. Ленинград, Филологический, д. 3, кв. 93.
18. Вулих, Захар Захарович. Ленинград, Малая Посадская, д. 26.
19. Гавра, Дмитрий Лазаревич. Ленинград, Сосновка, Политехнический Институт.
20. Гаврилов, Александр Феликсович. Ленинград, Аптекарский просп., д. 6, кв. 37, тел. 58-53.
21. Галеркин, Борис Григорьевич. Ленинград, Кронверская ул., д. 20-б.

22. Гастев, Владимир Алексеевич. Ленинград, Фонтанка, д. 110, кв. 19.
23. Геберг, Алексей Александрович. Ленинград, Набережная Черной речки, д. 47, кв. 1.
24. Гернет, Надежда Николаевна. Ленинград, Съезжинская ул., д. 24, кв. 26.
25. Гершгорин, Семен Аронович. Ленинград, Ул. Кляева д. 9, кв. 9, тел. 489-90.
26. Гливенко, Валерий Иванович. Москва 34, Крапоткинский пер., д. 25, кв. 29.
27. Горшков, Петр Михайлович. Ленинград, просп. Карла Маркса, д. 84.
28. Гринберг, Георгий Абрамович. Ленинград, Ковенский пер., д. 22, кв. 12, тел. 101-25.
29. Гюнтер, Николай Максимович. Ленинград, Б. Гребецкая, д. 4, кв. 10, тел. 469-62.
30. Делоне, Борис Николаевич. Ленинград, В. О., 5 линия, д. 16, кв. 9, тел. 92-02.
31. Делоне, Николай Борисович. Ленинград, В. О., 5 линия, д. 16, кв. 9, тел. 92-02.
32. Дианин, Сергей Александрович. Ленинград, Геслеровский пер., д. 23-а, кв. 25, тел. 502-20.
33. Дымман, Алексей Валерианович. Ленинград, просп. Карла Либкнехта, д. 51/2, кв. 16.
34. Житомирский, Онуфрий Константинович. Ленинград, Броницкая, д. 19, тел. 202-29.
35. Журавский, Андрей Митрофанович. Ленинград, просп. Чернышевского, д. 20, кв. 29, тел. 571-73.
36. Зарецкий, Моисей Аронович. Ленинград, ул. Скороход., д. 9.
37. Идельсон, Наум Ильич. Ленинград, Надеждинская, д. 16, кв. 17.
38. Изаксон, Александр Абрамович. Ленинград, ул. Красных Зорь, д. 59, кв. 17, тел. 630-57.
39. Извеков, Борис Иванович. Ленинград, В. О., 11 линия, д. 44, кв. 14, тел. 575-89.
40. Икорников, Юрий Васильевич. Ленинград, В. О., 2 линия, д. 51.
41. Колосов, Гурий Васильевич. Ленинград, Песочная, д. 5, тел. 141-15.
42. Компаниец, Петр Андреевич. Петровский Остров, Малый просп. д. 2, кв. 1.
43. Комаров, Владимир Николаевич. Ленинград, Ямская ул. д. 1, кв. 3.
44. Кондратьев, Владимир Александрович. Ленинград, ул. Писарева д. 18.
45. Костылева, Татьяна Евтихиевна. Ленинград, В. О. 9 линия, д. 42, кв. 11.

46. Кошляков, Николай Сергеевич. Ленинград, просп. Карла Либкнехта, д. 98, кв. 16, тел. 518-39.

47. Кочин, Николай Евграфович. Ленинград, Главная Геофизическая Обсерватория.

48. Коялович, Борис Михайлович. Ленинград, Социалистическая ул., д. 10, кв. 20, тел. 180-39.

49. Кречмар, Василий Августович. Ленинград, В. О., 9 линия, д. 22.

50. Крутков, Юрий Александрович. Ленинград, Серпуховская, д. 11.

51. Кузьмин, Родион Осиевич, Ленинград, Лесной, Беклешовская, д. 8-а, кв. 2.

52. Кулишер, Александр Рувимович. Ленинград, просп. Карла Маркса, д. 84.

53. Курнаков, Николай Семенович. Ленинград, В. О., 2 линия, д. 2.

54. Кусков, Павел Платонович. Ленинград, В. О., просп. Пролетарской Победы, д. 56.

55. Лебедев, Эраст Эрастович.

56. Левинский, Константин Григорьевич. Ленинград, пр. Карла Либкнехта, д. 76.

57. Липин, Николай Вячеславович. Ленинград, В. О., 21 линия, д. 2, кв. 21.

58. Лойцянский, Лев Герасимович. Ленинград, Бассейная, д. 40, кв. 4, тел. 208-69.

59. Львовский, Вячеслав Дмитриевич. Ленинград, просп. 25 Октября, д. 139, кв. 75, тел. 194-55.

60. Лютин, Антон Васильевич. Ленинград, В. О., 2 линия, д. 39, кв. 12.

61. Меликов, Константин Венедиктович. Ленинград, В. О., Средний просп., д. 27, кв. 2.

62. Мечников, Валериан Валерианович. Ленинград, Нижегородская ул., д. 23-а.

63. Мишерский, Иван Всеволодович. Ленинград, Сосновка, Политехнический Институт.

64. Митропольский, Аристарх Константинович. Ленинград, ул. Блохина, д. 4-а, кв. 60.

65. Митропольский, Евгений Константинович. Ленинград, В. О., 16 линия, д. 49.

66. Михайловская—Прокофьева, Лидия Эдуардовна. Ленинград, Университет, Физический Институт.

67. Мусхелишвили, Николай Иванович. Тифлис, Гановская ул., д. 21.

68. Нарышкина, Екатерина Алексеевна. Ленинград, В. О., 14 линия, д. 35, кв. 17.

69. Неронов, Николай Петрович. Ленинград, Моховая ул., 32, кв. 14.

70. Николаев, Борис Николаевич. Ленинград, канал Грибоедова, д. 80.

71. Николаи, Евгений Леопольдович. Ленинград, Сосновка, Политехнический Институт.

72. Нумеров, Борис Васильевич. Ленинград, Университет.

73. Пиотровский, Борис Брониславович. Ленинград, Петровский пр., д. 2.

74. Пистолькорс, Евгений Юльевич. Варшава.

75. Плескачевский, Никокай Павлович. Москва.

76. Полосухина, Ольга Андреевна. Ленинград, Б. Белозерская, д. 18, кв. 58.

77. Полубаринова, Пелагея Яковлевна. Ленинград, В. О., 12 линия, д. 11, кв. 18.

78. Розе, Николай Владимирович. Ленинград, В. О., 23 линия, д. 3.

79. Ростовцев, Григорий Григорьевич. Ленинград, Сосновка, Политехнический Институт.

80. Саткевич, Александр Александрович. Ленинград, ул. Жуковского, д. 2.

81. Семенов, Николай Николаевич. Ленинград, Лесной, Новая ул., д. 3.

82. Сильверман, Л. Л. С.-А. Соед. Штаты. Dartmouth, Coll., Hannover, N. H.

83. Синцов, Дмитрий Матвеевич. Харьков, Мироносицкая, д. 72.

84. Смирнов, Владимир Иванович. Ленинград, Гончарная ул., д. 18, кв. 3, тел. 202-94.

85. Смирнова, Юлия Александровна. Ленинград, Мойка, д. 112, кв. 18.

86. Смолиевский, Арсений Федорович. Ленинград, Боровая, 19, кв. 11.

87. Сперанский, Вячеслав Алексеевич. Ленинград, Геслеровский пер., д. 27.

88. Тамаркин, Яков Давыдович. С.-А. Соедин. Штаты.

89. Тартаковский, Владимир Абрамович. Ленинград, Лахтинская, д. 14, кв. 24.

90. Тихомиров, Евгений Иванович. Ленинград, В. О. 18 линия, д. 9, тел. 131-67.

91. Тудоровский, Александр Иллар. Ленинград, Тучков пер. 8.

92. Успенский, Яков Викторович. Ленинград, Широкая ул., д. 16, кв. 14.

93. Филиппов, Владимир Михайлович. Ленинград. Сосновка, Политехнический Институт.

94. Фихтенгольц, Григорий Михайлович. Ленинград, ул. Красных Зорь, д. 73/75.

95. Фок Владимир Александрович. Ленинград, В. О. 9 линия, д. 22, кв. 3.

96. Фредерикс, Всеволод Константинович. Ленинград, Почтамская, д. 13, кв. 7.

97. Френкель, Яков Ильич. Ленинград, Сосновка, Политехнический Институт.

98. Худеков, Николай Николаевич. Ленинград, Пушкинская, д. 18.

99. Чебышов-Дмитриев, Алексей Александрович. Ленинград, В. О., Средний пр., д. 33.

100. Шатров, Владимир Дмитриевич. Ленинград, Лесной пр., д. 6, кв. 19, тел. 184-25.

101. Шохат, Яков Александрович, С.-А. Соедин. Штаты.

102. Янчевский, Сергей Аркадьевич. Ленинград, Николвская пл., д. 6, кв. 25, тел. 104-66.

Ленинградский Гублит № 36.425. Тираж 1060 экз. 12 л.

2-я типография Транспечати НКПС имени тов. Лоханкова. Ул. Правды, 15.

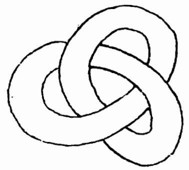
ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ.

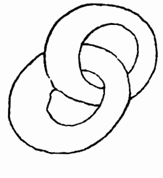
Цена выпуска 2 р. 50 к.

СОСТАВ РЕДАКЦИИ:

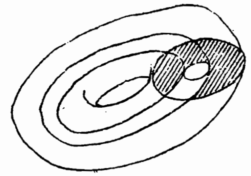
Отв. редактор	академик Яков Викторович **Успенский.** Ленинград. Широкая ул., д. 16, кв. 14.
Зам. отв. редактора	Николай Максимович **Гюнтер.** Ленинград. Б. Гребецкая, д. 4, кв. 10. Тел. 469-62.
Члены редакции:	Борис Николаевич **Делоне.** Ленинград. В. О., 5-я л., д. 16, кв. 9. Тел. 92-02.
	Григорий Михайлович **Фихтенгольц.** Ленинград. Ул. Красных Зорь, Инст. им. Герцена. Тел. 42-04.
Казначей	Константин Венедиктович **Меликов.** Ленинград. В. О., Средний пр., д. 27, кв. 2.
Секретари:	Владимир Иванович **Смирнов.** Ленинград. Гончарная, д. 18, кв. 3. Тел. 202-94.
	Александр Феликсович **Гаврилов.** Ленинград. Аптекарский просп., д. 6, кв. 37. Тел. 58-53.



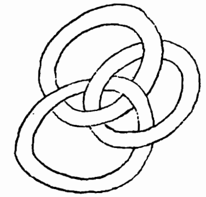
010



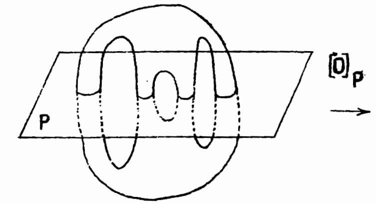
011



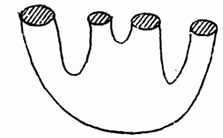
012



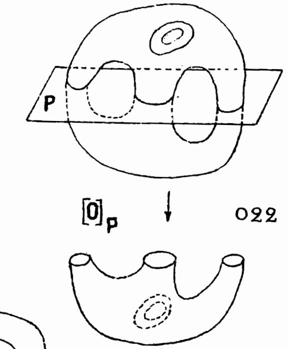
013



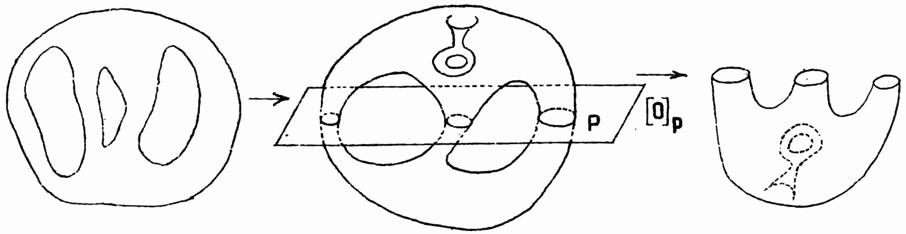
020



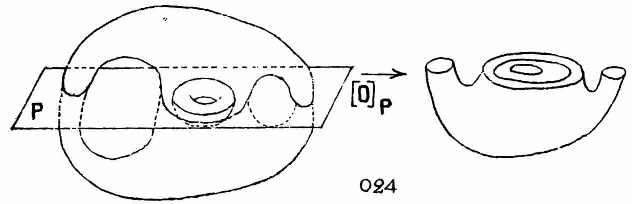
021



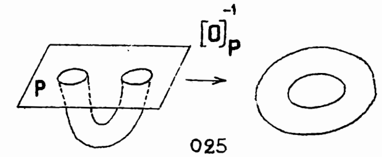
022



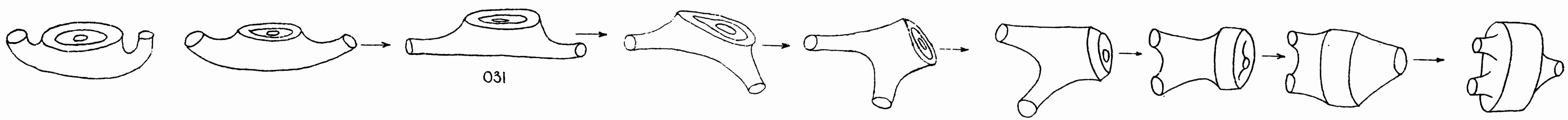
023



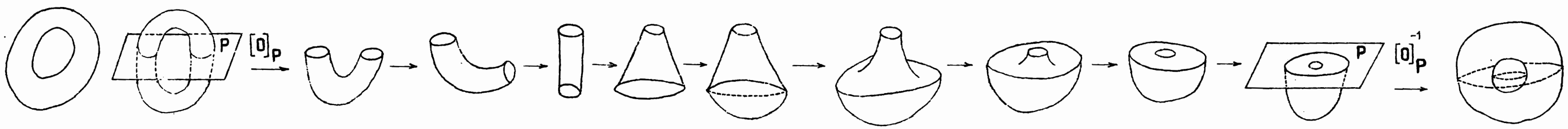
024



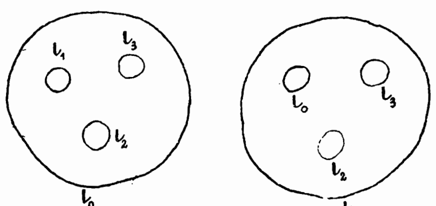
025



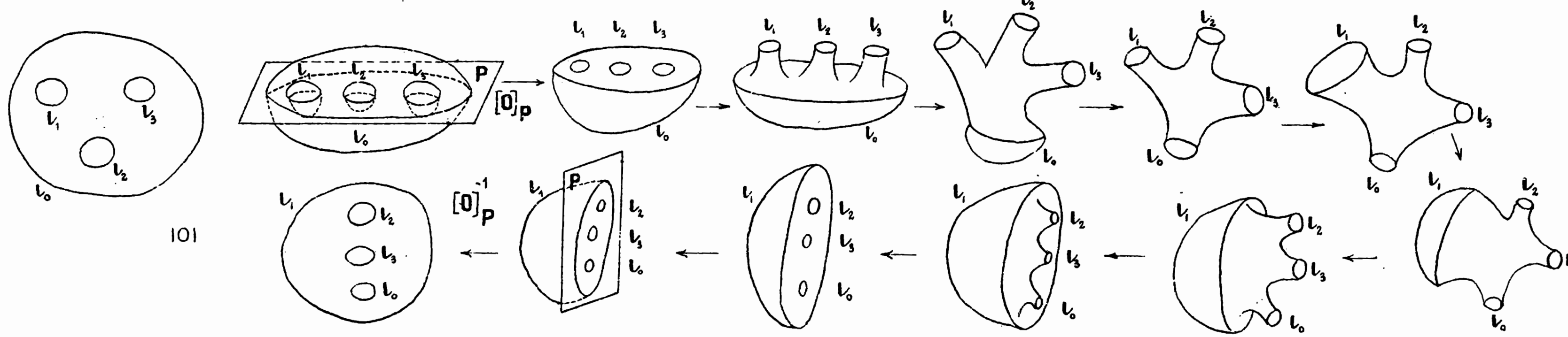
031



032

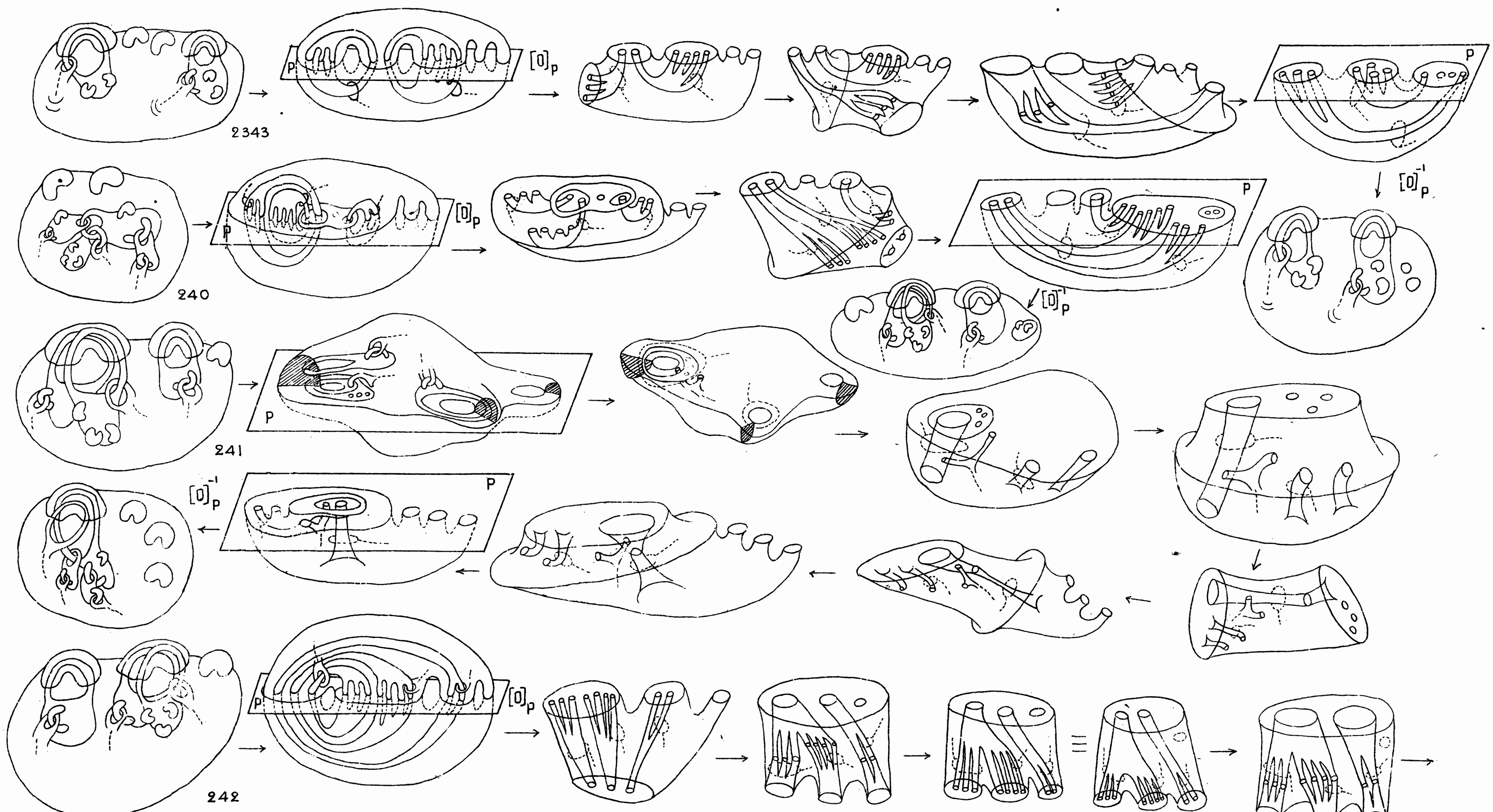


100

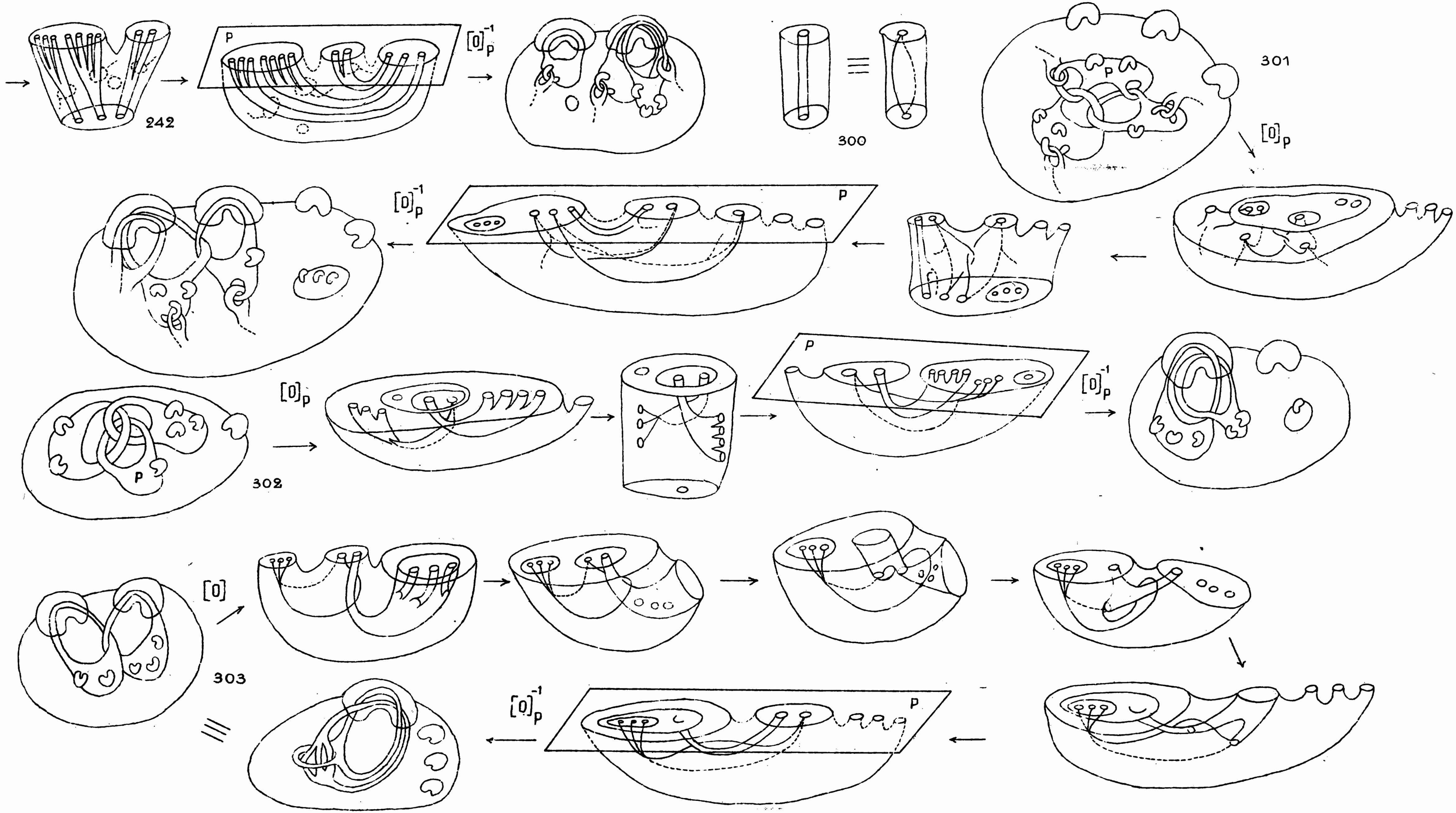


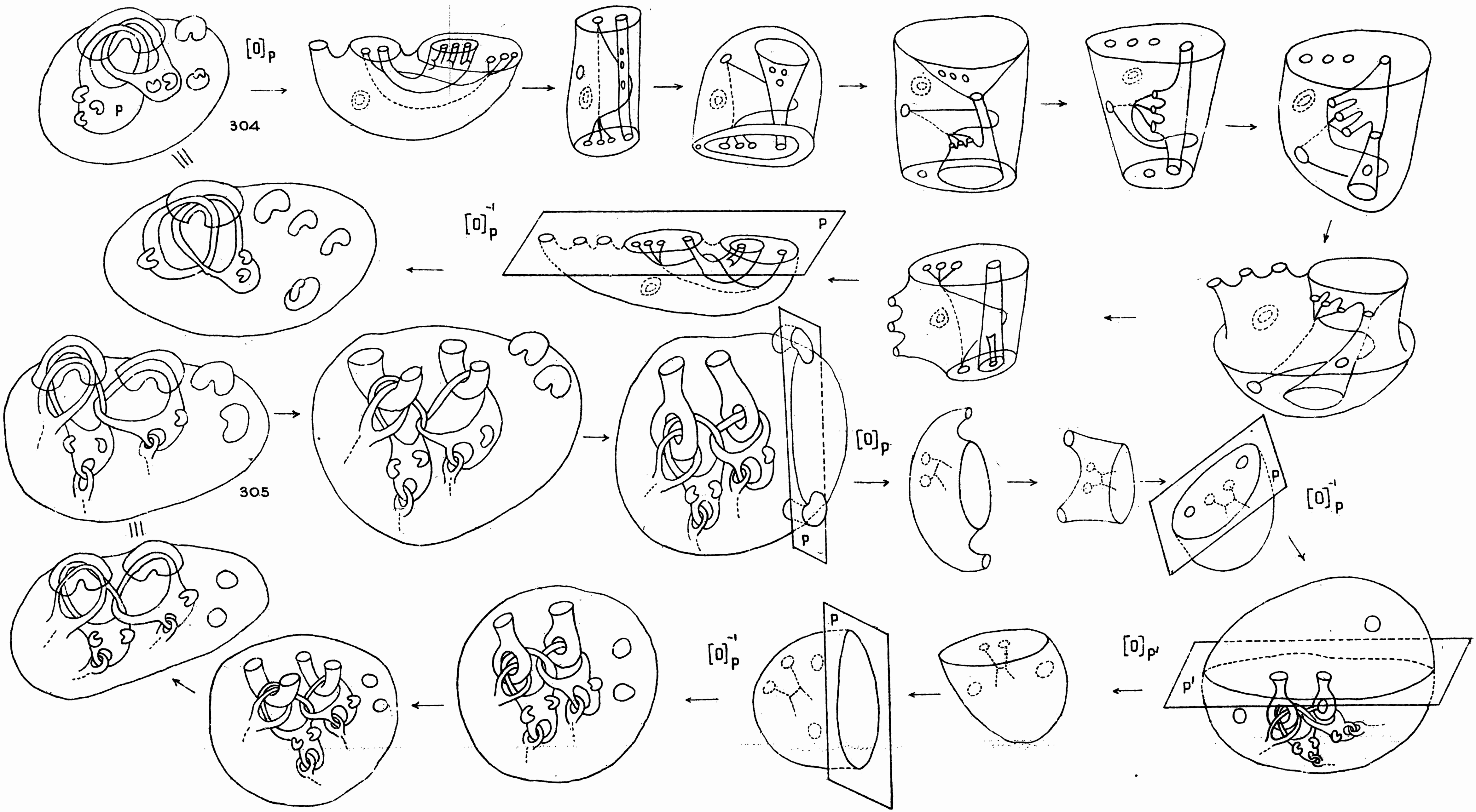
101

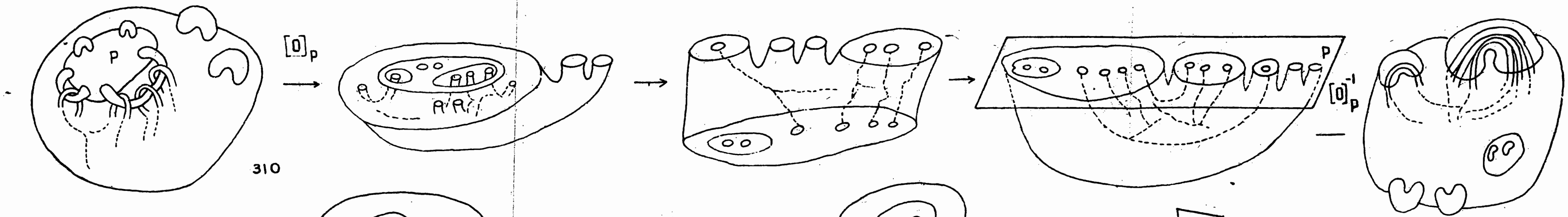

2321
p
$[O]_p$
$[O]_p^{-1}$
2340
p
$[O]_p$
p
2341
p
$[O]_p$
P
$[O]_p^{-1}$
2342
P
$[O]_p$
P
$[O]_p^{-1}$
P
$[O]_p$
$[O]_p^{-1}$
P



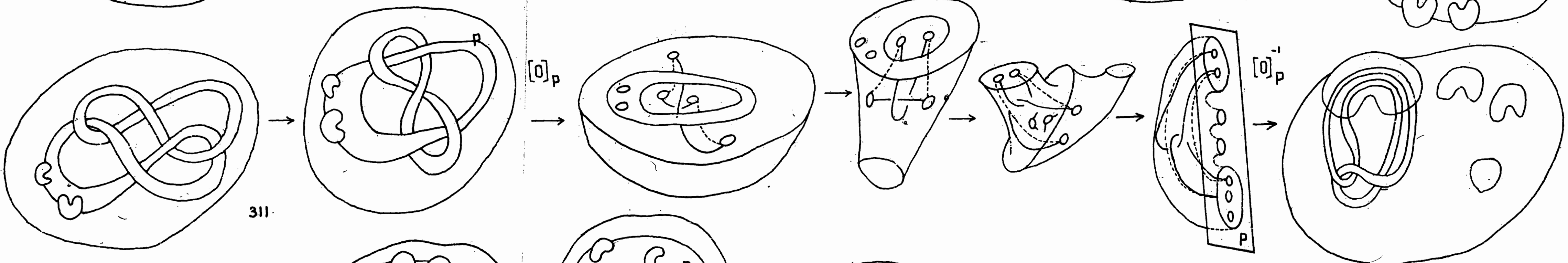
2343
240
241
242
P
$[0]_p$
$[0]_p^{-1}$


242
P
$[0]_p^{-1}$
300
301
P
$[0]_p$
P
$[0]_p^{-1}$
302
$[0]_p$
P
$[0]_p^{-1}$
P
303
[0]
P
$[0]_p^{-1}$

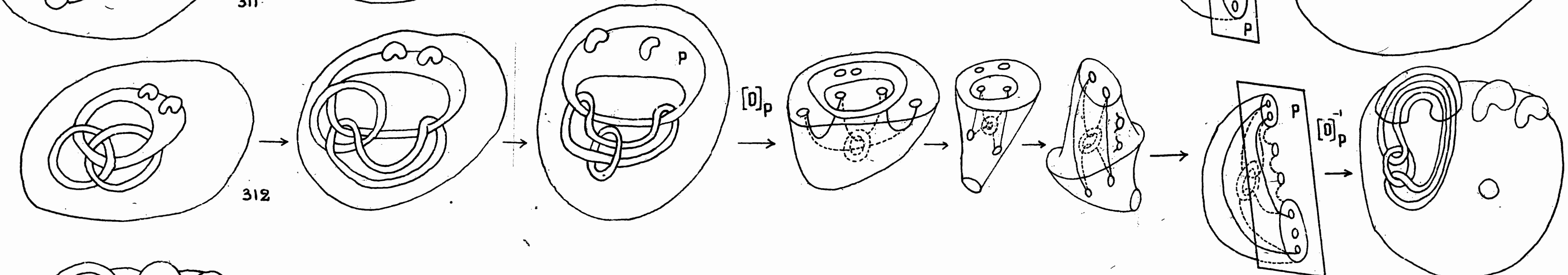

[0]p
304
p
[0]p^-1
P
305
[0]p
P
P
[0]p^-1
[0]p'
p'
[0]p^-1
P



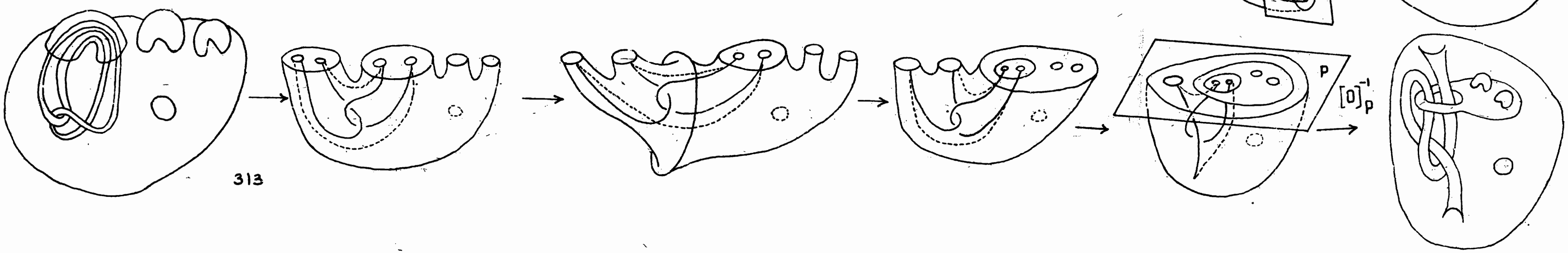
310



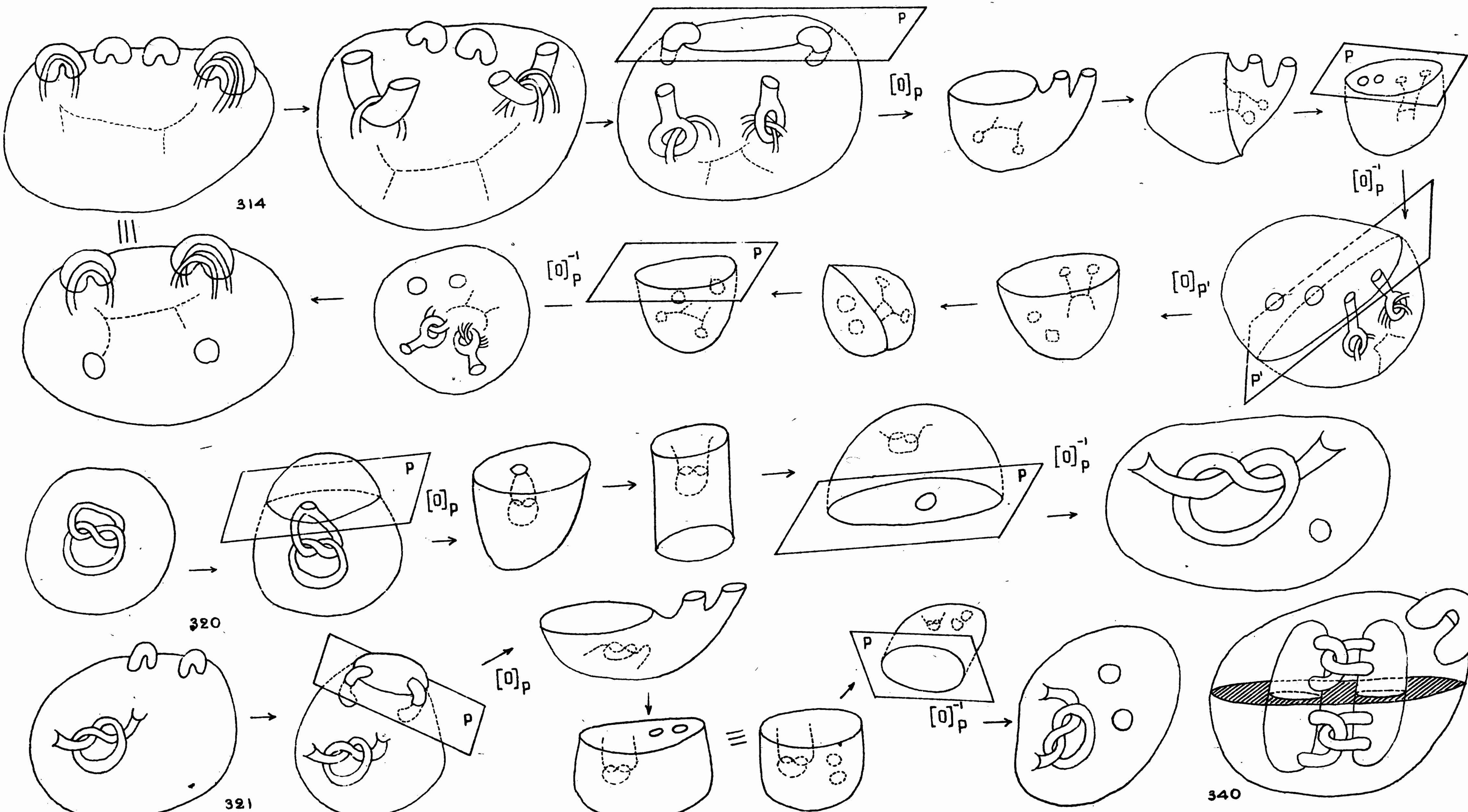
311

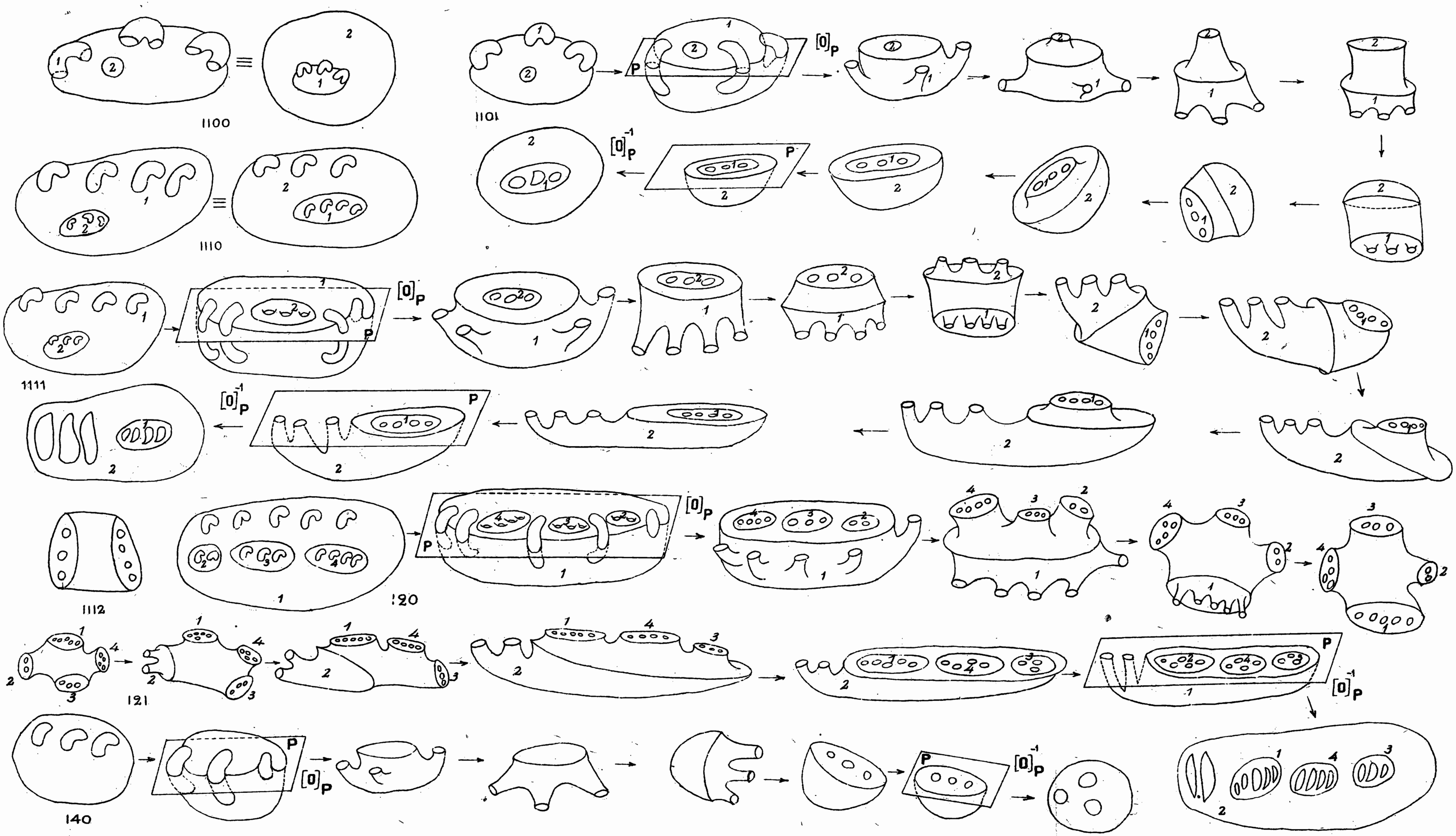


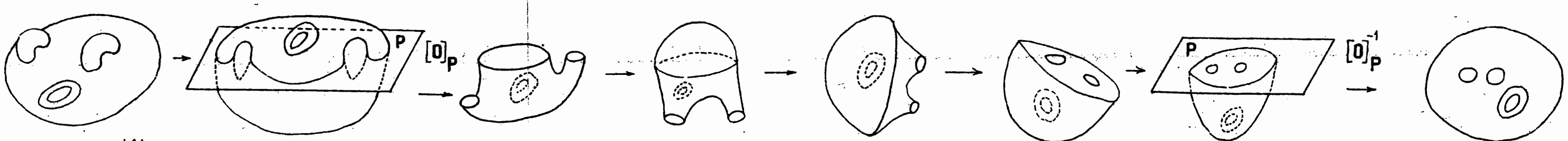
312



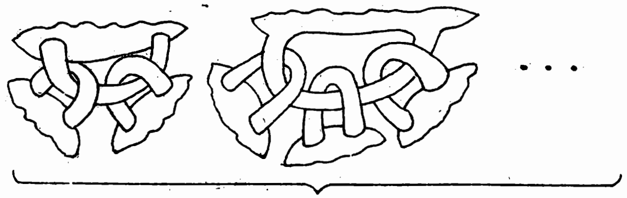
313


314
P
$[0]_p$
P
$[0]_p^{-1}$
$[0]_{p'}$
P'
P
$[0]_p^{-1}$
P
$[0]_p$
P
$[0]_p^{-1}$
320
P
$[0]_p$
P
$[0]_p^{-1}$
321
340

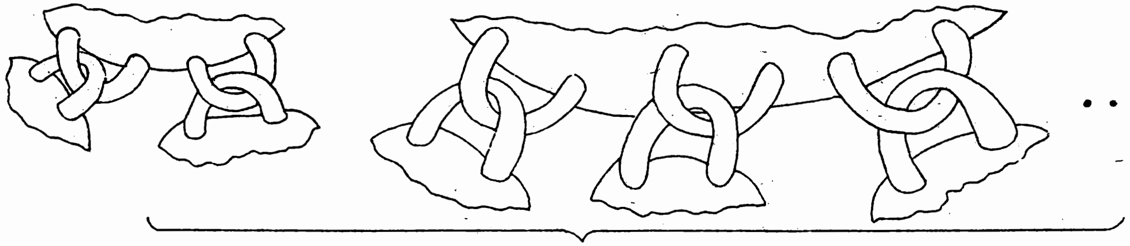

1100
1101
[0]P
P
1110
[0]P^-1
1111
1112
120
121
140



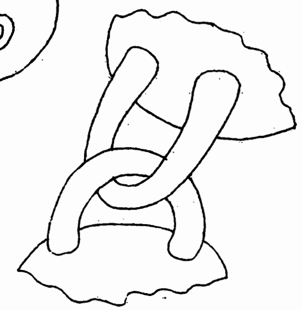
141



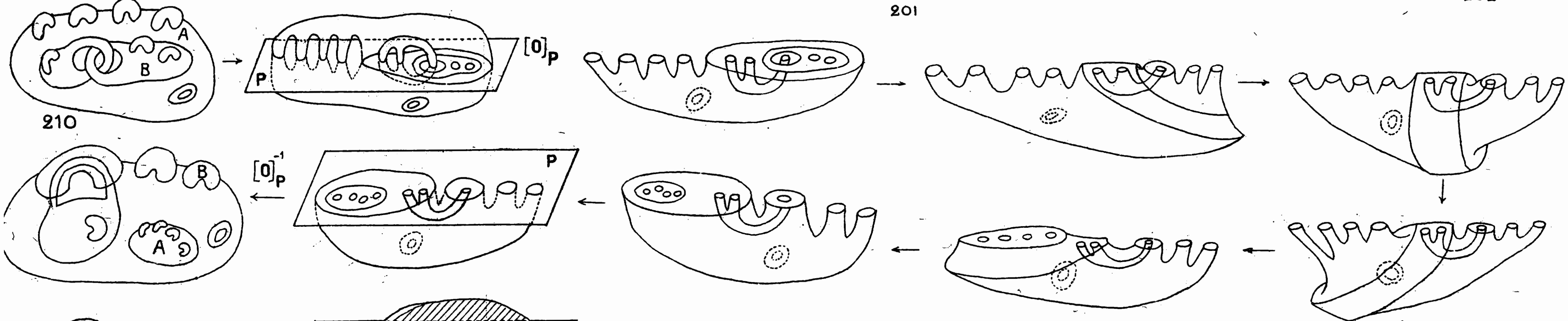
200



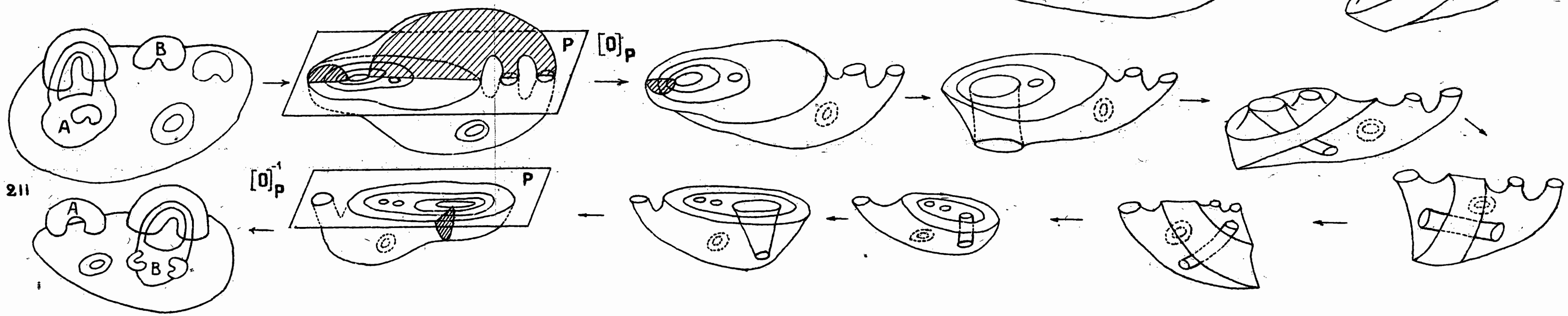
201



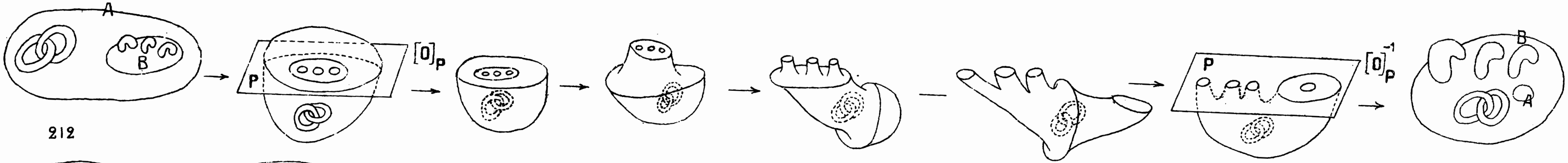
202



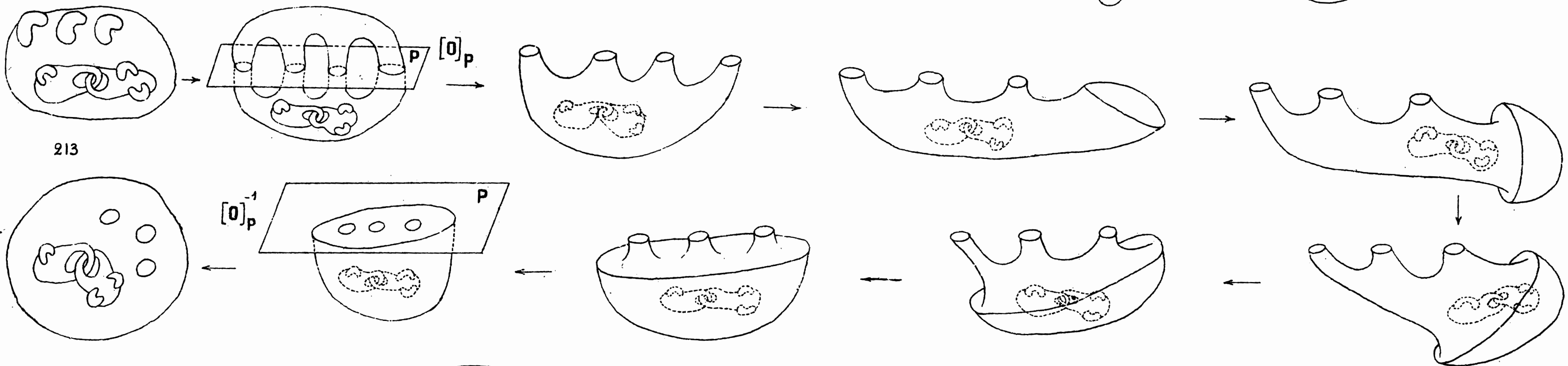
210



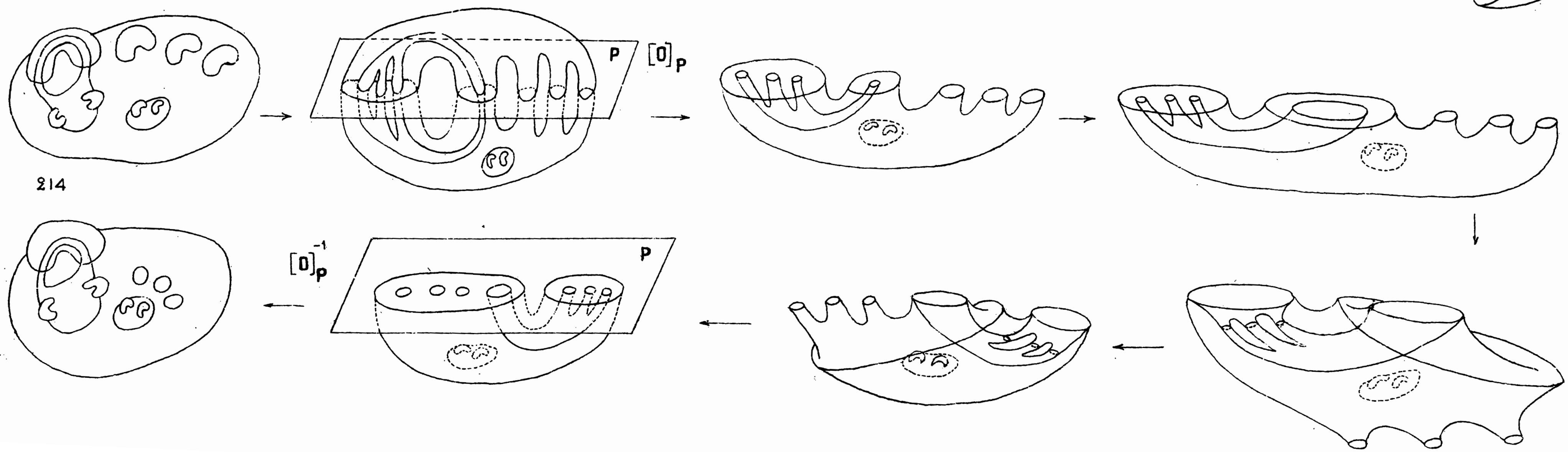
211



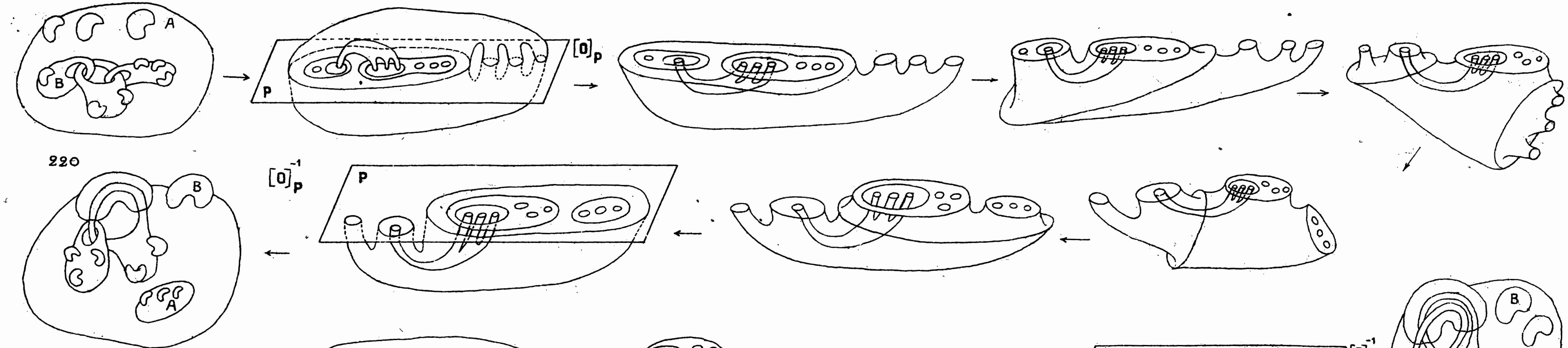
212



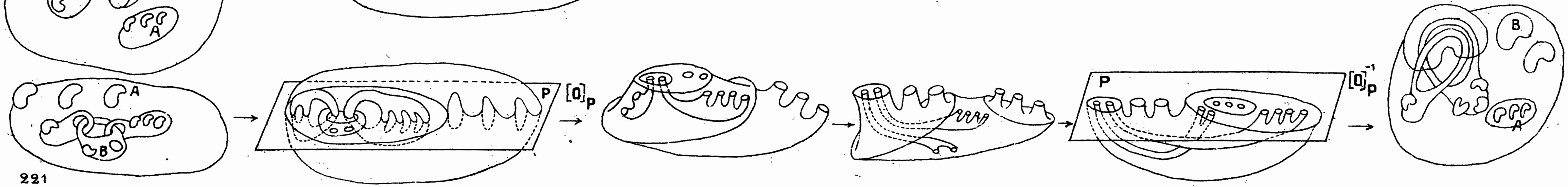
213



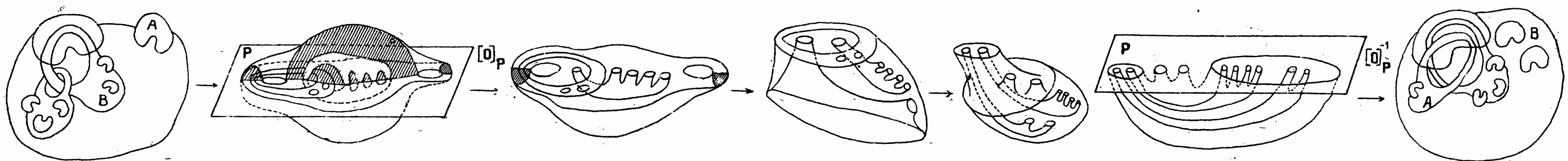
214



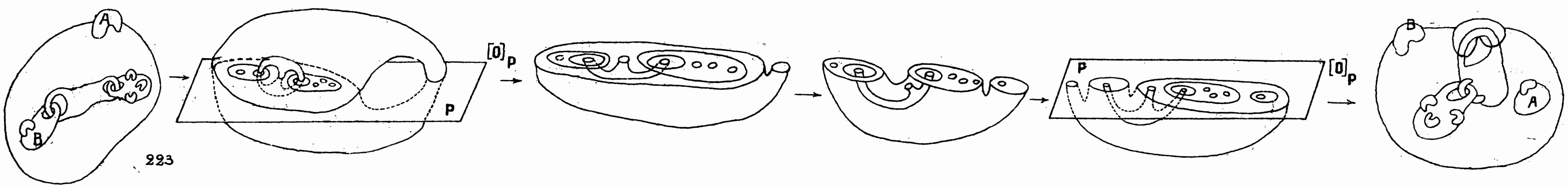
220



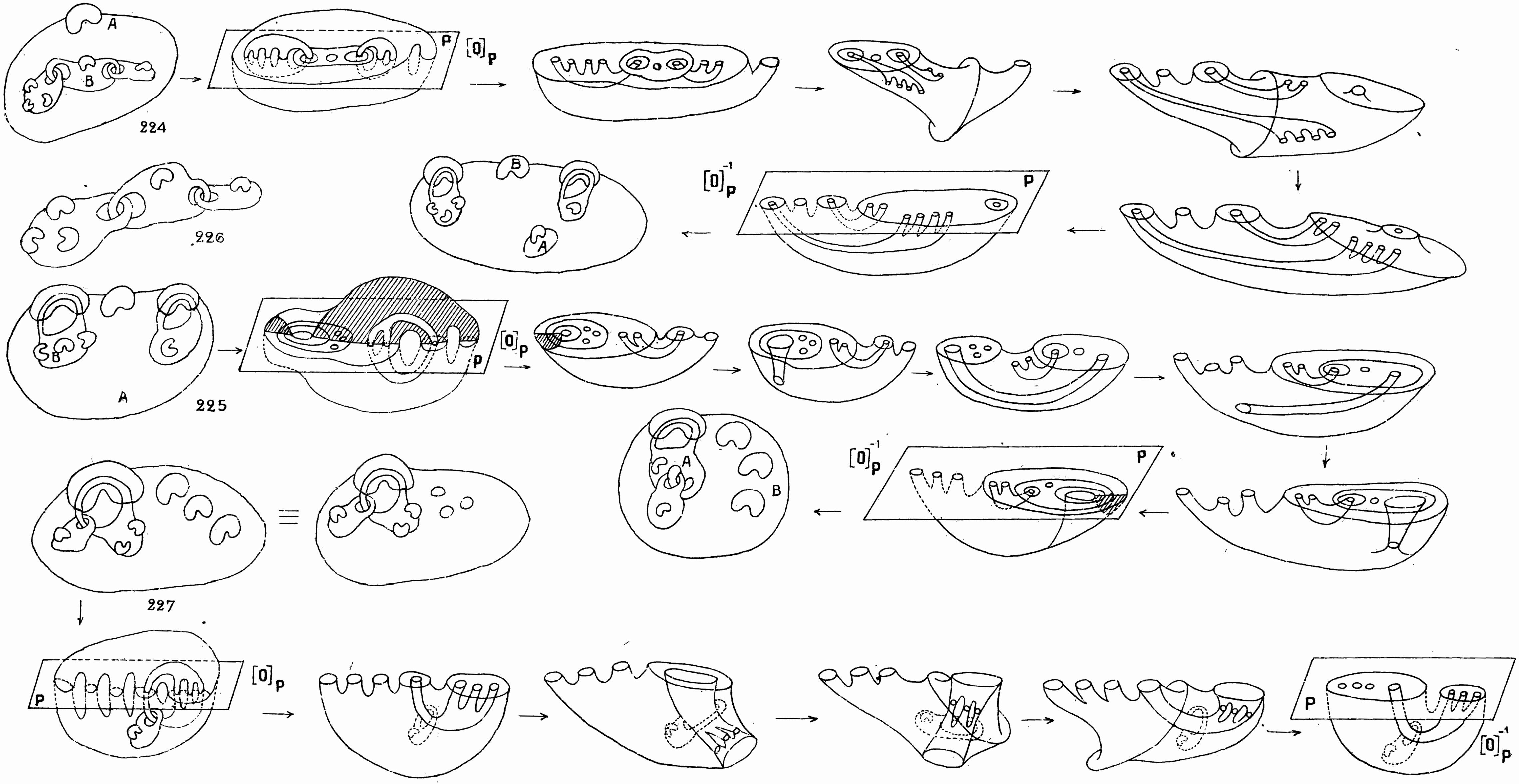
221



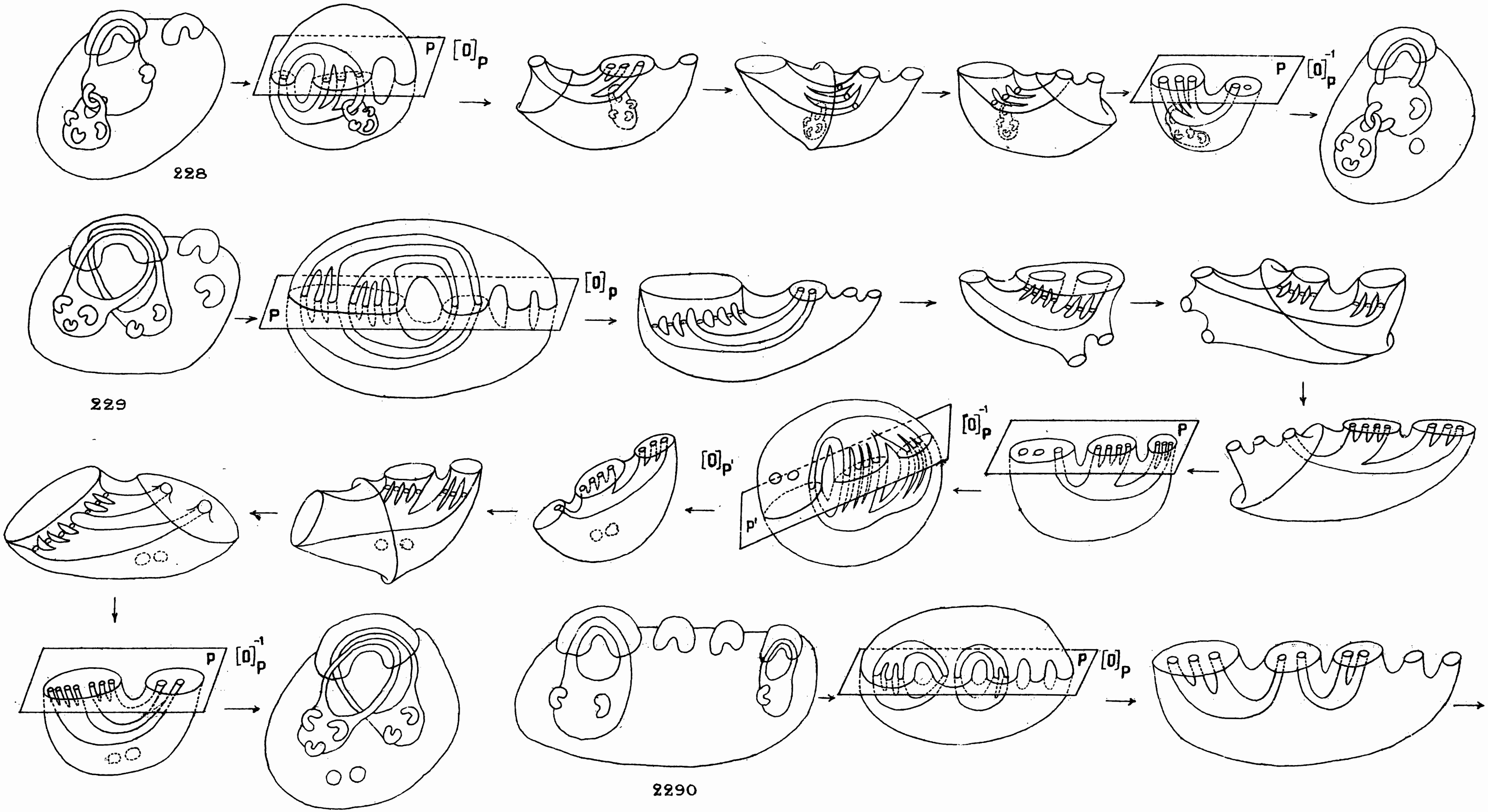
222

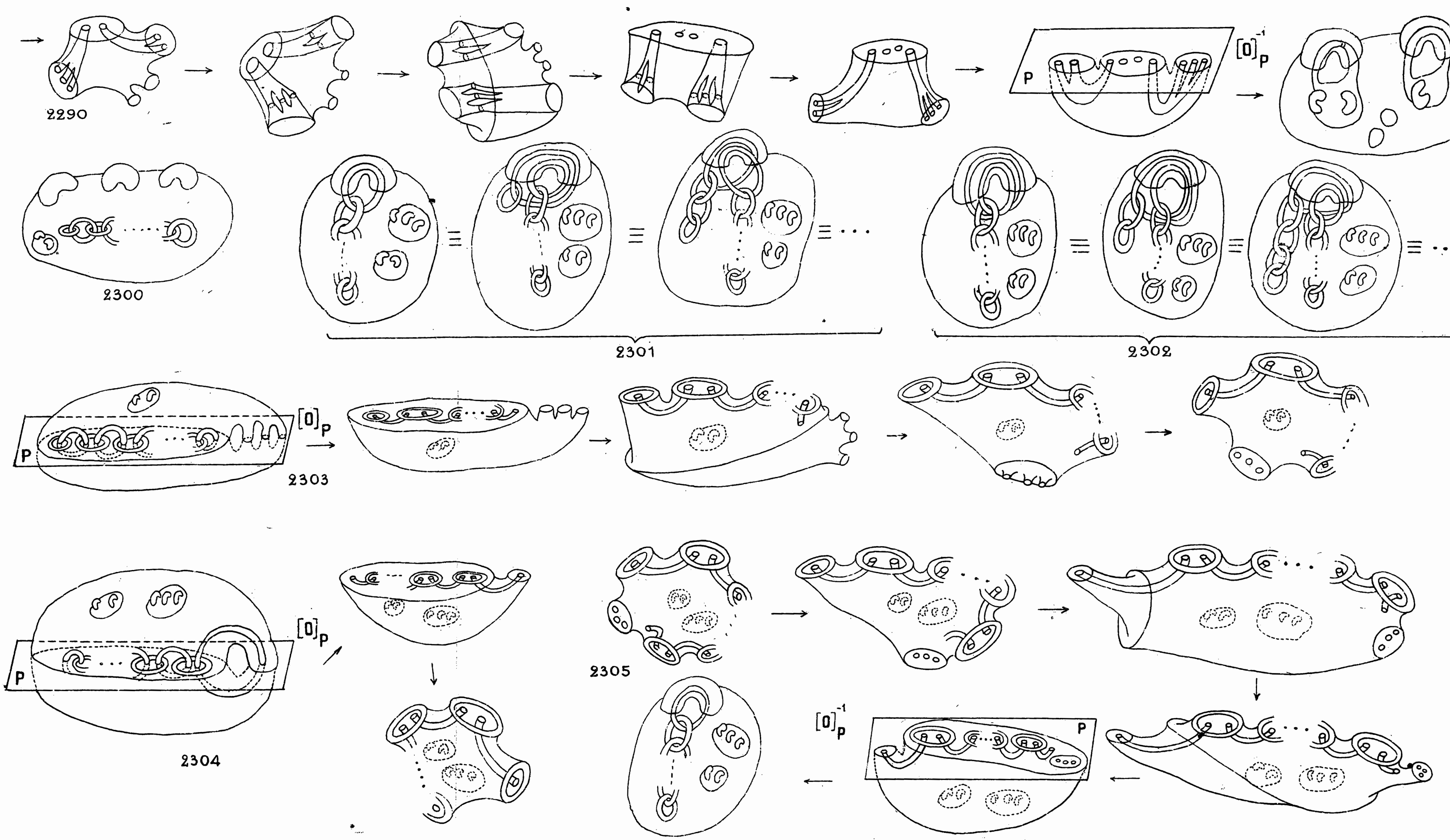


223



A
B
224
P
$[0]_P$
226
B
A
$[0]_P^{-1}$
P
B
A
225
P
$[0]_P$
A
B
$[0]_P^{-1}$
P
227
P
$[0]_P$
P
$[0]_P^{-1}$


P
$[0]_P$
$[0]_P^{-1}$
228
229
P'
$[0]_{P'}$
2290



2290

2300

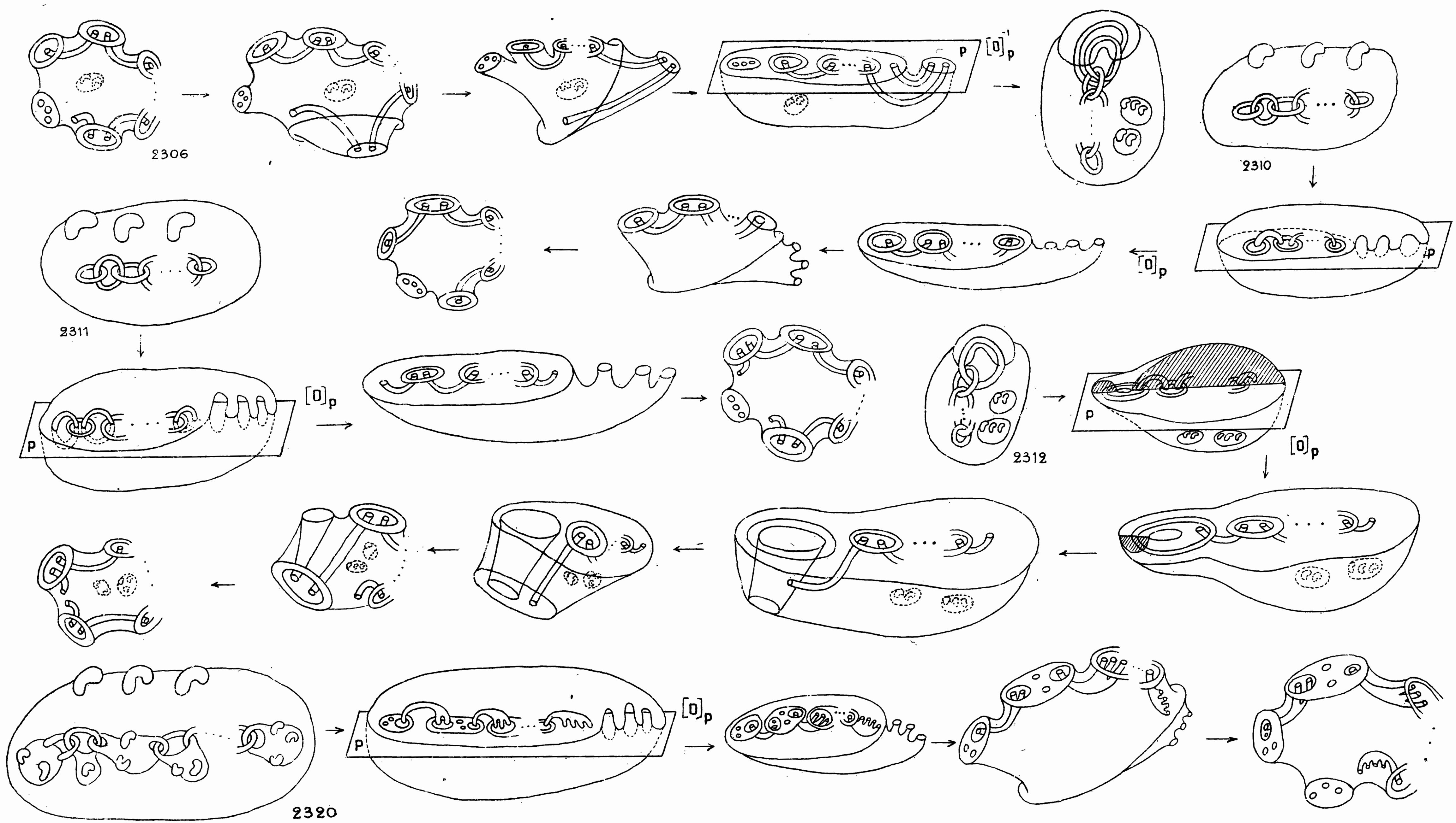
2301

2302

2303

2304

2305


2306
p
$[0]_p^{-1}$
2310
$[0]_p$
p
2311
p
$[0]_p$
2312
p
$[0]_p$
2320
p
$[0]_p$