Journal de la Société Physico-Mathématique
de Léningrade
t. II, fasc. I

ЖУРНАЛ
ЛЕНИНГРАДСКОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОСНОВАН
академиком В. А. СТЕКЛОВЫМ

Том II, вып. I

ИЗДАНИЕ ГЛАВНАУКИ
1928.

Выпуская первый выпуск второго тома журнала, Редакция считает справедливым отметить, что своей опрятной и изящной внешностью журнал обязан второй типографии Транспечати имени Лоханкова, где он уже третий год печатается. Особенно должны быть отмечены заботы и предупредительность Заведывающего Техническим Отделом М. Я. Ганзбурга и сотрудников Л. С. Романского и Е. В. Пулькиной, а также умение и внимательное отношение к делу наборщиков: В. П. Александриной, М. И. Богданова, В. И. Красовского, М. А. Ляпина и Д. Л. Челнокова.

Редакция настоящим приносит Типографии и особенно перечисленным ее сотрудникам выражения своей искренней благодарности.

Ленинградский Областлит № 12347. Тираж 1.060 экз. $13^3/_4$ л.

2-я типография Транспечати НКПС. — Ленинград. Ул. Правды, 15.

В ТЕЧЕНИЕ ПОСЛЕДНЕГО ГОДА ОБЩЕСТВО ПОНЕСЛО РЯД ТЯЖЕЛЫХ ПОТЕРЬ:

Почетный член Общества, профессор и почетный член Академии Наук СССР

Константин Александрович
ПОССЕ

скончался 24/VIII — 1928 г., на 81 году жизни

Почетный член Общества, заслуженный профессор

Юлиан Васильевич
СОХОЦКИЙ

скончался в ночь на 14/XII—1927 г., на 86 году жизни

Член Общества, профессор

Алексей Алексеевич
АДАМОВ

скончался 24/XI — 1927 г., на 49 году жизни

Член Общества, аспирант Л. Г. Унив-та

Моисей Аронович
ЗАРЕЦКИЙ

утонул во время купания в августе 1927 г., на 24 году жизни

По примеру других научных обществ СССР Ленинградское Физико-Математическое Общество решило отметить десятилетие со дня Октябрьской Революции изданием подробной библиографии по отделу математических наук, которая наглядным образом должна свидетельствовать об успехах этой отрасли наук за истекшее первое десятилетие Советской власти.

Список работ по математическим наукам, опубликованных в СССР за период 1917—1927 г.

К. В. Меликов.

Настоящий список обнимает математическую литературу за период 1917—1927 г. В него включены только журнальные статьи и отдельно изданные оригинальные исследования, учебная литература совершенно исключена. Перед составителем стоял вопрос о возможном распределении материала от строгого алфавита авторов до другой крайности строго систематического распределения, подобного, напр., распределению в Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Составитель избрал середину и ограничился самой грубой систематизацией, введя семь отделов, соответствующих первым семи главам схемы названного немецкого справочника. Во избежание недоразумений он считает нужным оговорить одну особенность этой схемы — исчисление конечных разностей и теория вероятностей с математической статистикой, обычно относимые к алгебре, здесь отнесены к анализу.

Литература по чистой математике представлена настолько полно, насколько это было возможно; выбор же литературы по механике в ее частях, пограничных с физикой, астрономией и, главным образом, техникой, может быть носит несколько субъективный характер.

Относительно принятых сокращений можно указать следующее. Цифра в скобках обозначает номер серии; жирным шрифтом обозначается том журнала или его год, если тома определяются годами; подстрочная цифра обозначает номер выпуска данного тома или года, если выпуски имеют самостоятельную пагинацию. Если указано два года, то год, стоящий в скобках, обозначает время фактического выхода в свет данного тома. Для журнальных статей даны первая и последняя страницы, как самой статьи, так и резюме, для отдельно изданных монографий—общее число страниц. Место выхода издания сокращено в 5 случаях: Л. — Ленинград, Пгр. — Петроград, М. — Москва, К. — Киев и Х. — Харьков. Сокращения названий журналов понятны сами собой, но все же в конце (см. стр. XXXVI) приложен полный список этих сокращений. Из сокращений одной буквой надо упомянуть И. — Известия, Ж. — Журнал, А. Н. — Академия Наук. Квадратные скобки [ ], как всегда, указывают, что заключенное в них данное на самом издании не имеется и является поясняющим дополнением составителя.

I. Общий отдел.

Агрономов, Н. А. Сборник статей и заметок по различным вопросам математики и ее преподавания. Владивосток, Трд. Дальневост. Унив. (15) **1** 1927 57+1.

Азлецкий, С. О бесконечном в толковании Кантора. Пермь, Трд. Мат. Семин. Унив. **1** 1927 34—37 фр. рез. 37—37.

Анания из Ширака. Вопросы и решения. Перев. с армянск. И. А. Орбели. Пгр. (Р. А. Н.) 1918 80.

Безикович, А. С. Работы А. А. Маркова по теории вероятностей. Л., И. А. Н. (6) **17** 1923 (1924) 45—52.

Бекеев, А. Опыт проведения курса высшей математики по лабораторно-групповой системе в Государственном Дальневосточном Университете в 1925/26 академическом году. Владивосток, Трд. Дальневост. Унив. (1) **1** 1926 1—15 фр. рез. 15—15.

Бобынин, В. В. Древне-индусская математика и отношение к ней древней Греции. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **22** 1917 (128—157).

Васильев, А. В. Математика. Вып. I. (1725—1826—1863) (Русск. Наука. Отд. второй). Пгр., 1921 1+72.

—— Столетие неэвклидовой геометрии. М., Научн. Раб. **1926**$_{10}$ 20—29.

—— Чистая математика на службе естествознания и техники. М., Вестн. Инж. **1925**$_1$ 35—42.

Вейерштрасс. Речь, произнесенная при вступлении в должность ректора Берлинского Университета 15-го октября 1873 г. М., Усп. физ. наук **1**$_2$ 1918.

Винокуров, В. Фюзионизм в преподавании математиии. Пермь, Трд. Мат. Семин. Унив. **1** 1927 32—34 фр. рез. 34—34.

Гаврилов, А. Ф. Памяти А. А. Фридмана. М.-Л., Усп. физ. наук **6** 1926 73—75.

Глаголев, Н. А. А. К. Власов (1868—1922) (Некролог). М., Мат. Сборн. **32** 1925 273—275 с портр.

Граве, Д. А. Ein neu entdeckter Brief von C. F. Gauss an H. W. Olbers. K., Зап. Ф.-М. відділу **1**$_2$ 1924 91—95.

—— Historische Bemerkungen. K., Зап. Ф.-М. відділу **1**$_4$ 1925 6—7.

Гюнтер, Н. М. О педагогической деятельности А. А. Маркова. Л., И. А. Н. (6) **17** 1923 (1924) 35—44.

—— Памяти А. А. Фридмана Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 5—11 с портр.

Егоров, Д. Ф. Болеслав Корнелиевич Млодзеевский. (Некролог). М., Мат. Сборн. **32** 1925 449—452 с портр.

—— Константин Алексеевич Андреев. (Некролог). М., Мат. Сборн. **31** 1924 337—340 с портр.

Жегалкин, И. И. О технике вычислений предложений в символической логике. М., Мат. Сборн. **34** 1927 9—26 фр. рез. 26—28.

Извеков, Б. И. Работы А. А. Фридмана в области геофизики. М.-Л., Ж. геофиз. и метеор. **3**$_{1-2}$ 1926 5—18.

Калинович, Ф. Словник математичної термінології. Ч. I Термінологія чистої математики, Ч. II Термінологія теоретичної механіки. К.—Х., 1925—1926 VIII+240, VIII+80.

Кирпичев, В. Л. Собрание сочинений, т. I. Пгр., 1917 XL+615 с 3 портр.

Колмогоров, А. Н. О принципе tertium non datur. М., Мат. Сборн. **32** 1925 646—667 фр. рез. 667—667.

Костицын, В. А. Н. И. Лобачевский и его значение в науке. М., Техн.-эконом. Вестн. **6** 1926 327—332 с портр.

—— Памяти В. А. Стеклова. М., Научн. Раб. **1926**$_{5-6}$ 6—11.

—— Профессор Н. Е. Жуковский (1847—1921). М., Мат. Сборн. **31** 1922 5—6 с портр.

Крылов, А. Н. Александр Михайлович Ляпунов. 1857—1919. Некролог. Пгр., И. А. Н. (6) **13** 1919 (1920) 389—394.

Слугинов, С. П. Дмитрий Николаевич Зейлигер, профессор механики Казанского Государственного Университета. (По поводу 40-летия его ученой, педагогической и общественной деятельности). Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **4** 1927 73—78 с портр.

—— К 200-летию Академии Наук. Успехи математических наук. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **3** 1926 61—63.

—— К 45-летнему юбилею научно-педагогической деятельности проф. Г. К. Суслова. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **4** 1927 89—93.

—— К столетнему юбилею новой геометрической теории Н. И. Лобачевского. Пермь, Трд. Мат. Семин. Унив. **1** 1927 11—19 фр. рез. 19—19.

—— П. А. Некрасов. [Некролог]. Пермь, Трд. Мат. Семин. Унив. **1** 1927 37—38.

—— Фювионизм в математике. Пермь, Трд. Мат. Семин. Унив. **1** 1927 26—29 фр. рез. 29—29.

Смирнов, В. И. Памяти академика В. А. Стеклова (1863—1926) Л.-М., Электр. **1926**$_7$ 301—304 с портр.

Смирнов, П. А. Работа Академии Наук в области наук физико-математических. (Речь). Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **3.** 1926 46—59 англ. рез. 60—60.

Сонин, Н. Я. [Автобиография]. Материалы для Биограф. Словаря действ. членов И. А. Н. **2** Пгр. 1917 170—173.

—— Чебышев, Пафнутий Львович. Материалы для Биограф. Словаря действ. членов И. А. Н. **2** Пгр. 1917 218—222.

Станкевич, И. В. Механика в прошлом и настоящем. (Лекция). Пермь, Трд. Мат. Семин. Унив. **1** 1927 5—11 фр. рез. 11—11.

Стеклов, В. А. [Автобиография]. Материалы для Биограф. Словаря действ. членов И. А. Н. **2** Пгр. 1917 173—177.

—— А. А. Фридман. (Некролог). Л., Геофиз. Сборн. **5**$_1$ 1927 7—8 с портр.

—— Александр Михайлович Ляпунов, 1857—1919. Некролог. Пгр. И. А. Н. (6) **13** 1919 (1920) 367—388 с портр.

—— Андрей Андреевич Марков. Л И. А. Н. (6) **16** 1922 (1924) 169—184

—— Математика и ее значение для человечества. Берлин (Гос. Изд.) 1923 137.

—— Теория и практика в исследованиях Чебышева. Пгр. 1921 21 с портр.

Сушкевич, А. К. О методах преподавания математики в средней школе. Воронеж, Трд. Унив. **3** 1926 290—305. нем. рез. XIII—XIII.

Тихомандрицкий, М. А. (1844—1921) Очерк педагогической и научной деятельности. Зап. Мат. Каб. Крымск. Унив. **2** 1921 XX—XXXII англ. рез. XXXII—XXXII.

Успенский Я. В. Владимир Андреевич Стеклов, (Некролог). Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 837—856.

—— Избранные математические развлечения. Пгр., 1924 262 + 2.

—— Очерк истории логарифмов Пгр., 1923 72 + 6 тбл.

—— Очерк научной деятельности А. А. Маркова. Л., И. А. Н. (6) **17** 1923 (1924) 19—34.

—— **Гюнтер, Н., Смирнов, В.** В. А. Стеклов как ученый М., Научн. Раб. **1926** 5—6 12—21.

Фесенков, В. Г. Исаак Ньютон. (1727—1927). М., Р. Астр. Ж. **4** 1927 91—101 с портр.

Фридман, А. А. (Некролог). М., Ж. Геофиз. и метеор. **2** 1925 133—136 с портр.

Фридман, Е. П. Памяти А. А. Фридмана. Л., Геофиз. Сборник **5**$_1$ 1927 9—10.

Хинчин, А. Я. Идеи интуиционизма и борьба за предмет в современной математике. М., Вестн. Комм. Акад. **16** 1926 184—192.

Цинзерлинг, Д. П. Геометрия у древних египтян. Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 541—568.

Curriculum vitae А. А. Фридмана. Л., Геофиз. Сборн. **5**$_1$, 1927 11—13.

In memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. II. Collection des mémoires présentés par les savants de divers pays à la Société Physico-Mathématique de Kazan à l'occasion de la célébration du centenaire de la découverte de la Géométrie Non-Euclidienne par N. I. Lobatcheffsky. ($^2/_{24}$ Février 1826) [Казань]. Главнаука 1927 201+1.

II. Арифметика и алгебра.

Аравийская, Е. О линейных соотношениях между показателями степеней в сравнении $g^{i} + g^{u_i} \equiv 1 \pmod{p}$. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 107 — 114 фр. рез. 114 - 114.

Ахиезер, Н. И. Новий вивід необхідних умов приналежности цілої функції цілого порядку до певного типу. К., Зап. Ф.-М. відділу. $\mathbf{2}_3$ 1927 29—33.

—— Über eine Anwendung der Eulerschen Transformation. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_4$ 1925 32—33.

Бородин, Б. Числовая функция $\Pi_N \varphi(d)$ — произведение числовых делителей целого числа N. Пермь, Трд. Мат. Семин. Унив. **1** 1927 30—32 фр. рез. 32—32.

Брадис, В. Умножение приближенных чисел. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **25** 1925 (1926) 56—84 нем. рез. 84—85.

Васильев, А. В. Целое число. Пгр. 1919 272 с 1 тбл.

Вельмин, В. П. Об изображении чисел квадратичными формами с двумя переменными. Ростов на Дону, И. Донск. Унив. **5** 1925 42—44.

—— см. V.

Венков, Б. А. Об арифметике кватернионов. Л., И. А. Н. (6) **16** 1922 (1924) 205—220, 221—246.

Виноградов, И. М. Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена. Л., И. А. Н. (6) **21** 1927 567—578.

—— К вопросу о распределении дробных долей значений функции одного переменного. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 56—64 фр. рез. 64—65.

—— Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций. Пгр., И. А. Н. (6) **11** 1917 1347—1378.

—— О границе наименьшего невычета n-ой степени. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 47—58.

—— О дробных частях целого многочлена. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 585—600.

—— О распределении дробных долей значений функции двух переменных. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 31—52 фр. рез. 52—52.

—— О распределении индексов Л., Докл. А. Н. (А) **1926** 73—76.

—— О распределении квадратичных вычетов и невычетов. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **2** 1919 1—14 фр. рез. 15—16.

—— О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **16** 1918 10—38.

—— Об одном асимптотическом равенстве теории квадратичных форм. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1918 (1919) 18—28 фр. рез. 28—28.

—— Элементарное доказательство одного общего предложения из аналитической теории чисел. Л., И. политехн. Инст. **29** 1925 2— 12 фр. рез.

—— Элементарное доказательство одной общей теоремы аналитической теории чисел. Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 785—795 фр. рез. 796—796.

—— Demonstration élémentaire d'un théorème de Gauss. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 187—193 русск. рез. 193—193.

—— Sur la distribution des résidus et des nonrésidus des puissances. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1918 (1919) 94—98.

—— Sur un théorème général de Waring. М., Мат. Сборн. **31** 1924 490—507 русск. рез. 507—507.

Гельбке, М. Об асимптотическом выражении суммы дробных частей функции двух переменных. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 281—298 немец. рез. 298—298.

Граве, Д. А. О единицах конечного поля. М., Мат. Сборн. **32** 1925 562—568 фр. рез. 568—568.

—— О разложении простых чисел на идеальные множители. М., Мат. Сборн. **32** 1925 542—560 фр. рез. 561—561.

—— Об основных положениях теории идеальных чисел. М., Мат. Сборн. **32** 1924 135—151 фр. рез. 151—151.

—— Sur les racines cinquièmes de l'unité. К., Зап. Ф. - М. відділу $\mathbf{1}_1$ 1922 (1923) 4—6.

—— Sur un théorème d'Euler. К., Зап. Ф.-М відділу $\mathbf{1}_1$ 1922 (1923) 1—3.

Градштейн, И. С. О нечетных совершенных числах. М., Мат. Сборн. **32** 1925 476—508 англ. рез. 509—510.

Гребенюк, Д. Г. О функциональном базисе области алгебраических чисел, зависящих от корня неприводимого уравнения n-ой степени. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **13** 1926 41—51 фр. рез. 52—52.

—— О целых алгебраических числах, зависящих от неприводимого уравнения 4-й степени. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **11** 1925 19—43 фр. рез. 43—43, **12** 1926 1—14 фр. рез. 14—14.

Григорьев, Е. И. Из области неопределенного анализа 4-й степени. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_1$ 1924 76—80 фр. рез. 80-80.

—— Четыре биквадрата (Задача Эйлера). Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_2$ 1924 (1925) 61—78 фр. рез. 78—78.

—— Resolutio formulae Diophanteae. Казань, Уч. Зап. Унив. **85** 1925 209—217.

Делоне, Б. Н. О числе представлений числа двойничной кубической формой отрицательного определителя. Л., И. А. Н. (6) **16** 1922 (1924) 253—272.

—— Решение задачи эквивалентности и табуляризация кубических двойничных форм отрицательного определителя Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 40—55 нем. рез. 55—55.

—— Решение неопределенного уравнения $X^3q + Y^3 = 1$. Л., И. А. Н. (6) **16** 1922 (1924) 273—280.

—— Ueber den Algorithmus der Erhöhung. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 257—267 русск. рез. 267—267.

Дубнов, Я. С. О симметрично сдвоенных ортогональных матрицах. М., (Ассоц. н.-иссл. инст. при Физмате 1 М. Г. У. Иссл. инст. мат. и мех. при 1 М. Г. У.) 1927 33—54 нем. рез. 54—55.

Дымман, А. Ueber einige asymptotische Formeln Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 313—322 русск. рез. 322—322.

Журавский, А. М. Закон взаимности кубических вычетов. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 204—232 фр. рез. 232—232.

Иванов, И. И. К теории квадратичных и неквадратичных вычетов по данному простому модулю. Пгр., И. политехн. Инст. **28** 1919 (1921) 185—189.

—— О двух сравнениях. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 37—38 нем. рез. 39—39.

—— О сумме, зависящей от простого числа формы 4m + ·. Л., Докл. А. Н. (А) **1927** 43—48.

—— Об одном числовом тожестве. Пгр., И. политехн. Инст. **28** 1919 (1921) 181—183.

Каган, В. Ф. О некоторых системах чисел, к которым приводят Лоренцовы преобразования. М., (Ассоц. н.-иссл. инст. при Физмате 1 М. Г. У. Иссл. инст. мат. и мех. при 1 М. Г. У.) 1926 24, 1927 3—29 нем. рез. 30—31.

Кайнер, М. О многомерных определителях и их приложении к тензорному исчислению. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_4$ 1924 27—30 фр. рез. 30—31.

Ковнер, С. С. Ueber einen Satz von Tschebyscheff-Minkowski. М., Мат. Сборн. **32** 1925 528—540 русск. рез. 541—541.

Кожевников, В. А. Линейка, циркуль и уравнение пятой степени. М., Вестн. Инж. **1926** 212—214.

Костанди, Г. В. Разложение иррациональных чисел в непрерывные дроби высших порядков. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр. $\mathbf{1}_1$ 1923 31—42.

Кошляков, Н. С. Ueber eine Zahlentheoretische Anwendung der Laguerreschen Polynome. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 275—280 русск. рез. 280—280.

Кравчук, М. До теорії перемінних матиць. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_2$ 1924 28—32 фр. рез. 33—33.

—— Довід теореми про суцільність коренів алгебричного рівнання. К., Наук. Зап. **2** 1924 71—71.

—— Новий довід одної теореми Міньковського. К., Наук. Зап. **2** 1924 66—70 фр. рез. 70—70.

—— Про квадратичні форми та лінійні перетворення. К., Трд. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_3$ 1924 1—84 фр. рез. 85—89.

—— Про одно перетворення квадратичних форм. К., Зап. Ф.-М відділу $\mathbf{1}_2$ 1924 87—90 фр. рез. 90—90.

—— Разподіл первісних чисел по підставленнях групп алгебричного рівняння. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_2$ 1927 25—32 нем. рез.

Крылов, Н. М. Sur l'existence des racines d'une équation algébrique. Симферополь, Зап. Мат. Каб. Тавр. Унив. **1** 1919 33—35.

—— и **Кравчук, М.** Деякі уваги про, развязання алгебричних рівнянь, основані лише на понятті незведимости. К., Зап. Ф.—М. відділу. 1_2 1924 62—67 фр. перев. 67—72.

Кузнецов, Г. П. Исключение неприводимых множителей из целой рациональной функции. Новочеркасск, И. Донск. политехн. Инст. **9** 1923—1925 1—15 фр. рез. 16—16.

—— Обобщение теоремы д'Аламбера. Новочеркасск, И. Донск. политехн. Инст. **9** 1923—1925. Прилож. 1-е. 1—38 фр. рез. 39 - 39.

Кузьмин, Р. О. Об одном арифметическом свойстве алгебраических функций. Л. И. политехн. Инст. **30** 1927 107—111 фр. рез. 112—112.

Лойцянский, Л. Г. Об одном графическом методе решения уравнений. Л.] Ж. Р. Ф.—Х. Общ. Часть физ. **56** 1925 270—279 нем. рез. 280—280.

Малеев, В. А. О группах решений сравнения: $x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}-3x^n y^n z^n \equiv 0$ по модулю, представляющему степень простого делителя выражений $x^2 - yz$, $y^2 - xz$, $z^2 - xy$. Казань, И. Ф. - М. Общ. (3) **1** 1926 95—105 фр. рез. 105—106.

Марков, А. Опыт применения функции E (entière) к исследованию некоторых классов вещественных чисел. Воронеж, Труд. Унив. **3** 1926 222—239 нем. рез. XI—XI.

Марчевский, М. Н. Прибор для ускоренного вычисления степенных вычетов по данному нечетному первоначальному модулю. Х., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 25—31 фр. рез. 31—31

Минин, А. П. К вопросу о получении числовых тожеств помощью числовых рядов. М., Мат. Сборн. **32** 1924 220—231 фр. рез. 231—231.

Мордухай-Болтовской, Д. Д. О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса. М., Мат. Сборн. **34.** 1927 55—99 фр. рез. 99—100.

Нарышкина, Е. А. О числах, аналогичных числам Бернулли в одноклассных квадратичных областях отрицательного дискриминанта. Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 145—176, 297—314.

Николаев, А. Н. Извлечение квадратных и кубических корней из чисел с помощью арифмометра. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **11** 1925 65—73 нем. рез. 74—74.

Парфентьев, Н. Н. Sur quelques propriétés nouvelles de la fonction qui definit le nombre des nombres premiers dans un interval donné et sur quelques rélations entre les nombres premiers. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **23** 1923 12—14.

Рождественский, Н. Н. Расширение понятия числа. Х., Наук. Зап. [**2**] 1926 155—160.

Сверженский, С. Б. см. IV.

Семенов, Н. Н Об одной двойной сумме. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 114—118 нем. рез. 118—118.

—— Об одной элементарной задаче из теории числовых последовательностей Л. И. политехн. Инст. **30** 1927 135—140 нем. рез. 141—142.

Сопман, М. Критерий неприводимости целых функций в любом алгебраическом поле. Х., Уч. Зап. н.-иссл. кафедр **1** 1924 81—82.

Сушкевич, А. К. Sur quelques cas des groupes finis sans la loi de l'inversion univoque. Х., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 17—24 русск. рез. 24—24.

—— Ueber die Darstellung der eindeutig nicht umkehrbaren Gruppen mittelst der verallgemeinerten Substitutionen. М., Мат. Сборн. **33** 1926 371—372 русск. рез. 373—373.

Тартаковский, В. А. Auflösung der Gleichung $x^4 - \rho y^4 = 1$. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 301—324.

—— Ueber die Lösung der unbestimmten Gleichung $X^{2n} - \rho Y^{2n} = 1$. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_2 1924 39—43.

Успенский, Я. В. Асимптотические выражения числовых функций, встречающихся в задачах о разбиении чисел на слагаемые. Пгр., И. А. Н. (6) **14** 1920 199—218.

—— Об одной задаче Ивана Бернулли. Л., И. А. Н. (6) **18** 1924 67—84.

—— Note sur le nombre des représentations des nombres par une somme d'un nombre pair de carrés. Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 647—662.

—— Sur les relations entre les nombres des classes des formes quadratiques binaires et positives Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 599—620, 763—784, **20** 1926 25—38, 175—196, 327—348, 547—566, 619—642.

Филиппов, А. Об одном способе решения уравнения 3-й степени и алгорифме Граве. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр 1_1 1923 1—13.

Франк, М. Л. О вычислении корней уравнения с помощью метода постоянного коэффициента. Симферополь, Зап. Мат. Каб. Крымск. Унив. **2** 1921 225—229 англ. рез. 229—229.

Хинчин, А. Я. Великая теорема Ферма. М.-Л. (Гос. Изд.) 1927 76.
—— К вопросу о представлении числа в виде суммы двух простых чисел. Иваново - Вознесенск, И. политехн. Инст. **5** 1922 42—48.
—— Об одном свойстве непрерывных дробей и его арифметических приложениях. Иваново - Вознесенск, И. политехн. Инст. **5** 1922 27—41.
—— Bemerkung zur metrischen Theorie der Kettenbrüche. M., Мат. Сборн. **32** 1925 326 — 329 русск. рез. 329—329.
—— Ueber die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen. M., Мат. Сборн. **32** 1924 203—218 русск. рез. 219—219.

Чеботарев, Н. Г. Доказательство теоремы Kronecker'а - Weber'а относительно абелевых областей. М., Мат. Сборн. **31** 1923 302—308 нем. рез. 309—309.
—— К задаче нахождения алгебраических уравнений с наперед заданной группой. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 26—32 нем. рез. 32—32.
—— Новое обоснование теории идеалов (по Золотареву). Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **25** 1925 (1926) 1—14 фр. рез. 14—14.
—— Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок. Л., И. А. Н. (6) **17** 1923 (1924) 205—230, 231—250.
—— Der Hilbertsche Satz. K., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_2$ 1924 3—7.
—— Eine Verallgemeinerung des Minkowski'schen Satzes mit Anwendung auf die Betrachtung der Körperidealklassen. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_4$ 1924 17—20 укр. рез. 20—20.

Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные. М., Мат. Сборн. **31** 1924 366—372 нем. рез. 372—372.
—— Группы, имеющие только один класс не инвариантных подгрупп. М., Мат. Сборн. **33** 1926 161—172 нем. рез. 172—172.

Шохор-Троцкий, С. Опыт совместного обоснования теории вещественных и комплексных чисел. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **22** 1917 159—221.

Bell, E. T. Sur la notion de l'arithmétique générale. In mem. Lobatschevskii, **2** 1927 135—136.

Kharadzé, A. Note sur les racines rationelles de l'équation du troisième degré. Tiflis, Bull. de l'Univ. **2** 1922—1923 197—199 (По груз.).
—— Sur les suites des nombres rationnels analogues aux nombres de Bernoulli et d'Euler. Tiflis, Bull. de l'Univ. **7** 1927 248—253.

III. Теория множеств.

Агрономов, Н. А. К теории исчислимых комплексов. Ставрополь, Трд. С.-Х. Инст. $\mathbf{6}_1$ 1921 1—5.

Александров, П. Sur l'invariance topologique des ensembles complémentaires aux ensembles (A). M., Мат. Сборн. **31** 1923 310 — 318 русск. рез. 318—318.

Безикович, А. С. Об одном структурном свойстве функций и ансамблей. М., Мат. Сборн. **31** 1922 129—145 фр. рез. 145—146.

Грузинцев, Г. А. О различных мерах точечных ансамблей. Х., Наук. Зап. [2] 1926 11—19.
—— Об одном типе свойств точечных ансамблей. Х., Уч. Зап. н.—иссл. кафедр **1** 1924 50—62.

Зарецкий, М. А. Sur un problème des ensembles congruants. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 182—186 русск. рез 186—186.

Комаревский, В. М. Об одном свойстве линейных continuum'ов с точками ветвления. Ташкент, Труд Турк. Гос. Унив. **6—8** 1922 19—26.

Крыжановский, Д. А. До теорії точкових множин. (Про теорему Больцано - Вайерштраса). Одесса, Ж. н.-досл. катедр $\mathbf{2}_3$ 1926 96—99 нем. рез. 99—99.

Лузин, Н. Н. Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs. M., Мат. Сборн. **33** 1926 237—289 русск. рез. 290—290.

Немыцкий, В. О некоторых классах линейных множеств в связи с абсолютной сходимостью тригонометрических рядов. М., Мат. Сборн. **33** 1926 5—30 фр. рез. 30—32.

Серпинский, В. К. Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и в анализе. М., Мат. Сборн. **31** 1922 94—128 фр. пер. содержания 94—95.
—— Sur une fonction de classe 4. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 197—201.
Тумаркин, Л. А. см. V.
Хинчин, А. Я. Новое доказательство основной теоремы метрической теории множеств. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **6** 1922 39—41.
Черкасов, А. Н. Ueber Unstetigkeitspunkte allgemeiner Kontinuen. М., Мат. Сборн **33** 1926 99—108 русск. рез. 108—108.
Четверухин, Н. Ф. см. V.
Fréchet, M. Sur les ensembles plans de mesure linéaire nulle. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 151—155.
Gokiéli, L. Sur les propriétés fondamentales de l'ensemble de toutes les propositions. Tiflis, Bull Univ. **5** 1925 295—305. (По груз.).
Levi, B. Résolution des points singulièrs d'une variété algébrique à un nombre quelconque de dimensions. (Note préliminaire). In mem. Lobatschevskii **2** 1927 191—196.

IV. Анализ.

Адамов, А. А. О двух формулах, служащих для вычисления $q = e^{-\frac{\pi k_1}{k}}$ по данному модулю в теории эллиптических функций. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 24—28 фр. рез. 29—29.
—— Об интегралах вида $\int_0^\infty \frac{sin^m(ax)}{x^r} dx$. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 3—20 фр. рез. 21—23.
Александров, П. L'intégration au sens de M. Denjoy considérée comme recherche des fonctions primitives. М., Мат. Сборн. **31** 1924 465—476 русск. рез. 476—476.
Андронов, А. и **Леонтович, М.**, см. VI.
Аппельрот, Г. Г. О некоторых преобразованиях основной формы системы алгебраических дифференциальных уравнений. М., Мат. Сборн. **32** 1924 9—19 нем. рез. 20—21.
Ахиезер, Н. И. Про одну властивість методи сумування Weierstrass'a К., Наук. Зап. **2** 1924 72—77.
—— и **Штаерман, Э.** Über die Zusammenhang zwischen der Störmerschen Integrationsmethode und den Bernoullischen Polynomen. К., Зап. Ф.-М. відділу 2_2 1927 16—24.
Баклунд, О. А. Zu Gyldéns Theorie die Differentialgleichung des Radius Vector zu integrieren. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 (1927) 1395—1404.
Бахурин, И. М. Этюды по теории наименьших квадратов. Л., Зап. Горн. Инст. **7** 1926 13—25 нем. рез. 25—25.
Безикович, А. С. Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференцируемости. М., Мат. Сборн. **31** 1924 529—556 нем. рез. 556—556.
—— Об одном уравнении в конечных разностях. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1918 (1919) 29—32.
—— Beweis von drei Sätzen über die Differenzierbarkeit. Л., Докл. А. Н. (А) **1924** 133—136.
—— Diskussion der stetigen Funktionen im Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit. Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 97—122.
—— Nouvelle forme des conditions d'intégrabilité des fonctions. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1918 (1919) 140—145.
—— Quelques théorèmes générales sur l'interversion des intégrations et l'intégration des séries. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1918 (1919) 99—139.
—— Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **2** 1919 105—123 с 1 тбл. черт.
—— Ueber die Beziehung zwischen dem Maximum und Minimum des Moduls einer ganzen Funktion von der Ordnung $<$ 1. Л., И. А. Н. (6) **18** 1924 17—28.
—— Ueber relative Maxima des Newtonschen Potentials. Л., И. А. Н. (6) **18** 1924 29—34.
Бернштейн, С. Н. Математические задачи современной биологии. Х., Наука на Укр. **1** 1922 14—19
—— О законе больших чисел. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **16** 1918 82—87.
—— О применении одного геометрического принципа к теории корреля-

ции. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 137—150.
—— Об одном видоизменении неравенства Чебышева. Х., Уч. Зап. н.-иссл. кафедр **1** 1924 38—48 фр. рез. 48—49.
—— Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **15** 1917 209—274.
—— Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Х., Уч. Зап. н.-иссл. кафедр **1** 1924 83—115.
—— Теория вероятностей. М.-Л. (Гос. Изд.) 1927 VIII+363.
—— Sur les polynomes multiplement monotones. Х., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 1—11.
—— Sur les sommes de quantités dépendantes. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 (1927) 1459—1478.
—— Sur une propriété des fonctions entières de genre 0. Х., Наук. Зап. [2] 1926 1—9.
—— Sur une propriété des polynomes de Tchebycheff. Л., Докл. А. Н. (А) **1927** (1928) 405—407.

Боголюбов, Н. Про наближене розвязування диференціяльних рівняннів. К., Трд. Ф.-М. відділу 5_5 1927 357—365 фр. рез. 408—408.
—— см. VI.

Богомолов, С. А. Общие основания Ньютонова метода первых и последних отношений. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **22** 1917 79—112.

Богомолова, В. Об одном классе функций всюду асимптотически непрерывных. М., Мат. Сборн. **32** 1924 152—169 фр. рез. 169—171.

Боев, Г. П. О конформном преобразовании и формуле Landen'а. Саратов, Уч Зап. Унив. 1_1 1923 3—6.
—— О медленно растущих и ограниченных однозначных аналитических функциях. Саратов, Уч. Зап. Унив. 4_2 1925 1—10.
—— Об автоморфных функциях. Саратов, Уч. Зап. Унив. 5_2 1926 191—208.
—— Рост целых функций внутри углов, свободных от нулей. Саратов, Уч. Зап. Унив. 3_2 1925 28—32.

Брайцев, И. Р. Об одном представлении аналитической функции. Н.-Новгород, И. Унив. **1** 1926 81—122.

Бржечка, В. Ф. О некоторых неравенствах получаемых из интерполяционной формулы Лагранжа. Х., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 12—16.

Булгаков, Н. А. Application des formules de M. Ch. Neumann exprimant les charges de deux sphères conductrices isolées au cas limite, ou elles sont en contact. Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 743—752.
—— Sur le problème de l'induction magnétique de deux sphères. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 (1927) 1445—1458.

Буницкий, Е. Л. Дифференцирование функции от функции. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **22** 1917 123—127.

Васильев, А. С. Вероятнейший результат измерения одной и той же величины несколькими инструментами. Л., И. А. Н. (6) **21** 1927 373—384, 543—566.

Вениаминов, В. Геометрическое доказательство основных теорем теории производных чисел. М., Мат. Сборн. **32** 1924 101—110 фр. рез. 110—110.
—— Sur un problème de la représentation conforme de M. Carathéodory. М., Мат. Сборн. **31** 1922 91—93 русск. рез. 93—93.

Вихляев, П. А. Очерки теоретической статистики. М., 1924 150+II.

Вишневский, Л. А. Абсолютный экстремум одного полиномиального функционала. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 37—40 англ. рез. 40—40.
—— О некоторых вопросах теории функций бесконечного числа переменных. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. (Крымск) Унив. **1** 1919 65—126, **2** 1921 155—204 фр. рез. 204—208.
—— Sur l'application d'analyse de fonction à une infinité des variables aux problèmes d'extremum. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 215—218.
—— Ueber eine Minimalaufgabe von Tchebyschew. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 253—258.
—— Ueber einen Satz betreffend der gleichmässigen Konvergenz Bilinearformen der unendlichvielen unabhängigen Variabeln. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 230—233.

Гаврилов, А. Ф. Об алгебраических интегралах уравнения геодезических линий. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 53—73 фр. рез. 74—74.

Гагаев, Б. М. К теории симметрического ядра. Казань, И. Ф.-М. Общ (3) **1** 1926 149—152 фр. рез. 152—152.

— Некоторые свойства суммируемых рядов Sturm'a-Liouville'я. Казань, Уч. Зап. Унив. **87** 1927 67—82.
— О порядке приближения выражения функций с помощью собственных функций. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 41—48 фр. рез. 48—48.
— О росте интегралов дифференциальных уравнений 1-го порядка. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **25** 1925 (1926) 15—19 фр. рез. 19—19.
— О системе дифференциальных уравнений 2-го порядка, интегралы которой линейные дробные функции произвольных постоянных. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_1$ 1924 57—60 фр. рез. 60—60.
— Обобщение формулы Фурье, Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 33—40 фр. рез. 40—40.
— Решение системы линейных интегральных уравнений. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_2$ 1924 (1925) 19—30 фр. рез. 30—30.
— Рост интегралов дифференциальных уравнений. Казань, Уч. Зап. Унив. **85** 1925 229—236.

Гельвих, П. А. Об одном неправильном выводе в теории вероятностей. Л., И. В.-Техн. А. [**1**] 1927 128—140.

Гершгорин, С. А К описанию прибора для интегрирования дифференциального уравнения Лапласа. М.-Л., Ж. Прикл. Физ. **3** 1926 271—274.
— О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 75—94 нем. рез. 95—95.
— О числе нулей функции и ее производной. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 248—256 нем. рез. 256—256.
— Об одном способе численного интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. М.-Л., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **57** 1925 171—178 нем. рез. 178—178.
— Прибор для интегрирования дифференциального уравнения Лапласа. М.-Л., Ж. Прикл. Физ. **2** 1925 161—167.
— см. VI.

Годыцкий-Цвирко, А. М. Графическое интегрирование дифференциального уравнения 2-го порядка. Л., Сборн. Инст. пут. сообщ. **96** 1927 291—296.

Голубев, В. В. Исследования по теории особых точек однозначных функций. Саратов, Уч. Зап. Унив. $\mathbf{2}_2$ 1924 49—95, $\mathbf{3}_2$ 1925 1—23, $\mathbf{4}_2$ 1925 11—29 $\mathbf{5}_2$ 1926 209—227.
— О соответствии границ при конформном изображении. М., Мат. Сборн. **32** 1924 55—57 фр. рез. 57—57.
— Об одном обобщении теоремы Picard'a. М., Мат. Сборн. **31** 1924 557—566 фр. рез. 567—567.

Гончаров, В. Л. О целых функциях и прямых Жюлиа. Х., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 94—107.

Граве, Д. А. О решении линейных дифференциальных уравнений при помощи определенных интегралов. Л., И. А. Н. (6) **21** 1927 (1928) 943—952.
— Об уравнениях Эйлера и их приложениях в теории упругостей. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 917—942.
— Про Лапласове рівняння. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_3$ 1927 1—4 фр. рез.
— Généralisation d'un théorème d'Abel. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_1$ 1922 (1923) 7—8.

Градштейн, М. О монотонных функциях от многих независимых переменных, определенных в неограниченных сверху классах, состоящих из изолированных точек. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_4$ 1924 21—22 фр. рез. 22—22.

Гребенюк, Д. Г. Об одном классе полиномов наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **15** 1927 43—65 фр. рез. 66—66.

Гюнтер, Н. М. Замечание о теореме Morera. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 156—162.
— О действиях над функциями, неимеющими производных. Л., И. А. Н. (6) **18** 1924 (1925) 353—372, **19** 1925 75—96.
— О лемме Пуанкаре. М., Мат. Сборн. **33** 1926 291—330 фр. рез. 331—331.
— О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных. М., Мат. Сборн. **32** 1925 367—443 фр. рез. 444—447.
— Об аналитических решениях уравнения
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
М., Мат. Сборн. **32** 1924 26—42 фр. рез 42—42.
— Об одной вспомогательной теореме. Л., И. А. Н. (6) **17** 1923 (1924) 53—64.
— Об одном приложении теории замкнутости. Л., И. А. Н. (6) **21** 1927 63—94, 255—272.

—— Об уравнении

$$\frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z} = f.$$

М., Мат. Сборн. **32** 1925 280—304 фр. рез. 304—304.

—— Sur quelques applications des fonctions de W. Stekloff Л., Докл. А. Н. (А) **1924** 35—38.

—— см. VI.

Диманштейн, Я. К вопросу о математическом выражении движения населения. Х., Наук. Зап. [2] 1926 115—131.

Динник, А. Н. Таблицы функций Бесселя 0-го и 1-го порядка от комплексного аргумента. М.-Пгр., Ж. Р. Ф.-Х. Общ. Физ. отд. **55** 1923 121—127.

Дюков, И. Формула Cowell'я и Krommelin'a. Казань, Уч. Зап. Унив. **85** 1925 37—37.

Ермаков, В. П. Полином наименее уклоняющийся от нуля в данных пределах. М., Мат. Сборн. **30** 1918 511—520.

Жуковский, Н. Е. Заметка по вариационному исчислению. М., 1923 20.

Иванов, И. И. О вычислении определенного интеграла

$$\int_0^1 \frac{lg\,(1-x^n)\,dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$$

Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 97—103.

—— О неравенстве двух интегралов. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 104—106.

Кованько, А. С. Об одном обобщении формул Lagrange'a и Cauchy о конечном приращении. М., Мат. Сборн. **33** 1926 203—205 фр. рез. 205—205.

—— Sur la généralisation de la méthode de Cauchy de la construction des séries conjuguées. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_2$ 1927 13—15.

Когбетлянц, Э. Арифмологическая аналогия тригонометрическим рядам Фурье. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **16** 1918 55—72.

—— О сходимости разложений по полиномам Чебышева и Якоби. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **15** 1917 275—277.

Костицын, В. А. Интегральные уравнения с интегрально-логарифмическим ядром и сродные интегральные уравнения. М., Мат. Сборн. **31** 1923 188—205 фр. рез. 205—207.

—— Об одном особом нелинейном интегральном уравнении. М., Мат. Сборн. **31** 1924 373—375 фр. рез. 376—376.

—— Sur les solutions singulières des équations intégrales du cycle fermé. М., Мат. Сборн. **33** 1926 41—42 русск. рез. 42—42.

—— Sur quelques équations intégrales de la physique moléculaire. М., (Ассоц. н.-иссл. инст. при Физмате I М. Г. У. Н.-иссл. инст. мат. и мех. при I М. Г. У.) 1926 40.

—— Sur une classe des équations intégrales. М., Мат. Сборн. **31** 1922—1923 78—85, 185—187 русск. рез. 85—85, 187—187.

Кошляков, Н. С. О некоторых приложениях теории интегральных вычетов. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. (Крымск.) Унив. **1** 1919 189—254, **2** 1921 1—79.

—— Sur une équation intégrale singulière. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 35—37.

—— Sur une intégrale définie analogue à celle de Poisson. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 259—260.

—— см. II.

Коялович, Б. М. О неопределенных дифференциальных уравнениях. (Доклад 1-й). Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 66—76 фр. рез. 76—76.

—— О неопределенных дифференциальных уравнениях. (Главные решения). Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **4** 1927 103—112.

Кравчук, М. Замітка з приводу теореми Cauchy. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_2$ 1927 33—36 фр. рез.

—— Замітка про Taylor'ову формулу. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_2$ 1927 1—4 фр. рез.

—— Інтерполяція та деяки питання з теорії функцій дійсного змінного. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_3$ 1925 70—81 фр. рез. 81—82.

—— Note sur une méthode de N. Kryloff pour l'intégration des équations differentielles de la physique mathématique. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_2$ 1927 5—8 укр. рез.

Крейн, М. Г. Le système derivé et les contours dérivés. Одесса, Ж. н.-досл. катедр $\mathbf{2}_3$ 1926 61—73 укр. рез. 61—61.

Крыжановский, Д. А. Геометрическая интерпретация зависимости между двумя функциями от двух переменных. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **22** 1927 113—122.

—— Графічний спосіб розвязування системы нерівнань першого ступеня. Одесса. Зап. інст. нар. осв. **1** 1927 226—232.

—— Sur les différentes définitions de limite. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_{8-9}$ 1924 1—10 укр. рез.

Крылов, А. Н. О приближенном численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Пгр., Ежег. союза морск. инж. **2** 1917 3—43 англ. рез. 260—260, М., Арх. физ. н. **1—2** 1918 68—119+4 тбл.

—— Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Берлин, 1923 92+3 тбл.

—— Sur l'intégration des équations différentielles ordinaires par des approximations numériques. M., Arch. Sc. Phys. **1** 1919 65—115+3 тбл.

Крылов, Н. М. О некоторых новых методах приближенного решения задач математической физики. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 180—185.

—— О некоторых формулах обобщенной интерполяции. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 48—58.

—— О сходимости некоторых формул механических квадратур для многократных интегралов. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 248—250.

—— Про визначення похибки при застосуванні способу Ritz'а для наближеної інтеграції диференціяльних рівнянь. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_3$ 1925 23—25 фр. рез 25—25.

—— Про визначення ступня похибки при застосуванні способу W. Ritz'а до систем диференціяльних рівнянь математичної физики. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_4$ 1925 3—4 фр. рез.

—— Про наближене розвязування лінійних інтегральних рівнань К., Трд. Ф.-М. відділу $\mathbf{3}_6$ 1926 185—207 фр. рез. 208—208.

—— Про один спосіб наближеної інтеграції диференціяльних рівнянь оснований на принципі minimum'у. К., Зап. Ф.-М. відділу. $\mathbf{1}_3$ 1925 65—69 фр. рез. 69—69.

—— Про поширення методу найменших квадратів на наближену інтеграцію системи диференціяльних рівнянь. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_3$ 1925 59—62 фр. рез. 62—63.

—— Про ріжні узагальнення Ritz'ового методу та методу найменших квадратів для наближеного інтегрування рівнань математичної фізики. К., Трд. Ф.-М. відділу $\mathbf{3}_2$ 1926 3—28 фр. рез. 28—28, errata 58—58.

—— About some important formulas in the theory of trigonometric series. X., Сообщ. Мат. Общ. (2) **16** 1918 73.

—— Application of the method of infinite determinants to some boundary problems in one dimension. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 147—154.

—— Qualche osservazioni sopra il metodo del sig. Pearson. Симферополь. Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 234—236.

—— Rémarque à propos d'un raisonement de Stieltjes dans la théorie des séries trigonométriques. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 222—224.

—— Sur différentes généralisations du lemme fondamental du calcul de variations. K., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_1$ 1922 (1923) 8—11, М., Мат. Сборн. **31** 1923 220—223 русск. рез. 223—223.

—— Sur diverses généralisations de la methode de W. Ritz et sur quelques questions, qui s'y rattachent. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. (Крымск.) Унив. **1** 1919 127—188, **2** 1921 81—146.

—— Sur la determination de diverses formes du reste de la formule d'interpolation de Lagrange. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 22—23.

—— Sur la méthode d'intégration de W. Ritz, (Reclamation de priorité). K., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_1$ 1922 (1923) 12—13.

—— Sur le reste de la série de Taylor. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 24—26.

—— Sur quelques formules d'approximation, fondées sur la généralisation des quadratures „dites mécaniques". Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 59—64.

—— Sur quelques généralisations de la série de Taylor. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 27—29.

—— Sur un complément à la méthode du calcul des fonctions impiicités par des approximations successives. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 20—21.

—— Sur une formule de G. Darboux. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_1 1922 (1923) 11—12.
—— Upon some theorems in the theory of equations. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 251—252.
—— и **Боголюбов, Н.** Про Rayleigh'ів принцип в теорії диференціяльних рівнань математичної фізики та про одну Ейлерову методу в Варіяційнім Численi. К., Трд. Ф.-М. відділу 3_3 1926 37—56 англ. рез. 57—57.
—— и **Вишневский, Л. А.** Sur l'extremum absolu dans le problème simple du calcul de variations. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 209—214.
—— и **Тамаркин, Я. Д.** Sur l'application de la théorie des quadratures mécaniques généralisées à l'evalution par approximations successives de la solution de l'équation intégrale. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_1 1922 (1923) 16—21.
—— —— Sur la methode de W. Ritz pour la solution approchée des problèmes de la physique mathématique. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 69—88.
—— и **Штаерман, Э.** Notes sur quelques formules d'interpolation. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_1 1922 (1923) 21—23.
—— —— Sur quelques formules d'interpolation convergentes pour toute fonction continue. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_1 1922 (1923) 13—16.

Кудрявцев, В. А. О распределении корней производной целой трансцендентной функции. М., Мат. Сборн. **32** 1925 364—365 нем. рез. 366—366.
—— О распределении корней производной целой трансцендентной функции, корни которой лежат внутри некоторого угла. М., Мат. Сборн. **32** 1924 172—176 нем. рез. 176—176.

Кузнецов, В. Н. Заметка, относящаяся к интегрированию уравнений механики. М., Мат. Сборн. **32** 1925 622—624 фр. рез. 624—624.

Кузьмин, Р. О. О корнях Бесселевых функций. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **2** 1919 17—21.
—— О некоторых тригонометрических неравенствах. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 233—239 фр. рез. 239—239.

Куренский, М. К. Про интегривання диференційних рівнянь з частковими похідними при багатьох залежних змінних. К., Трд. Ф.-М відділу 5_3 1927 35—166 фр. рез. 167—169.
—— см. VI.

Лаппо-Данилевский, И. А. Théorie algorithmique des corps de Riemann. М., Мат. Сборн. **34** 1927 113—146 русск. рез. 147—148.

Лахтин, Л. К. Кривые распределения и построение для них интерполяционных формул по способам Пирсона и Брунса. М. 1922 151.

Линник, В. Гармонійний анализатор. К., Наук. Зап. **2** 1924 89—92 + 1 тбл.

Лойцянский, Л. Г. Quelques remarques sur la méthode de l'inversion approchée des fonctions au point de vue du calcul éffectif. М., Мат. Сборн. **32** 1924 22—24 русск. рез. 24—25.
—— Sur l'inversion approchée des fonctions. М., Мат. Сборн. **31** 1924 585—595 русск. рез. 595—595.

Лузин, Н. Н. О существовании аналитических функций равномерно-бесконечных вблизи купюры. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **5** 1922 20—26.
—— Remarque sur un lemme de Poincaré. М., Мат. Сборн. **33** 1926 357—362 русск. рез. 362—362.
—— Sur la représentation conforme. Иваново-Вознесенск (Пгр.), И. политехн. Инст. **2** 1919 77—80.

Лурье, А. И. О формуле Шварца-Кристоффеля Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 113—120 нем. рез. 121—121.

Люстерник, Л. А. Bemerkung zur Lösung des Dirichletschen Problems. М., Мат. Сборн. **33** 1926 363—364 русск. рез. 365—365.
—— Ueber einige Anwendungen der direkten Methoden in Variationsrechnung. М., Мат. Сборн. **33** 1926 173—200 русск. рез. 200—201.

Ляпунов, А. М. Sur une formule d'Analyse. Пгр., И. А. Н. (6) **11** 1917 87—118.
—— см. VI.

Макавеев, В. М. К анализу эмпирических кривых. Новый способ выделения периодических членов при свободном члене, имеющем постоянную величину. Л., И. Р. Гидрол. Инст. **14** 1925 13—29 фр. рез. 30—30.

Марков, А. А. Несколько задач исчисления вероятностей. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 (1919) 2101—2116.
—— О коэффициенте дисперсии. (Вторая заметка). Пгр., И. А. Н. (6) **14** 1920 191—198
—— О некоторых предельных формулах исчисления вероятностей. Пгр., И. А. Н. (6) **11** 1917 177—186.

—— Об эллипсоидах (эллипсах) рассеяния и корреляции. Л., И. А. Н. (6) **18** 1924 117—126.

—— Обобщение задачи о последовательном обмене шаров. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 261—266.

—— Трудность метода моментов и два примера неполного разрешения его. Л., И. А. Н. (6) **16** 1922 (1924) 281—286.

Марчевский, М. Н. О конечных разностях функций двух независимых переменных. Х., Наук. Зап. [**2**] 1926 21—46 фр. рез.

Маслов, А. Ф. О преобразовании Moutard'а и квадратичных решениях уравнения с равными инвариантами. М., Мат., Сборн., **32** 1925 569—596 фр. рез. 597—598.

Меликов, К. В. Об одной возможной конструкции гармонического анализатора. Пгр., Зап. по гидрогр. **3** (**44**) 1921 185—191.

Мечников, В. В. О вероятности попадания при стрельбе по движущейся цели. Л., И. В.-Техн. А. [**1**] 1927 114—127.

—— О формулах квадратур и об определении параметров эмпирических формул по способу наименьших квадратов. Л., И. В.-Техн. А. [**1**] 1927 141—149.

Миллер, Ф. А. Вычисление некоторых неопределенных интегралов, содержащих произведение двух Бесселевых функций. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 123—133.

Михальский, Н. Вариационное обобщение схемы Чебышева для параболического интерполирования. М., Р. Астр. Ж. **4** 1927 15—19 англ. рез. 19—19.

Михневич, Г. Л. Линейные интегральные уравнения второго рода с кососимметричным ядром. Одесса, Ж. н.-досл. катедр $\mathbf{2}_3$ 1926 78—88 фр. рез. 88—89.

—— Об одном преобразовании однородного линейного интегрального уравнения второго рода с комплексным автопараметром. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_{8-9}$ 1924 24—27 фр. рез. 28—28.

—— Решение неоднородного линейного интегрального уравнения второго рода с косо-симметричным ядром. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_{8-9}$ 1924 14—22 фр. рез. 22—23.

Мордухай-Болтовской, Д. Д. О задаче Шварца относящейся к Абелевым интегралам. Ростов на Дону, Трд. С.-Кавк. Асс. н.-иссл. Инст. **1**, Инст. Мат. и Естеств. при С.-Кавк. Гос. Унив. **2** 1926 1—12 фр. рез. 13—13.

—— О разложении на примарные множители целой трансцендентной функции. М., Мат. Сборн. **31** 1924 579—584 фр. рез. 584—584.

—— О числовой характеристике утверждаемого тожества. Ростов на Дону, И. Донск. Унив. **7** 1925 40—43.

—— Об интегрировании в конечном виде дифференциальных биномов в случае иррациональных показателей. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 14—25 фр. рез. 25—25.

Мусхелов, Н. И. Об определении гармонической функции по заданиям на контуре. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1918 (1919) 89—93.

—— Решение одного интегрального уравнения встречающегося в теории черного излучения. М., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., часть физ. **56** 1924 30—39.

—— Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Пгр., И. А. Н. (6) **13** 1919 663—686.

—— см. также Muschelišvili.

Назаров, Н. Н. Приближенное вычисление двойных определенных интегралов. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **10** 1925 91—119 фр. рез. 119—119.

Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида. Гл. II. О нелинейных интегральных уравнениях. Иваново-Вознесенск, И. политех. Инст. **6** 1922 155—171.

—— О нелинейных интегральных уравнениях с постоянными пределами. М., И. Физ. Инст. при Моск. Научн. Инст. и Инст. Биолог. Физ. при Нар. Ком. Здрав. **2** 1922 221—238.

Немыцкий, В. см. III.

Оглоблин, Н. В. см. VI.

Орлов, А. Я. О формулах Чебышева для интерполирования по способу наименьших квадратов. Пгр., И. Р. Астр. Общ. **23** 1919 22—26

Парфентьев, Н. Н. Применение теории вероятностей к получению точной сравнительной оценки наблюдаемых явлений, когда для изучаемого рода объектов не имеется масштаба измерения. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **23** 1923 21—32.

—— La deduction asymptotique de la loi de J. Bernoulli dans la théorie des probabilités. Казань, Уч. Зап. Унив. **87** 1927 90—91.

Пастухов, А. С. О приближениях Чебышева. М., Мат. Сборн. **32** 1925 320—324 фр. рез. 325—325.

Поливанов, А. И. О теореме Cauchy-Fatou. Н.-Новгород, И. Унив. **1** 1926 123—132 фр. рез. 133—133.

Полубаринова П. Я. см. VI.

Привалов, И. И. Интеграл Cauchy. Саратов, И. Унив. Ф.-М. фак. $\mathbf{11_1}$ 1918 94+II.

—— К теории сопряженных тригонометрических рядов. М., Мат. Сборн. **31** 1923 224—228 фр. рез. 228—228.

—— О последовательностях аналитических функций. М., Мат. Сборн. **32** 1924 45 49 фр. рез. 49—49.

—— О приближении суммами Fejer'a функций удовлетворяющих условию Lipschitz'a. М., Мат. Сборн. **30** 1918 521—526.

—— О ряде Тэйлора. М., Мат. Сборн. **31** 1924 345—349 фр. рез. 349—349.

—— О суммировании ряда Legendre'a. М., Мат. Сборн. **30** 1918 527—534 фр. рез. 534—534.

—— О сходимости рядов Sturm'a-Liouville'я и Legendre'a. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **15** 1917 148—160 фр. рез. 160—160.

—— О сходимости сопряженных тригонометрических рядов. М., Мат. Сборн. **32** 1925 357—362 фр. рез. 363—363.

—— О функциях, дающих однолистное конформное отображение. М., Мат. Сборн. **31** 1924 350—363 фр. рез. 364—365.

—— Об одном новом процессе суммирования бесконечных рядов. М., Мат. Сборн. **32** 1925 711—720 фр. рез. 721—722.

—— Обобщение теоремы Fatou. М., Мат. Сборн. **31** 1923 232—235 фр. рез. 235—235.

—— Обобщение теоремы Paul-du-Boys-Reymond'a. М., Мат. Сборн. **31** 1923 229—231 фр. рез. 231—231

—— Sur les fonctions harmoniques. M., Мат. Сборн. **32** 1925 464—469 русск. рез. 470—471.

—— Sur les suites de fonctions analytiques. М., Мат. Сборн. **33** 1926 119—128 русск. рез. 128—128

—— Ueber einen Mittelwertsatz in der Theorie der analytischen Funktionen. М., Мат. Сборн. **32** 1924 50—53 русск. рез. 54—54.

Пфейффер, Г. В. Note sur les cas particuliers des équations lineaires en jacobiants aux derivées partielles du premier ordre de plusieurs fonctions, qui admettent l'intégrale générale-l'intégrale de M-er Hamburger. К., Зап. Ф.-М. відділу. $\mathbf{1_3}$ 1925 91—99.

—— Note sur les propriétés des intégrales d'un système jacobien d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1_4}$ 1925 15—19.

—— Sur une méthode spéciale d'intégration des équations et des systèmes d'équations non lineaires aux dérivées partielles du premier ordre. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1_1}$ 1922 (1923) 41—51, 51—59.

Пшеборский, А. П. Задача об экстремуме интеграла $\int f\ (x,\ y,\ y')\ dx$ с переменными конечными точками Х., Уч. Зап. н.-иссл. кафедр **1** 1924 1—26.

Рабинович, Ю. Аналитические вектор-функции и дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют. Казань, 1918 XII+133.

Романовский, В. И. Новое доказательство теоремы Пуассона. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **9** 1925 95—100 англ. рез. 101—101.

—— О вероятностях связанных признаков и о их применеиии в статистике. М, Вестн. Статист. **12** 1922 34—41.

—— О корреляционном отношении. М., Вестн. Статист. **12** 1922 29—33.

—— О линейной корреляции двух величин. М., Вестн. Статист. **12** 1922 23—28.

—— О распределении средней арифметической в сериях независимых испытаний. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 1087—1106.

*—— О распределении суммы нормально распределенных величин. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **9** 1925 89—93 англ. рез. 94—94.

—— О способах интерполирования осадков. Ташкент, 1924 30.

—— О статистических критериях принадлежности данной особи к одному из близких видов. Ташкент, Трд. Турк. н. Общ. **2** 1925 173—184 англ. рез.

—— О центральных моментах двух нормально распределенных случайных переменных. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **15** 1927 307—312 англ. рез. 312—312.

—— Об одной задаче Р. А. Фишера. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **15** 1927 313—317 англ. рез. 317—317.

— Обобщение неравенства Маркова и его применение в теории корреляции. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **8** 1925 107—110 англ. рез. 111—111.
— Обобщение способа Сильвануса-Томсона гармонического анализа. Ташкент, Трд. Турк. Гос. Унив. **6—8** 1922 3—18.
— Сокращенный вывод формулы К. Пирсона для моментов гипергеометрического ряда. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **12** 1926 127—129 англ. рез. 129—129.
— On certain expansions in series of polynomials of incomplete β—functions. М., Мат. Сборн. **33** 1926 207—229 русск. рез. 229—229.
— On the dtstribution of the regression coefficient in samples from normal population. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 643—648.
— Sur l'intégration des systèmes en involution d'une classe quelconque. М., Мат. Сборн. **32** 1924 255—272 русск. рез. 272—272.

Руссьян, Ц. К. Classe du système d'équations de Pfaff. Х., Наук. Зап. **[2]** 1926 47—55.
— Généralisation de la méthode de Cauchy de l'intégration de l'équation differentielle aux dérivées partielles du premier ordre. Х., Уч. Зап. н.-иссл. кафедр. **1** 1924 27—37.

Самбикин, Н. П. О разложении чисел π и e в непрерывные дроби при помощи гипергеометрического ряда. Воронеж, Трд. Унив. **3** 1926 240—246 нем. рез. XII—XII.

Саткевич, А. А. Метод Чебышева постепенного составления по данным опыта целой алгебраической функции в упрощенном обосновании и примененной к практике формулировке. Пгр., И. Р. Гидрол. Инст. **1—3** 1921 1—38 фр. рез. 39—39.

Сверженский, С. Б. О переходе от кривых разных типов Пирсона к их гистограммам. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **25** 1925 (1926) 43—47 фр. рез. 47—47.
— Обобщенное преобразование однородного линейного интегрального уравнения второго рода с комплексным автопараметром. Одесса, Ж. н.-досл. катедр **2_3** 1926 90—94 англ. рез. 95—95.
— Функция $E(x)$ и ее применение в теории вероятностей. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **25** 1925 (1926) 41—43 фр. рез. 43—43.

Свешников, Г. Н. О минорах Fredholm'а. Саратов, Уч. Зап. Унив. **3_2** 1925 24—27.
— Об уравнении охлаждения колечка. Саратов, Уч. Зап. Унив. **2_2** 1924 26—29.

Сивцов, Д. М. Н. Е. Жуковский и классификация особенных точек дифференциальных уравнений 1-го порядка. Х., Уч, Зап. н.-иссл. кафедр. **1** 1924 76—80.
— Обобщение формулы Enneper'а-Beltrami на системы интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Х., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 64—73.
— Свойства системы интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Х., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 74—79.

Сиротин, Е. Е. Интегрирование уравнения Riccati вида $y' + y^2 + \frac{a}{x} = 0$ при помощи рядов. Минск, Працы Беларуск. Дзярж. Унив. **4—5** 1923 155—158.

Смирнов, В. И. Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками. Пгр., 1918 XVI+307+5 табл. (литогр.).
— О рациональных преобразованиях линейных дифференциальных уравнений второго порядка. М., Мат. Сборн. **34** 1927 101—106 фр. рез. 107—107.
— Приложение принципа сходимости к теории униформизации. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **16** 1918 39—54.
— Sur quelques séries de polynomes. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 268—274 русск. рез. 274—274.

Смоленский, Б. И. Основные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с геометрической точки зрения. Свердровск, И. Уральск. политехн. Инст. **5** 1926 13—35 фр. рез. 35—35.

Спенглер, Н. Ф. Обобщение формулы Green'а для пространства n измерений. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **15** 1917 193—200.

Сретенский, Л. О влиянии присоединенных наблюденнй на коеффициент корреляции. [М.] Геофиз. Бюлл. **14** 1926 50—53 фр. рез. 53—53.

Станкевич, Б. В. Об одном линейном дифференцнальном уравнении и о геометрическом истолковании некоторых его частных случаев. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **3** 1926 43—45.

Стеклов, В. А. Основные задачи математической физики. Часть первая. Основные задачи математической физики для тел линейных размеров. Пб., 1922 IV+285. Часть вторая. Основные задачи математической физики для тел трех измерений. Пб., 1923 II+185.

— Quelques remarques complémentaires sur les quadratures. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 587—614.

— Ramarques sur les quadratures. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 99—118.

— Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchébychef et sur les quadratures. Notes I, II, III. Пгр., И. А. Н. (6) **11** 1917 187—218, 535—566, 687—718, errata 1094.

— Sur le développement des fonctions continues en séries de polynomes de Tchébychef. Пгр., И. А. Н. (6) **15** 1921 (1923) 249—266.

— Sur le problème d'approximation des fonctions arbitraires à l'aide des polynomes de Tchébychef. Л., И. А. Н. (6) **20** 1926 857—862.

— Sur les quadratures. Notes I, II. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 1859—1890. **13** 1919 65—96.

— Une contribution nouvelle au problème du développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébychef. Пгр., И. А. Н. (6) **15** 1921 (1923) 267—280.

— Une méthode de la solution du problème du développement des fonctions en séries de polynomes de Tchébychef indépendante de la théorie de fermeture. I, II. Пгр., И. А. Н. (6) **15** 1921 (1923) 281—302, 303—326.

Степанов, В. В. К принципу du Bois-Reymond'а в теории роста функций. М., Мат. Сборн. **30** 1918 535—542.

— Sur la distribution des valeurs des sommes incomplètes d'une série convergente à termes positifs. М., Мат. Сборн. **31** 1923 256—264 русск. рез. 264—264.

— Sur la résolution du problème de Dirichlet à l'aide de l'intégrale de Poisson. М., Мат. Сборн. **32** 1924 111—114 русск. рез. 114—114.

— Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale. М., Мат. Сборн. **32** 1925 511—526 русск. рез. 527—527.

— Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables. М., Мат. Сборн. **31** 1924 487-488 русск. рез. 489—489.

Субботин, М. Ф. О форме коэффициентов степенных разложений алгебраических функций. Новочеркасск, И. Донск. политехн. Инст. **7** 1919 226—249 фр. рез. 250-251.

— Численное интегрирование дифференциальных уравнений. (Статья первая). Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **16** 1927 273—286 фр. рез. 287—287.

— On the Law of Frequency of Error. М., Мат. Сборн. **31** 1923 296—300 русск. рез. 300—301.

Сушкевич, А. К. Об одном определении интеграла. Х., Наук. Зап. [**2**] 1926 57—70.

Таблицы значений эллиптических интегралов первого рода F (φ, θ) и второго рода E (φ, θ). Пгр., Бюлл. Р. Гидрол. Инст. **1922**$_5$ 9—12.

Тамаркин, Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Пгр., И. Электр. Инст. **14** 1917 I—VII+81—388.

— Complement à l'article: Sur la méthode de W. Ritz pour la solution approchée des problèmes de la physique mathématique. Пгр., И. А. Н. (6) **15** 1921 (1923) 327—332.

Тимченко, И. Г. Demonstration élémentaire de l'existence d'une fonction inverse d'une fonction holomorphe d'une variable compexe. Одесса, Ж. н.-досл. катедр **2**$_3$ 1926 56—60 укр. рез. 56—56.

Тихомандрицкий, М. А. Современное состояние теории Абелевых интегралов. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив **1** 1919 41—43.

Турчанинов, А. С. Общая обратная задача вариационного исчисления. Одеса, Ж. н.-досл. катедр **2**$_3$ 1926 36—43 фр. рез. 43—43.

— Фокальные точки в вариационном исчислении. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр **1**$_{8-9}$ 1924 11—13 фр. рез. 13—13.

Урысон, П. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений. М., Мат. Сборн. **31** 1923 236—254 фр. рез. 254—255.

Успенский, Я. В. О приближенном выражении коэффициентов удаленных членов в разложении уравнения центра в ряд по синусам кратных средней аномалии. Пгр., И. А. Н. (6) **15** 1921 (1923) 333—342.

Федоров, В. С. Моногенность и непрерывные однозначные изображения. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **8**$_2$ 1925 38—47 фр. рез. 47—48.

— Непрерывность и моногенность. Иваново-Вознесенск (Пгр.), И. политехн. Инст. **1** 1919 45—56, 139—139.

— О конформном отображении кругов с разрезами. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **5** 1922 49—59.

— О производной аналитической функции вблизи множества особых точек. М., Мат. Сборн. **32** 1924 122—133 фр. рез. 133—134.

— О разложении всюду непрерывной аналитической функции в ряд по двойным интегралам Lebesgue'a. М., Мат. Сборн. **33** 1926 385—393 фр. рез 393—394.

— О рядах по двойным интегралам Лебега в теории аналитических функций. М., Мат. Сборн. **34** 1927 29—36 фр. рез. 36—36.

— Особые значения везде непрерывных аналитических функций. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **6** 1922 43—56.

— Sur la continuité des fonctions analytiques. М., Мат. Сборн. **32** 1924 115—120 русск. рез. 121—121.

Фихтенгольц, Г. М. Об абсолютно непрерывных функциях. М., Мат. Сборн. **31** 1923 286—294 фр. рез. 294—295.

— Теория простых определенных интегралов зависящих от параметра. Пгр., 1918 VII+327 (литогр.).

Фок, В. А. О конформном изображении четырехугольника с нулевыми углами на полуплоскости. Л., Ж.Ф.-М. Общ. **1** 1927 147—168 фр. рез. 167—168.

— О некоторых интегральных уравнениях Volterra. М., Мат. Сборн. **31** 1924 519—528 англ. рез. 528—528.

— см. VI.

Франк, М. Л. Одна из возможных конструкций полярного интеграфа. Симферополь, Зап. Мат. каб. Тавр. Унив. **1** 1919 29 31 англ. рез. 31—32.

Хинчин, А. Я. Исследование о строении измеримых функций. М., Мат. Сборн. **31** 1923—1924 265—285, 377—430 фр. рез. 430—433.

— О Петербургской игре. М., Мат. Сборн. **32** 1925 330—340 нем. рез. 341—341.

— О последовательностях аналитических функций. М., Мат. Сборн. **31** 1922 147—150 фр. рез. 150—151.

— О процессе интегрирования Denjoy. М., Мат. Сборн. **30** 1918 543—557.

— Об одном вопросе теории Диофантовых приближений. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **8**$_2$ 1925 32—37 нем. рез. 37—37.

— Основные законы теории вероятностей. М., (Ассоц. н.-иссл. инст. при Физмате 1 М. Г. У. Н.-иссл. инст. мат. и мех. при 1 М. Г. У.) 1927 91.

— Sur la théorie de l'intégrale de M. Denjoy. Иваново-Вознесенск (Пгр.) И. политехн. Инст. **3** 1921 49—51.

— Uber die Anwendbarkeitsgrenzen des Tchebycheff'schen Satzes in Warscheinlichkeitsrechnung. М., Мат. Сборн. **32** 1925 678—687 русск. рез. 688—688.

— Ueber diophantische Approximationen höheren Grades. М., Мат. Сборн. **34** 1927 109—112 русск. рез. 112—112.

— Zur Theorie der diophantischen Approximationen. М., Мат. Сборн. **32** 1925 277—278 русск. рез. 278—278.

— и **Колмогоров, А. Н.** Ueber Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. М., Мат. Сборн. **32** 1925 668—676 русск. рез. 677—677.

Хлодовский, И. Une rémarque sur la represantation des fonctions continues par des polynomes à coefficients entièrs. М., Мат. Сборн. **32** 1925 472—474 русск. рез. 475—475.

Хотимский, В. Выравнивание статистических рядов по методу наименьших квадратов (способ Чебышева) и таблицы для нахождения уравнений параболических кривых. М.-Л., 1925 88.

Чаплыгин, С. А. Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М., Бюлл. Н.-экспер. Инст. пут. сообщ. **13** 1919 1—16.

— Приближенное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Пгр., (Ком. особ. арт. оп.) 1920 20+1 тбл.

Чеботарев, Н. Г. Критерий вещественности корней трансцендентных уравнений. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр **1**$_1$ 1923 15—30.

— О методе исключения переменных из трансцендентных уравнений. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **24**$_1$ 1924 1—6 фр. рез. 6—6.

— Поправка к моей статье „О методе исключения переменных из трансцендентных уравнений". Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 146—148 фр. рез 148—148.

Шмидт, О. Ю. О парадоксе Bertrand'a в теории вероятностей. М., Мат. Сборн. **33** 1926 33—39 фр. рез. 40—40.

Шохат, Я. А. Исследование одного класса многочленов наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. Екатеринбург, 1918 4+160 (литогр.).

—— О функциях наименее уклоняющихся от нуля в бесконечном промежутке. Екатеринбург, И. Уральск. Унив. **2** 1921 1—33 фр. рез.

Штаерман, Э. Quelques rémarques sur les formules des quadratures dites mécaniques au point de vue de leur calcul effectif. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_2$ 1924 10—12.

Щиголев, Б. О разложении асимметрической кривой распределения на 2 кривые Гаусса М., Р. Астр. Ж. $\mathbf{1}_{3-4}$ 1924 76—89 англ рез.

—— Разложение распределения трех переменных на два приведенные нормальные распределения. М. Р. Астр Ж. $\mathbf{3}_{3-4}$ 1926 145—155 англ. рез 156—156.

—— Разложение функции распределения трех переменных на 2 сферические распределения. М., Р. Астр. Ж. $\mathbf{2}_1$ 1925 1—5 англ. рез. 6—6.

Яковкин, А. О секторном планиметре. Л., И. Р. Астр. Общ. $\mathbf{25}_{5-9}$ 1924 17—19.

Fréchet, M. Sur la loi des erreurs d'observation. M., Мат. Сборн. **32** 1924 5—8 русск. рез. 8—8.

—— Sur la loi des erreurs d'observations. M., Мат. Сборн. **32** 1925 705—710 русск. рез. 710—710.

Guillot, G. Sur la convergence de la série de Fourier. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_4$ 1924 23—26 укр. рез. 26—26.

Gumbel, E. J. Eine Beziehung zwischen Fehlermassen. M., Мат. Сборн. **33** 1926 395—411 русск. рез. 412—412.

—— On life tables. M., Мат. Сборн. **32** 1925 613—620 русск. рез. 621—621.

Hadamard, J. Quelques cas d'impossibilité du problème de Cauchy. In mem Lobatschevskii **2** 1927 163—176.

Hayashi, Tsuruichi. A soluble case of the Laplace equation. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_3$ 1927 115—120.

Kharadzé, A. Quelques applications d'une classe particulière des polynomes. Tiflis, Bull. de l'Univ. **3** 1923 97—106 (по грузински).

Lefschetz, S. Un théorème sur les fonc tions abéliennes. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 186—190.

Muschelisvili, N. Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathématique. Tiflis (Impr. de l'État) 1922 VIII+157+1.

Nikoladzé, G. Einige Eigenschaften der Risspunktkurve in der Variationsrechnung. Tiflis, Bull. de l'Univ. **3** 1923 324—328.

Razmadzé, A. Deux propositions du calcul des variations. Tiflis, Bull. de l'Univ. **1** 1919—1920 157—172.

—— Ueber unstetige Lösungen mit einem Unstetigkeitspunkt in der Variationsrechnung. Tiflis, Bull. de l'Univ. **2** 1922—1923 282—312.

Silverman, L. L. On the omission of terms in certain summable series. M., Мат. Сборн. **33** 1926 375—382 русск. рез. 382—384.

Tonelli, L. Sur une question du Calcul des Variations. M., Мат. Сборн. **33** 1926 87—97 русск. рез. 97—98.

V. Геометрия.

Агрономов, Н. А. О преобразовании общего уравнения кривой второго порядка к простейшему виду. Владивосток, Трд. Дальневост. Унив. (7) **1** 1926 3—7 фр. рез. 8—8.

Адамов, А. А. Элементарный способ для изучения очертаний кривых 3-го порядка по данному уравнению в декартовых координатах. Пгр., 1918 338, альб. черт. 47+2 (литогр.).

Бренев, Е. К. Аксиомы порядка в системе аксиом геометрии Hilbert'а. М., Мат. Сб. **31** 1924 576—577 нем. рез. 578—578.

Бронштейн. И. Н. О мнимых линейных Wurf'ах. М., Мат Сборн. **34** 1927 37—47 нем. рез. 47—47.

Бюшгенс, С. С. О теореме Koenigs'а. М., Мат. Сборн. **33** 1926 49—55 фр. рез. 55—56.

—— Об изгибании поверхностей на главном основании. М., 1917 79+1.

—— Sur certaines familles invariables de courbes. М., Мат. Сборн. **32** 1925 348—351 русск. рез. 352—352.

—— Sur les surfaces ayant une famille des parallèles planes ou sphériques. M., Мат. Сборн. **32** 1925 632—643 русск. рез. 644—645.

—— Sur une classe des hypersurfaces. M., Мат. Сбор. **32** 1925 625—630 русск. рез. 630—631.

Вайнфельд, А. С. Геометрический метод определения и исследования деформации линейчатой поверхности. X., Наук. Зап. [2] 1926 87—106.

—— Принцип независимости действия и применение его к геометрическому исчислению 1-й вариации поверхностного элемента. X., Наука на Укр. **3** 1922 203—209.

Вельмин, В. П. Применение теории целых комплексных чисел к решению одной геометрической задачи. Ростов на Дону, И. Донск. Унив. **5** 1925 40-41.

Вениаминов, В. Sur une propriété métrique des courbes de M. Jordan. M., Мат. Сборн. **31** 1924 446—464 русск. рез. 464-464.

Власов, А. К. Новое доказательство теоремы Pohlke. M., Мат. Сборн. **32** 1925 453—455 фр. рез. 456—456.

—— Об особенностях в расположении Паскалевых линий для данных шести точек конического сечения. M., Мат. Сборн. **32** 1925 689—704 нем. рез. 704—704.

Гаврилов, А. Ф. см. IV.

Глаголев, Н. А. Задача о кратчайшей линии в проекциях с числовыми отметками. M., Мат. Сборн. **31** 1923 319—323 фр. рез. 323—323.

—— О геодезическом отображении многообразий. M., Мат. Сборн. **32** 1925 305—318 англ. рез. 318—319.

—— Обобщение теоремы Pohlke. M., Мат. Сборн. **32** 1925 457—462 фр. рез. 463—463.

—— Применение плоскостных вурфов к определению пространственной кривой 4-го порядка 1-го рода. M., Мат. Сборн. **32** 1925 342—347 нем. рез. 347—347.

—— Римановы многообразия проективного типа M., Мат. Сборн. **32** 1924 177—190 нем. рез. 190-191.

—— Sur le problème du plus court chemin entre deux points d'une surface. M., Мат. Сборн. **31** 1923 319—323.

Горбунов, Б. М. и **Уманский, О. А.** Про взаємні криві. К., Трд. Ф.-М. відділу **5**5 1927 371—374 фр. рез. 408—409.

Горин, Н. П. Некоторые свойства фокальных кривых софокусных поверхностей второго порядка. Екатеринбург, И. Уральск. Унив. **2** 1921 1—8.

—— О некоторых свойствах кривых, полярных системе софокусных коник. Екатеринбург, И. Уральск. Унив. **1** 1920 1 — 16 + 4 тбл.

—— См. VI.

Граве, Д. А. Плоская геометрия Эвклида, как предельная для геометрии Лобачевского. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 25-36.

Григорьев, Е. И Из новой геометрии треугольника. Казань, Уч. Зап. Унив. **85** 1925 63—67.

Даватц, В. Синтетические основы плоской параболической геометрии. X., Сообщ. Мат. Общ. (2) **15** 1917 177—192.

Дармостук, П. М. Особенные случаи соприкасающегося шара (и плоскости) в точке пространственной кривой. X., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 80—93.

Депутатов, В. Н. К вопросу о природе плоскостных вурфов. M., Мат. Сборн. **33** 1926 109—117 нем. рез. 118—118.

Дудин, С. Очерки по элементарной аналитической геометрии в параллельных тангенциальных координатах. Свердловск, И. Уральск. Унив. **3** 1922—23 21 — 50 + 2 тбл. нем. рез. И. Уральск. политехн. Инст. **4** 1924—25 17 — 43 + 1 тбл. нем. рез.

Душин, Н. Самопроективные или W-кривые. X., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 32—63.

Егоров, Д. Ф. Sur les surfaces engendrées par la distribution des lignes d'une famille donnée. M., Мат Сборн. **31** 1923 153—182 русск. рез. 182—184.

Житомирский, О. К. К неевклидовой геометрии кругов. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 119—142 нем. рез. 143—143.

Зейлигер, Д. Н. Из курса линейчатой геометрии. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **23** 1923 130—156.

Зеленин, В. А. Теория общей аксонометрии. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **9** 1926 3—20.

Зетель, С. О построении некоторых правильных многоугольников. Свердловск, И. Уральск. Унив. **3** 1922—23 195 — 203 + 2 тбл.

Извольский, Н. Некоторые изыскания о парах кругов. Ярославль, 1927 13.

Иовлев, Н. Н. Главные методы обоснования геометрии Лобачевского. Том I. Самара, 1923 144.

—— Два новых способа проективного вывода основных формул тригонометрии Лобачевского. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **22** 1917 234—241.

Каган, В. Ф. Применение учения о параллельном перенесении векторов к выводу предложения, представляющего собой обобщение теоремы Гаусса об угловом избытке геодезического треугольника. М., Мат. Сборн. **31** 1923 208—218 нем. рез. 218—219.

Кайнер, М. Пространственная графика логарифмики $y = a^x$. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр. $\mathbf{1}_4$ 1924 32—34 нем. рез. 34—35.

Ковнер, С. С. Об одном искусственном примере линий равного изменения. [М.] Геофиз. Бюлл. **14** 1926 47—49 англ. рез. 49—49.

—— Eine mathematische Theorie der magnetischen Isogonen. [М.] Геофиз. Бюлл. **14** 1926 41—45 русск. рез. 45—46.

Комаревский, В. М. Обобщение доказательства теоремы Эйлера о многогранниках, данного von Staudt'ом. Ташкент, Бюлл. 1 Ср.-Аз. Унив. **6** 1923 151—153.

—— Теорема Euler'а о многогранниках. Историко-критический обзор различных ее доказательств. Ташкент, Трд. Турк. н. Общ. **2** 1925 141—170 фр. рез. 171—172.

Костанди, Г. В. Геометрическая интерпретация одной теоремы. Одесса, Ж. н.-досл. катедр. $\mathbf{2}_3$ 1926 74—77 фр. рез. 77—77.

Котельников, А. П. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 37—66.

Котов, Т. И. Геодезические линии. Х., Наука на Укр. **3** 1922 107—113.

—— Геодезические линии на поверхностях вращения с максимальной параллелью. Х., Уч. Зап. н-иссл. кафедр. **1** 1924 63—74 фр. рез. 75—75.

—— Исследования из области теории геодезическях линий и геодезических кругов. (Геодезические круги и геодезические параллельные кривые). Х., Наук. Зап. [2] 1926 79—86 фр. рез.

—— О геодезических параллельных кривых и геодезических кругах. М., Мат. Сборн. **31** 1924 508—514 фр. рез. 515—515.

—— О геодезических линиях, асимптотических к замкнутой геодезической линии. М., Мат. Сборн. **31** 1924 516—518 фр. рез. 518—518.

—— О пределах расстояний между полюсами правильных поверхностей вращения с исключительно замкнутыми геодезическими линиями. М., Мат. Сборн. **32** 1924 43—45 фр. рез. 45—45.

—— Об асимптотических геодезических линиях. Х, Наука на Укр. **4** 1922 170—173 фр. рез. 173—173.

Кравчук, М. До теорії кривих 4 ступеня. К., Наук. Зап. **1** 1923 76—83 фр. рез. 84—84.

Крыжановский, Д. А. Про теорему Дезарга. Одесса, Ж. н.-досл. катедр. $\mathbf{2}_3$ 1926 100—100 итал рез. 101—101.

Львовский, В. Д. О замкнутых двухсторонних трехмерных пространствах. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 169—180 нем. рез. 180—181 + 15 тбл.

—— О построении замкнутых односторонних поверхностей с замкнутыми двойными линиями. М., Мат. Сборн. **32** 1925 353—356 + 1 тбл. нем. рез. 356—356.

Маслов, А. Ф. Sur la déformation continue d'une classe des surfaces. M., Мат. Сборн. **33** 1926 367—370 русск. рез. 370—370.

—— Sur la déformation des surfaces avec conservation d'un système conjugué. M., Мат. Сборн. **33** 1926 43—48 русск. рез. 48—48.

Матисова, А. М. О конгруэнции Ribaucour'a. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_1$ 1924 7—13 фр. рез. 13—13.

—— О центральной поверхности изотропной конгруенции. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **23** 1923 126—129.

Млодзеевский, Б. К. К таблицам Кремоновых чисел первых 21 порядка. М., Мат. Сборн. **31** 1922 35—54 фр. рез. 55—57.

—— К теории Кремрновых преобразований. М., Мат. Сборн. **31** 1922 7—31 фр. рез. 32—34.

—— Линейные системы кривых, связанных с арифметическими решениями Кремоновых уравнений. М., Мат. Сборн. **31** 1924 341—343 фр. рез. 343—344.

—— Таблица Кремоновых чисел первых 21 порядков. М., Мат. Сборн. **31** 1922 58—77 фр. рез. 58—58.

Мордухай-Болтовской, Д. Д. Квадратичные диаметры и поляры кривых третьего порядка. Ростов на Дону, Трд. С.-Кавк. Асс. н. иссл. Инст. **1**, Инст. Мат. и Естеств. при С.-Кавк. Гос. Унив. **2** 1926 29—38 фр. рез. 38—38.

—— Начертательная геометрия трехмерного и четырехмерного пространства, как метод геометрических построений в ограниченной области. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **4** 1927 63—71.

—— Некоторые теоремы о кривых второго и третьего порядка в связи с теорией эллиптических функций. Ростов на Дону, И. Донск. Унив. **4** 1924 4—7.

—— О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. In. mem. Lobatschevskii **2** 1927 67—82.

—— О гиперплоскостном сечении гиперконусов. Ростов на Дону, Трд. С.-Кавк. Асс. н.-иссл. Инст. **1**, Инст. Мат. и Естеств. при С.-Кавк. Гос. Унив. **2** 1926 15—28 фр. рез. 28—28.

—— О диаметральных свойствах алгебраической кривой в геометрии Лобачевского. Ростов на Дону, И. Донск. Унив. **4** 1924 99—102.

—— О пересечении алгебраических кривых. Ростов на Дону, И. Донск. Унив. **4** 1924 1—3.

—— Основания геометрии неизогенных и негомогенных пространств с точки зрения теории групп. Ростов на Дону, И. Донск. Унив. **7** 1925 29—39.

Мочульский, А. Антиметрия четырехмерного пространства векторов вещественной длины. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_4$ 1924 36—47 англ. рез. 48—48.

Огиевецкий, И. Е. О соотношениях между коэффициентами ортогонального преобразования и параметрами Родрига. Х., Сообщ. Мат. Общ. (4) **1** 1927 108—111.

Оглоблин, Н. В. Геометрическое исследование одного рода кривых. Симферополь, И. Крымск. Пед. Инст. **1** 1927 103—109.

Панфилов, И. И. О кривизне сферических индикатрис. Новочеркасск, И. Донск. политехн. Инст. **8** 1920—1922 (1923) 81—83.

Парфентьев, Н. Н. Геометризирование Вселенной. Казань, Уч. Зап. Унив. **86** 1926 Прилож. 3—23.

Пономарев, Н. Математическое исследование вопросов цветной спектроскопии и применение его результатов к изготовлению стереоскопических таблиц. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **23** 1923 33—47 + 2 тбл.

Раздольский, А. И. Приложение эллиптических функций к решению основной геодезической задачи. М., Р. Астр. Ж. $\mathbf{2}_2$ 1925 77—87 нем. рез. 88—88.

Свешников, Г. Н. О параллельном смещении вектора и уравнении ортогональных траекторий геодезических линий. Саратов, Уч. Зап. Унив. $\mathbf{4}_2$ 1925 30—34.

Синцов, Д. М. Несколько моделей для иллюстрации квадратичного характера линейчатой геометрии (задача Gergonne-Steiner'a). Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **22** 1917 222-225.

—— О точках возврата огибающей. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_1$ 1924 61—67 фр. рез. 67—67.

—— Формула Эрмита для приближенного вычисления сегмента кривой и ее видоизменение. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **22** 1917 226-233.

—— см. IV.

Слугинов, С. П. Длина дуги в пространстве n измерений. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **3** 1926 7—10 англ. рез. 10—10.

Смирнов, В. И. О фундаментальной области групп движения на плоскости Лобачевского-Болиаи. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 103—118.

Смоленский, Б. И. см. IV.

Спенглер, Н. Ф. см. IV.

Суслов, Г. К. Учение о векториальном поле. Одесса, 1922 149 + 3 + 2 тбл.

Тумаркин, Л. А. Beitrag zur allgemeinen Dimensionstheorie. М., Мат. Сборн. **33** 1926 57—86 русск. рез. 86—86.

Урысон, П. Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел в n-мерном пространстве. М., Мат. Сборн. **31** 1924 477—485 нем. рез. 486—486.

—— Об одной задаче Carathèodory М., Мат. Сборн. **31** 1922 86—90 фр. рез. 90—90.

Успенский, Я. В. Введение в Неевклидову геометрию Лобачевского-Болиаи. Пгр., 1922 177 + 1.

Федоров, Е. С. Графические операции с четырьмя независимыми переменными. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 615—624.

—— Некоторые полярные системы в плоскости. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 1913—1924.

—— Специальный упрощенный вид системы с параметром точкою. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 1911—1912.

—— Треугольники, четырехгранники и пентатопы как образы, обуславливающие коррелятивность, выражаемую одинаковыми символами. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 1905—1910.

Фиников, С. П. Об одном случае особого изгибания конгруенций. М., Мат. Сборн. **31** 1924 241—247 нем. рез. 247—248.

—— Sur la congruence rectiligne de roulement d'une infinité de manières. M., Мат. Сборн. **34** 1927 49—54 русск. рез. 54—54.

—— Sur la déformation des surfaces à réseaux cinématiquement conjugués persistants. M., Мат. Сборн. **33** 1926 129—159 русск. рез. 159—159.

—— Sur les congruences de roulement. M., Мат. Сборн. **32** 1925 599—611 русск. рез. 612—612.

—— Sur les surfaces de M. Bianchi. M., Мат. Сборн. **32** 1924 249—254 русск. рез. 254—254.

Франк, М. Л. Геометрия Лобачевского и ее значение для современной науки. К столетнему юбилею неевклидовой геометрии. Симферополь, И. Крымск. Пед. Инст. **1** 1927 13—15.

—— О максимальном числе двойных точек многоугольника с четным числом сторон. Симферополь, И. Крымск. Пед. Инст. **1** 1927 100—102.

Фридман, А. А. О кривизне пространства. М., Ж. Р. Ф.—Х. Общ. Часть физ. **56** 1924 59—68.

Чеботарев, Н. Г. О поверхностях переноса. М., Мат. Сборн. **31** 1924 434—445 нем. рез. 445—445.

—— О ширине контуров и тел. Одесса, Ж. н.-иссл. кафедр $\mathbf{1}_{8-9}$ 1924 29—40 нем. рез. 40—41.

—— Об одном обобщении поверхностей переноса. Одесса, Ж. н.—досл. катедр $\mathbf{2}_3$ 1926 44—54 нем. рез. 54—55.

—— Ueber Flächen welche Imprimitivitätssysteme in Bezug auf eine gegebene kontinuirliche Transformationsgruppe enthalten. (Verallgemeinerte Schiebungsflächen). M., Мат. Сборн. **34** 1927 149—204 русск. рез. 205—206.

Чернушенко, И. С. О гильбертовых аксиомах связи. Х., Наук. Зап. **[2]** 1926 107—113.

Четверухин, Н. Ф. Зависимость между понятиями конгруентности отрезков и конгруентности углов. М., Мат. Сборн. **31** 1923 324—330 нем. рез. 331—331.

—— Значение аксиомы Pasch'а для линейной аксиоматики порядка. М., Мат. Сборн. **31** 1924 568—575 нем. рез. 575—575.

—— О многоугольниках, описанных около плоских точечных множеств. М., Мат. Сборн. **31** 1923 331—336 фр. рез. 336—336.

Широков, П. А. Геометрическая интерпретация параллельного переноса вектора в геометрии Weyl'я. Казань, Уч. Зап. Унив. **85** 1925 56—58.

—— Исследование тензорного дифференциального уравнения:

$$D_i D_k D_l \varphi = 0$$

для Riemann'овых пространств. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 123—134 фр. рез. 134—134.

—— Кривые в пространстве постоянной положительной кривизны. Казань, Уч. Зап. Унив. **85** 1925 218—228.

—— О векторной площади. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_2$ 1924 (1925) 31—43 фр. рез. 43—43.

—— О группе конформных преобразований неевклидовых пространств эллиптического и гиперболического типа. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **23** 1923 83—113.

—— О параллельном переносе векторов в неевклидовых пространствах постоянной кривизны. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 135—144 фр. рез. 145—145.

—— О функции удовлетворяющей уравнению Laplace'а в Riemann'овых 3-мерных пространствах и зависящей только от расстояния. Казань, Уч. Зап. Унив. **85** 1925 59—62.

—— Об одном приложении тензорного анализа в теории поверхностей. Казань, Уч. Зап. Унив. **87** 1927 62—66.

—— Об одном способе вывода основных формул геометрии Лобачевского. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_1$ 1924 33—41 фр. рез. 41—41.

—— Об отличительных свойствах сфер в пространстве постоянной кривизны. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **25** 1925 (1926) 48—55 фр. рез. 55—55.

—— Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в Riemann'овых пространствах. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **25** 1925 (1926) 86—113 нем. рез. 113—114.

—— Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 119—134.

—— Этюды по геометрии Лобачевского. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) $\mathbf{24}_1$ 1924 26—32 фр. рез. 32—32.

Щиголев, Б. О сопряженных прямолинейных диаметрах кривых 4-го порядка. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **2** 1919 125—138.

Яблоков, В. А. Кривые двоякой кривизны. Казань, Уч. Зап. Унив. **87** 1927 147—155.

—— О взаимно полярных конических сечениях. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **23** 1923 76—82.

—— Теоремы Аполлония в n-мерной геометрии Евклида. Казань, Уч. Зап. Унив. **87** 1927 83—85.

Blaschke, Wilhelm. Beziehungen zwischen der Differentialgeometrie des R_3 und des R_4. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 1—3.

Cartan, Elie. L'axiome du plan et la Géométrie differentielle metrique. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 4—12.

Engel, Friedrich. Zur Dreiecks-Geometrie der Lobatschefskijschen Ebene. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 13—16.

Kharadzé, A. Sur une généralisation des développées des courbes planes. Tiflis, Bull. de l' Univ. **4** 1924 305—314.

Nikoladzé, G. Sur une méthode nouvelle de la Géométrie analytique. Tiflis, Bull. de l'Univ. **1** 1919—1920 140—152.

Nishiuchi, Teikichi. Sur les faisceaux de coniques dans le plan noneuclidien. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 83—84.

Fano, Gino. Les cycles de la géométrie non euclidienne au point de vue projectif. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 17—24.

Schoenflies, A. Beweis eines grundlegenden Polyedersatzes. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 85—89.

Schouten, J. A. Ueber die Projekivkrümmung und Konformkrümmung halbsimmetrischer Uebertragungen. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 90—98.

Schur, F. Konstruction von Lobatschefskij's Parallelen. In mem. Lobatschevskii **2** 1927 99—102.

VI. Механика.

Александров, В. Л. Приложение теории решеток к винту. М., Трд. ЦАГИ **6** 1924 1—17 англ. рез. 18—18.

Андронов, А. и **Леонтович, М.** О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. [Л.], Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **59** 1927 429—442 нем. рез. 442—442.

Ахиезер, Н. И. К вопросу об устойчивости вихревых улиц. М., Мат. Сборн. **34** 1927 5—8 нем. рез. 8—8.

Белзецкий, С. И. Доказательство существования пределов сил упругости и сил сопротивления брусьев при изгибе. Пгр., И. А. Н. (6) **13** 1919 (1920) 453—484.

Беляев, Н. М. Местные напряжения при сжатии упругих тел Инж. соор. и строит. мех. (Сборн. стат.) Л., 1924 27—108.

—— Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Инж. соор. и строит. мех. (Сборн. стат.) Л., 1924 149—167.

Бехтерев, П. Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы. М.-Л., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **57** 1925 359—391 нем. рез. 391—392.

—— Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение метода преобразования координат. [Л.], Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **58** 1926 415—445 нем. рез. 445—446, также Л. 1925 130 (литогр.).

Бобр, И. К вопросу о затухании гармонического колебательного движения. Л., И. Пост. Ц. Сейсм. К. **7** 1924 387—401.

Боголюбов, Н. Про обчислення вимушених хитань, що справджують певні нелінійні диференціяльні рівняння. К., Трд. Ф.-М. відділу **5_5** 1927 367—370 фр. рез. 408—408.

Богуславский, С. О канонической форме уравнений движения электрона в электромагнитном поле. М.-Пгр., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Физ. отд. **55** 1923 55—69.

Брикс, Ф. А. Паральная теория гребного винта. 2-е изд. Ч. I. Пгр. (Гос. Изд.), 1922 VII + 261 + 8 тбл.

Бухгольц, Н. Н. Истечение газов под большим напором. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.), 1919 65 + 1.

Вальтер, П. А. О подъемных силах, развивающихся на лопатках гидравлических аппаратов, работающих в сходящихся потоках. М., Трд. ЦАГИ **12** 1925 27 англ. рез. 28—31.

—— О подъемных силах, развивающихся на лопатках гидравлических аппаратов. II. Вращающиеся колеса. М., Трд. ЦАГИ **18** 1926 39 англ. рез.

—— Об изгибе брусьев двоякой кривизны. М., Трд. ЦАГИ **23** 1926 1—100.

Васильев, Н. С. Движение жидкости, направляемое винтовым вихрем. Одесса, Ж. н.-досл. катедр $\mathbf{2}_3$ 1926 21—34 нем. рез. 35—35.

—— Теорема Грасгофа про шарнірний чотирьохбічник. Одесса, Зап. інст. нар. осв. **1** 1927 224—225.

Великанов, М. А. О пограничной скорости турбулентного потока. М.-Л., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **57** 1925 113—117 нем. рез. 117—117.

Вениаминов, В. О движении шара пилота в атмосфере [М.], Геофиз. Бюлл. **14** 1926 38—40 фр. рез. 40—40.

Вентцель, Д. А. Колебание оси снаряда в начальный период его движения. Л., И. В.-Техн. А. **[1]** 1927 88—109+6 тбл.

Ветчинкин, В. П. Метод экспериментального определения моментов инерции твердых тел при помощи многонитного подвеса. Пгр., (Ком. особ. арт. оп.) 1920 27.

—— О падении и планировании в среде переменной плотности. М., Трд. ЦАГИ 1923 37.

—— и **Ченцов, Н. Г**. Плоский маятник о двух степенях свободы и определение при помощи его высоты центра тяжести и момента инерции твердого тела. М., Трд. ЦАГИ **3** 1923 1—9 англ. рез. 10—10.

——, **Каменев, С. И.** и **Ченцов, Н. Г**. Динамика полетов. М., Трд. ЦАГИ **26** 1927 277 англ. рез. 278—295.

Вильев, М. А. Новые исследования по вопросу о траектории свободно падающего в пустоте тела. Пгр., Вестн. Всероссийск. Астр. Союза, **1** 1918 95—104.

Гаврилов, А. Ф. К задаче о криволинейном движении несвободной точки, не подверженной действию приложенных сил. Л., И. политехн. Инст. **29** 1925 13—16.

Галеркин. Б. Г. Деформации и напряжения в прямоугольных пластинках под действием сосредоточенных сил. Инж. соор. и строит. мех. (Сборник стат.) Л., 1924 1—23.

—— Изгиб треугольных пластинок. Пгр., И. политехн. Инст. **28** 1919 (1921) 1—51.

—— Исследование треугольных пластинок. Пгр., И. А. Н. (6) **13** 1919 (1920) 223—238.

—— К вопросу о выборе лишних неизвестных в строительной механике. М., Вестн. Инж. **1925** 181—186.

—— К расчету жестких рам. М., Вестн. Инж. $\mathbf{1924}_{10}$ 1—10.

—— К теории неразрезных пластинок. М., Вестн. Инж. **1927** 238—244.

—— Квадратная пластинка. Исследование упругой пластинки и напряжений при изгибе. Пгр., И. политехн. Инст. **28** 1919 (1921) 53—77.

—— Кручение трехгранной призмы. Пгр., И. А. Н. (6) **13** 1919 111—118.

—— Напряжения и деформации пластинок в виде кругового сектора с закрепленным дуговым краем. Л., И. политехн. Инст **29** 1925 271—335 фр. рез.

—— Напряжения и деформации пластинок в виде кругового сектора, свободно опертых по краям. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 461—484 фр. рез. 485—485.

—— Применение криволинейных изотермических координат к интегрированию уравнения равновесия упругих пластинок. Л., И. А. Н. (6) **18** 1924 55—66.

—— Равновесие упругих пластинок ограниченных двумя концентрическими дугами кругов и двумя радиусами. Пгр., И. А. Н. (6) **13** 1919 (1920) 415—426.

—— Решение задачи С.-Венана об изгибе для различных контуров основания призмы. Л., Сборн. Инст. пут. сообщ. **96** 1927 277—290.

—— Термические напряжения в упругих пластинках. Инж. соор. и строит. мех. (Сборник стат.) Л., 1924 131—148.

—— Упругая пластинка в виде равнобедренного прямоугольного треугольника Л., Сборн. Инст. пут. сообщ. **94** 1927 223—231.

—— On the equilibrium of elastic plate, bounded by the isosceles rectangular triangle. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 89—100 русск. рез. 101—101.

Гамбурцев, Г. А. Приборы для механического вычисления элементов магнитного и гравитационного поля, вызываемого бесконечно длинным цилиндром произвольного сечения. Л., Докл. А. Н. (А) **1928** 91—95.

Гамов, Г. О движении неконсервативных систем с одной степенью свободы. [Л.], Ж. Р. Ф.-Х. Общ. Часть физ. **58** 1926 477—482 нем. рез. 482—482.

Герасимович, В. П. Изостатический слой с точки зрения теории упругости. Х., Уч. Зап н.-иссл. кафедр. **1** 1924 127—145 англ. рез. 146—146.

Гершгорин, С. А. О механизмах для построения функций комплексного переменного. Л., Ж. Ф-М. Общ. **1** 1926 102—113+1 табл. нем. рез. 113—113.

—— см. IV.

Голубев, В. В. Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. М., Трд. ЦАГИ **29** 1927 207.

Гончаров, В. Л. О проблеме равномерной темперации. М., Мат. Сборн. **32** 1924 232—240, Х., Уч. Зап. н.-иссл. кафедр **1** 1924 116—126 фр. рез. 126—126.

Горин, Н. П. О сложении сил в пространстве Лобачевского. (Статика в плоскости). Свердловск, И. Уральск. Унив. **3** 1922—1923 1—20+1 табл. фр. рез.

—— О сложении сил в пространстве Лобачевского. (Статика в пространстве). Свердловск, И. Уральск. политехн. Инст. **4** 1924—1925 3—15 фр. рез. 15—16, **5** 1926 3—12 фр. рез. 12—12.

Гохман, Э. Х. Уравнения движения упругого тела для обобщенных сил проф. Мизеса. Одесса, Ж. н.-досл. катедр. $\mathbf{2}_3$ 1926 7—14 нем. рез. 14—14.

Граве, Д. А. Ueber die elektromagnetischen Erscheinungen im Sonnensysteme. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_2$ 1927 9—12.

—— Ueber die Rollbewegung einer schweren homogenen Kugel auf zwei Kegeln. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_4$ 1925 8—11.

—— Ueber ein Poincaréschcs Problem. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{1}_3$ 1925 57—59.

—— см. IV.

—— и **Соколов, Г.** Sur le mouvement du perihélie de Mercure. К., Трд. Ф.-М. відділу $\mathbf{5}_1$ 1926 1—11.

Гринберг, Г. А. О разыскании частных решений уравнений гидродинамики специального принципа относительности. М.-Л., Ж. Р. Ф.-Х. Общ. Часть физ. **56** 1924 593—611.

—— Теория упругости и гидродинамика в специальной теории относительности. [Л.] Ж. Р. Ф.-Х Общ. Часть физ. **56** 1925 368—412 нем. рез. 412—412.

Громов, М. Суммарность вектора ускорения Кориолиса. Ташкент, Бюлл. Ср.-Аз. Унив. **12** 1926 15—20+1 табл. нем. рез. 20—20.

Гухман, А. А. и **Кирпичев, М. В** Теория моделей. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 211—260.

Гюнтер, Н. М. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде. Л., Докл. А. Н. (А) **1925** (1926) 152—155.

—— О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде. Л, И. А. Н. (6) **20** 1926 (1927) 1323—1348, 1503—1532, **21** 1927 621—650, 735—756.

—— О нахождении скорости по вихрю в случае жидкости заключенной в замкнутом сосуде. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 12—35 фр. рез. 35—36.

—— О решениях уравнений гидродинамики. Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 217—232.

—— Об основной задаче гидродинамики. Л., И Ф-М. Инст. **2** 1927 1—168+3 тбл.

—— Об уравнениях гидродинамики. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 240—247 фр. рез. 247—247.

Делоне, Н. Б. Горизонтальные гармонические колебания груза подвешенного на растяжимой резиновой нити. [Л.] Ж. Р. Ф.-Х. Общ. Часть физ. **58** 1926 207—209 фр. рез. 209-209.

Динник, А. Н. Устойчивость равновесия и критическая сила. Х., Наука на Укр. **4** 1922 188—190.

Дубошин, Г. Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui depend du temps. М., Р. Астр. Ж. $\mathbf{2}_4$ 1925 5—11, **4** 1927 123—141 русск. рез. 141—142.

Дяченко, В. Рух наелектризованної матеріяльної частинки у магнитному полі. К., Наук. Зап. **2** 1924 78-80.

—— Ueber die quasistationäre Bewegung eines elektrisierten Teilchen und elektrisierten starren Körpers. К., Зап. Ф.-М. відділу $\mathbf{2}_3$ 1927 5—24.

Ерохин, П. М. О некоторых приложениях свойств комплексных величин к механике. Ростов на Дону, И. Донск. Унив. **4** 1924 8—11.

Жуковский, Н. Е. Вихревая теория гребного винта. Статья четвертая. М., Трд. Авиац. расч.-исп. бюро **3** 1918

—— Вихревая теория лобового сопротивления. Статья вторая. М., Трд. Авиац. расч.-исп. бюро **6** 1919.

— Движение волны со скоростью большей скорости звука. Пгр., (Ком. особ. арт. оп) 1920 12+1 тбл.
— О движении воды в открытом канале и о движении газа в трубе. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.) 1922 27+1 тбл.
— Теоретические основы воздухоплавания. Изд. 2-е *под ред.* В. П. Ветчинкина и Н. Г. Ченцова. М., 1925 306.

Извеков, Б. И. Новый вывод теоремы В. Бьеркнеса о циркуляции. М., Ж. геофиз. и метеор. **1** 1924 195—197 англ. рез. 198—198.
— Об условиях динамической возможности движения вязкой жидкости. М., Мат. Сборн. **32** 1924 58—99 нем. рез. 100—100.
— Инженерные сооружения и строительная механика. Сборник статей. Л., 1924 214.

Келлер, Л. В. и **Кочин, Н. Е.** Об условиях устойчивости зональной циркуляции атмосферы вокруг земли. М.—Л., Ж. геофиз. и метеор. **4** 1927 241—260 нем. рез. 261—264.

Кирпичев, В. Л. см. I.

Колосов, Г. В. Заметка о движении твердого тела в несжимаемой жидкости в случаях В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова. Пгр., И. А. Н. (6) **13** 1919 (1920) 711—716.
— О некоторых обобщениях задач Сан-Венана и Клебша в теории упругости. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 194—203 фр. рез. 203—203.
— О некоторых приложениях комплексного преобразования уравнений теории упругости к решению задач о равновесии цилиндрических тел и в частности задачи В. А. Стеклова. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **4** 1927 95—102.
— Ueber einige Anwendungen der Komplexen Vektordiagramme in der Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie. К., Зап. Ф.-М. відділу 2_2 1927 37—49.
— и **Гавра, Д.** Die Anwendung komplexer Grossen auf die Theorie der Torsion. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_3 1925 1—4.

Костицын, В. А. Опыт математической теории гистерезиса М., Мат. Сборн. **32** 1924 192—201 фр. рез. 202—202.

Кочин, Н. Е. К теории атмосферных разрывов. М., Ж. геофиз. и метеор. **2** 1925 233—251 англ. рез. 252—252.
— Теоретическая модель перемещающегося циклона М., Ж. геофиз. и метеор. **1** 1924 47—66 фр. рез. 66—67.

Крутков, Ю. А. Адиабатические инварианты и их применение в теоретической физике. Берлин, Трд. Гос. Опт. Инст. **2** 1922 83—171.
— Упрощенный вывод квантовых условий для Кеплерова движения. М.-Пгр., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Физ. отд. **55** 1923 13—15.

Крылов, А. Н. Очерк истории установления основных начал механики. М., Усп. физ. н. **2** 1921 143—161.
— О продольных колебаниях стержней. М., И. Физ. Инст. при Моск. Научн. Инст. и Инст. Биолог. Физ. при Нар. Ком. Здрав. **1** 1921 301—319.
— О рассчете вибраций корабля производимых работой машины его. Пгр., Ежег. союза морск. инж. **2** 1917 201—228 англ. рез. 265—265.
— О расчете прогрессивной крутизны нарезов. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.) 1921 20+1 тбл.
— Sur le calcul des vibrations d'un navire produites par le travail de son machine. Пгр., И. А. Н. (6) **12** 1918 915—938.

Кузнецов, В. Н. см. IV.

Куренский, М. К. Преобразование дифференциальных уравнений Euler'а в задаче о трех телах на одной прямой и случаи интегрируемости уравнений этой задачи. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 115—118 фр. рез. 118—118.

Лебедев, С. Ф. К теории сдвига и кручения. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **9** 1926 27—48.
— Некоторые замечания к теории кручения S. Vénant. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **9** 1926 21—26.
— Применение теоремы о трех моментах к расчету жестких рам. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **10** 1927 39—56 нем. рез.

Лойцянский, Л. Г. К вопросу о поверке авиационных уклономеров. М., Ж. Прикл. Физ. **2** 1925 23—34.
— О некоторых общих типах конформных трансформаторов движения. Л., И. политехн. Инст. **29** 1925 17—31 нем. рез.
— О некоторых свойствах движения Watt'а. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 143—155 нем. рез. 156—156.
— Об одной формуле в теории конечного вращения твердого тела. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 157—165 фр. рез. 166—166.

—— Sur la transformation conforme, accomplie par une chaine cinématique à deux degrés de liberté. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_2 1924 7—9.

—— Sur une classe de mécanismes à deux degrés de liberté, qui accomplissent la transformation conforme. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_2 1924 48—50.

Локшин, А. Динамические напряжения в канатах переменного сечения. М., Горн. Ж. **103** 1927 414—418.

Лурье, А. И. К теории приближенных прямил. М.—Л., Ж. Прикл. Физ. **2** 1925 169—183.

Ляпунов, А. М. Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Première partie. Л., 1925 224. Deuxième partie. Л., 1927 XI+1+225—437+3.

Ляпунов, А. Н. Об ударе по оси жироскопа. М., И. Физ. Инст. при Моск. Научн. Инст. и Инст. Биолог. Физ. при Нар. Ком. Здрав. **1** 1920 178—184.

Мечников, В. В. Об одном свойстве траектории артиллерийского снаряда. Л., И. В.-Техн. А. [**1**] 1927 110—113.

Мещерский, И. В. Гидродинамическая аналогия прокатки. Пгр., И. политехн. Инст. **28** 1919 (1921) 141—179.

—— Дифференциальные уравнения движения жироскопического вагона однорельсовой железной дороги. М. Н.-техн. Библ. Б. сер. 9 VIII 1922 133—162.

—— Задача из динамики переменных масс. Пгр., И. политехн. Инст. **27** 1918 101—112.

—— Современное положение вопроса о механических единицах. Л., Поверочное дело **1927_1** (**8**) 29—35.

—— Теоретические исследования манометрической трубки. М.-Л., Временник Гл. Пал. мер и вес **1** (**13**) 1925 120—129 фр. рез. 218—218.

Морошкин, А. И. Завихренный слой и закон v^2 поверхностного трения. М., Мат. Сборн. **33** 1926 231—236 фр. рез. 236—236.

Некрасов, А. И. О волнах установившегося вида. Иваново-Вознесенск, (Пгр.) И. политехн. Инст. **3** 1921 52—65.

—— О волне Стокса. Иваново-Вознесенск (Пгр.), И. политехн. Инст. **2** 1919 81—89.

—— О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга. Иваново-Вознесенск, И. политехн. Инст. **5** 1922 3—19.

Некрасов, К. П. Статика твердого тела на основе понятия о равновесии рычага. Пермь, Трд. Мат. Семин. Унив. **1** 1927 20—25, 40—43 фр. рез. 25—25.

Неронов, Н. П. О законе притяжения. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1927 299—312 фр. рез. 310—312.

Николаи, Е. Л. О колебаниях согнутого стержня. Л., Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1926 77—88 нем. рез. 88—88.

—— О поперечных колебаниях участка струны, длина которого равномерно изменяется. Пгр., И. политехн. Инст. **28** 1919 (1921) 273—285.

—— Об устойчивости кругового кольца и круговой арки, сжатых равномерно распределенным давлением. Пгр., И. политехн. Инст. **27** 1918 323—377.

Оглоблин, Н. В. Об одном виде интегралов уравнения Лапласа в связи с задачей о движении эллипсоида в жидкости. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **2** 1921 238—247 англ. рез. 247—247.

—— Anwendung Komplexer Grössen auf die Theorie der Gelenkketten. К., Трд. Ф.-М. відділу 1_2 1923 1—9.

Орлов, М. З приводу обчислення критичних еліпсоїдів обертання в рядку фігур відносної рівноваги рідины. К., Зап. Ф.-М. відділу 2_3 1927 34—37 фр. рез.

—— Нотатка з приводу обчислення елементів критичного трьохвісного елипсоїду. К., Зап. Ф.-М. відділу 2_3 1927 38—38.

Папкович, П. Ф. Применение метода Клебша к нахождению упругой линии при сложном изгибе. Л., Кораблестроитель **1** 1925 38—42.

Петрович, С. Г. Вывод точной формулы для определения стрелы прогиба призматического бруска, закрепленного одним концом и находящегося под действием сосредоточенной нагрузки, приложенной к его другому концу. М., Вестн. Инж. **1924_7** 23—26.

—— К вопросу о наивыгоднейшей форме сопла. Л., И. Р. Гидрол. Инст. **10** 1924 74—75.

—— О вращательном движении продолговатого снаряда около его центра тяжести. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.), 1920 37.

—— О наивыгоднейшей форме трубы, через которую газ должен вытекать из сосуда. Л., И. В.-Техн. А. [**1**] 1927 3—44.

Повало-Швейковский, Н. Un cas de résistance des fluides visqueux au mouvement d'un cops immergé. М., Мат. Сборн. **33** 1926 333—355 русск. рез. 356—356.

Погоржельский, Н. В. Теория расчета свободного стержня на изгиб в плоскости и сжатие. М., 1926 59.

Полубаринова, П. Я. Критические точки линий тока на плоскости. Пгр., Геофиз. Сборн. 4_2 1924 3—26+1 тбл. фр. рез. 27—28.

Поляков, А. П. К теории уравнения движения поезда. М., Бюлл. Н.-Экспер. Инст. пут. сообщ. **9** 1919 281—307.

Радциг, А. А. О применении рядов Фурье к исследованию упругой линии. М., Ж. Прикл. Физ. **1** 1924 57—74.

Рейн, А. О. Замечание к теореме о сложении параллельных сил. Владивосток, Трд. Дальневост. Унив. (5) **4** 1927 1—8 англ. рез.

Рехтман, П. Г. Уравнения движения свободного твердого тела, отнесенные к осям неизменно с телом связанным и произвольно в теле ориентированным. Одесса, Ж. н.-досл. катедр 2_3 1926 15—19 нем. рез. 19—20.

Саткевич, А. А. Анализ плоского струевого потока, как целой механической системы. Л., И. Р. Гидрол. Инст. **11** 1924 63—80 фр. рез. 81—81.

—— Аэродинамика как теоретическая основа авиации. Пгр., 1923 XVI+579.

—— Геометрическое обоснование графических приемов построения аэропланных профилей типа Н. Е. Жуковского. Л., И. политехн. Инст. **30** 1927 405—418.

—— Критическая оценка созданной Л. Прандтлем теории несущего крыла и индуктивного сопротивления. Л., Сборн. Инст. пут. сообщ. **93** 1926 9—25.

—— Метод решения задачи о скоростях вихревого поля. Л., Сборн. Инст. пут. сообщ. **96** 1927 183—200.

—— Натуральные координаты гидродинамики трех измерений и применение их к установившемуся управляемому руслом потоку. М.-Л., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **57** 1925 93—104 фр. рез. 104—104.

—— Натуральные координаты гидродинамики управляемого руслом потока. Л., Зап. Гидрол. Инст. **1** 1926 1—82 фр. рез.

—— О расчетных формулах движения воды в трубах и каналах. Л., Сборн. Инст. пут. сообщ. **95** 1927 173—199 англ. рез.

—— Упрощенная формулировка основных уравнений гидродинамики. Л., Кораблестроитель, 2_5 1926 11—25.

—— Уравнение поперечного взаимодействия струй потока и его применение к анализу форм движения жидкости. Л., И. Р. Гидрол. Инст. **9** 1924 33—46 англ. рез. 47—47.

Свешников, Г. Н. Введение в аналитическую небесную механику. Пгр., И. Р. Астр. Общ. **23** 1919 (1921) 53—110.

Семенов, Н. А. Построение эпюры изгибающих моментов по линии суммы сил. Н.-Новгород, И. Унив. **1** 1926 177—185 нем. рез.

Серебряков, М. Е. Исследование свойств конического крешера. Л., И. В.-Техн. А. [1] 1927 174—196.

Смирнов, Н. А. О струйном движении жидкостей в зазорах. Л., И. Р. Гидрол. Инст. **10** 1924 71—73.

Соколов, Г. Про траекторії матеріяльної точки, що притягается нерухомим центром та підлягае діланню сталої пертурбаційної сили. К., Зап. Ф.-М. відділу 2_3 1927 39—55 фр. рез.

—— Узагальнення теоремы Weierstrass'a-Sundman'a з теорії руху трьох тіл. К., Зап. Ф.-М. відділу 2_3 1927 25—28 фр. рез.

—— Sur la limite inférieure des rayons de convergence des développements des coordonnées dans le problème des trois corps. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_4 1925 12—14.

—— Sur le mouvement d'un point matériel, attiré par un centre fixe et soumis à l'action d'une force perturbatrice constante. К., Зап. Ф.-М. відділу 1_1 1922 (1923) 36—41.

Станкевич, И. В. Преобразование Якоби-Шварцшильда в теории квантов. М.-Л., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **57** 1925 267—281 фр. рез. 281—282.

Стеклов, В. А. К общей теории гравитационного вариометра Этвöша. Пгр., Докл. А. Н. (А) **1922** (1923) 5—6.

Суслов, Г. К. Вывод уравнений движения упругого тела по методу Грина для обобщенных сил проф. Мизеса. Одесса, Ж. н.-досл. катедр 2_3 1926 1—6 фр. рез. 6—6.

—— см. V.

Тамаркин, Я. Д и **Фридман, А. А.** О распространении прерывности в сжимаемой жидкости. М., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **56** 1924 40—58.

Трофимов, В. М. О радиальном колебании полого цилиндра. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.) 1923 47 (литогр.).
— Полное решение задачи о радиальном колебании полого цилиндра. Л., И. В.-Техн. А. [1] 1927 45—87.
Тюлин, В. Н. Теоретические основания работы гироскопического компаса. Л., Торг. Флот **1923** 275—279, **1924** 37—39, 112—115, 236—240.
Упорников, Н. А. Практические приемы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения центра тяжести снаряда. Л., (Ком. особ. арт. оп.) 1926 112 + 3.
Фок, В. А. Приведение плоской задачи теории упругости к интегральному уравнению Фредгольма. М.-Л., Ж. Р. Ф.-Х. Общ., Часть физ. **58** 1926 11—20 фр. рез. 20—20.
Фридман, А. А. К вопросу о доказательстве правила параллелограмма сил. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **1** 1918 (1919) 33—42 нем. рез. 43—43.
— О вертикальных течениях в атмосфере. Пермь, Ж. Ф.-М. Общ. **2** 1919 67—104.
— О движении сжимаемой жидкости. Пгр., И. Р. Гидрол. Инст. **7** 1923 21—27 нем. рез. 27—28.
— О вихрях в жидкости с меняющейся температурой. Х., Сообщ. Мат. Общ. (2) **15** 1917 173—176.
— Об атмосферных вихрях с вертикальной и горизонтальной осью. Пгр., И. Гл. Физ. Обс. 3 1921.
— Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. Пгр., 1922 1+266 (литогр.).
— Théorie du mouvement d'un fluide compressible et ses applications aux mouvements de l'atmosphère. Л., Геофиз. Сборн. 5_1 1927 16—56.
— и **Извеков, Б. И.** Sur le mouvement d'un fluide parfait compressible. Л., И. А. Н. (6) **19** 1925 351—362.
Чаплыгин, С. А. Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда. М., Бюлл. Н.-экспер. Инст. пут. сообщ. **9** 1919 308—334.
— Замечания по поводу способа вычисления силы сопротивления полету снарядов с различными очертаниями головной части. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.). 1919 15 + 1 тбл.
— Интегрирование основных уравнений балистики при законе сопротивления, данном Лоренцом. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.), 1920 13+1 тбл.
— О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло. М., Трд. ЦАГИ **19** 1926 67 англ. рез.
— и **Лаврентьев, А. Л.** Об одном случае плоского движения несжимаемой жидкости с образованием свободных границ. [М.], Геофиз. Бюлл. **14** 1926 54—66 нем. рез. 66—67.
Черняев, М. П. О задаче Бертрана, относящейся к центральной силе в сопротивляющейся среде. Ростов на Дону, Трд. С.-Кавк. Асс. н.-иссл. Инст. **7**, Инст. Мат. и Естеств. при С.-Кавк. Гос. Унив. **1** 1926 12 фр. рез.
Четаев, Н. Г. О задаче принципа Гюйгенса. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **25** 1925 (1926) 20—30 фр. рез. 30—30.
— Об одной задаче Стеклова. Л., Докл. А. Н. (А) **1926** 209—210.
— Об устойчивых фигурах равновесия некоторой однородной массы вращающейся жидкости под действием сил лучистого сжатия к центру тяжести. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **1** 1926 49—94 фр. рез. 94—94.
Шапошников, К. О принципе подобия. М., Усп. Физ. наук 1_2 1918.
Швейковский, Н. Т. К вопросу о распределении скоростей в потоке воздуха, вытекающего под давлением из узкого отверстия [М.], Геофиз. Бюлл. **14** 1926 33—37.
Шмидт, Ф. Г. Приложение метода конформного отображения к изучению движеиия прямолинейного вихря в ограниченной жидкости. Саратов, Уч. Зап. Унив. 2_2 1924 96—110.
Штаерман, Э. Про разрахунок циліндричного резервуара із стінкою змінної грубини. К., Трд. Ф.-М. відділу 5_5 1927 399—404 нем. рез. 410—410.
— Формули для приближного вирахування моментів інерції і статичних моментів плоских фігур. К., Наук. Зап. **2** 1924 14—40 нем. рез. 41—42.
Щипанов, Г. В. Расчет авиационных уклономеров маятникового типа. М., Ж. Прикл. Физ. **2** 1925 5—21.
Ягн, Ю. И. Круг инерции. Л., И. политехн. Инст. **29** 1925 111—118 фр. рез.
Muschelisvili, N. Sur l'équilibre des corps élastiques soumis á l'action de la chaleur. Tiflis, Bull. de l'Univ. **3** 1923 17—26.

VII. Теория относительности.

Гринберг, Г. А. см. VI.

Желеховский, А. К вопросу о физических основаниях принципа относительности. Х., Наук. Зап. [2] 1926 133—144 фр. рез.

Кордыш, Л. La théorie de relativité et la théorie des quanta. К., Зап. Ф.-М. відділу **1**$_2$ 1924 75—80.

Котельников, А. П. см. V.

Парфентьев, Н. Н. Проблема пространства в современном освещении. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **24**$_1$ 1924 41—56 фр. рез. 56—56.

Фредерикс, В. К. О силах центробежной и Кориолиса в общем принципе относительности. М.-Л., Ж. Р. Ф.-Х. Общ. Часть физ. **57** 1925 475—482 нем. рез. 483—483.

—— и **Фридман, А. А.** Основы теории относительности. Вып. I. Тензориальное исчисление. Л., 1924 167.

Фридман, А. А. Мир как пространство и время. Пб., 1923 130 + 1.

Штрум, Л. Про швидкості, більші од швидкости світла, у спеціяльній теорії відносности. К., Наук. Зап. **2** 1924 81—88 нем. рез.

Список сокращений журналов.

Арх. физ. н.	Архив Физических Наук. Москва.
Arch. Sc. Phys.	Archives des Sciences Physiques. Moscou.
Бюлл. н.-экспер. Инст. пут. сообщ.	Бюллетень Научно-Экспериментального Института Путей Сообщения. Москва.
Бюлл. 1 Ср.-Аз. Унив.	Бюллетень 1 Средне-Азиатского Государственного Университета. Ташкент. [До **6**].
Бюлл. Р. Гидрол. Инст.	Бюллетень Российского Гидрологического Института. Петроград.
Бюлл. Ср.-Аз. Унив.	Бюллетень Средне-Азиатского Государственного Университета. Ташкент. [с **7**].
Bull de l'Univ.	Bulletin de l'Univessité de Tiflis.
Вестн. Всероссийск. Астр. Союза.	Вестник Всероссийского Астрономического Союза. Петроград.
Вестн. Инж.	Вестник Инженеров. Москва.
Вестн. Комм. Акад.	Вестник Коммунистической Академии. Москва.
Вестн. Статист.	Вестник Статистики. Москва.
Военная Мысль.	Военная Мысль. Орган Военного Факультета Туркестанского Государственного Университета Ташкент.
Вопр. Физ.	Вопросы Физики. Петроград.
Временник Гл. Пал. мер и вес.	Временник Главной Палаты Мер и Весов. Москва-Ленинград.
Геофиз. Бюлл.	Геофизический Бюллетень. Государственный Научно-Исследовательский Геофизический Институт. [Москва].
Геофиз. Сборн.	Геофизический Сборник. Петроград [до **4**$_2$], Ленинград [с **4**$_3$].
Горн. Ж.	Горный Журнал. Москва.
Докл. А. Н. (А).	Доклады Российской Академии Наук. А. Петроград [**1922, 1923**]. Ленинград [до сентября 1925]; Доклады Академии Наук СССР. А. Ленинград [с октября 1925].
Ежег. союза морск. инж.	Ежегодник Союза Морских Инженеров. Петроград.
Ж. геофиз. и метеор.	Журнал Геофизики и Метеорологии. Москва [до **2**], Москва-Ленинград [с **3**].

Ж. н.-досл. катедр.	Журнал науково-дослідчих катедр м. Одеси. [с **2**].
Ж. н.-иссл. кафедр.	Журнал научно-исследовательских кафедр в Одессе. [**1**, со **2** заглавие на украинском языке].
Ж. Прикл. Физ.	Журнал Прикладной Физики. Москва [**1**], Москва Ленинград [со **2**].
Ж. Р. Ф.-Х. Общ. Часть физ. (или Физ. отдел).	Журнал Русского Физико-Химического Общества. Часть физическая. Москва-Петроград, Москва, Москва-Ленинград.
Ж. Ф.-М. Общ.	Журнал Ленинградского Физико-Математического Общества. Ленинград.
Ж. Ф.-М. Общ.	Журнал Физико-Математического Общества при Пермском Государственном Унивеситете. Пермь.
Зап. Гидрол. Инст.	Записки Государственного Гидрологического Института. Ленинград.
Зап. Горн. Инст.	Записки Горного Института. Ленинград.
Зап. інст. нар. осв.	Записки Одеського інституту народньої освіти. Одесса.
Зап. Мат. каб. Крымск. Унив.	Записки Математического Кабинета Крымского Университета. Симферополь. [**2** как продолжение Записок Математического Кабинета Таврического Университета].
Зап. Мат. каб. Тавр. Унив.	Записки Математического Кабинета Таврического Университета. Симферополь. [Только **1**].
Зап. по гидрогр.	Записки по Гидрографии. Петроград.
Зап. Ф.-М. відділу.	Записки Фізично-Математичного відділу.Українська Академія Наук. Київ.
И. А. Н.	Известия Российской Академии Наук. Петроград [до **15**], Ленинград [с **15** до **18**]. Известия Академии Наук СССР. Ленинград. [с **19**].
И. В.-Техн. А.	Известия Военно-Технической Академии. Ленинград.
И. Гл. Физ. Обс.	Известия Главной Физической Обсерватории. Петроград.
И. Донск. политехн. Инст.	Известия Донского Политехнического Института в Новочеркасске.
И. Донск. Унив.	Известия Донского Государственного Университета. Ростов на Дону. [До **7**, с **8** Известия Северо-Кавказского Государственного Университета].
И. Крымск. пед. Инст.	Известия Крымского Педагогического Института имени М. В. Фрунзе. Симферополь.
И. политехн. Инст.	Известия Иваново-Вознесенского Политехнического Института. Иваново-Вознесенск. [**1**, **2**, **3** были изданы в Петрограде].
И. политехн. Инст.	Известия первого Петроградского Политехнического Института. Петроград [**28**], Известия Ленинградского Политехнического Института имени М. И. Калинина. Ленинград. [Начиная с **29**].
И. пост. Ц. Сейсм. К.	Известия Постоянной Центральной Сейсмической Комиссии. Ленинград.
И. Р. Астр. Общ.	Известия Русского Астрономического Общества. Петроград [до **24**], Ленинград [с **25**].
И. Р. Гидрол. Инст.	Известия Российского Гидрологического Института. Ленинград. [До **15**, с **16** Известия Государственного Гидрологического Института].
И. С.-Кавк. Унив.	Известия Северо-Кавказского Государственного Университета. Ростов на Дону. [с **8**].
И. Унив.	Известия Нижегородского Государственного Университета.
И. Унив. Ф.-М. фак.	Известия Саратовского Университета. Саратов. [**1918**, далее Ученые Записки Саратовского Государственного Университета].

И. Уральск. политехн. Инст.	Известия Уральского Политехнического Института. Свердловск. [С 4, как продолжение Известий Уральского Государственного Университета].
И. Уральск. Унив.	Известия Уральского Государственного Университета. Екатеринбург [1 и 2], Свердловск. [3].
И. Ф.-М. Инст.	Известия Физико-Математического Института имени В. А. Стеклова. Ленинград. [Как продолжение Известий Физико-Математического Института Российской Академии Наук].
И. Ф.-М. Общ.	Известия Физико-Математического Общества при Казанском Университете. Казань.
И. Физ. Инст. при Моск. Науч. Инст. Биолог. Физ. при Нар. Ком. Здрав.	Известия Физического Института при Московском Научном Институте и Института Биологической Физики при Народном Комиссариате Здравоохранения. [1, 2, с 3 Известия Института Физики и Биофизики].
И. Электр. Инст.	Известия Электротехнического Института. Петроград.
Кораблестроитель.	Кораблестроитель. Орган научного кружка кораблестроителей Ленинградского Политехнического Института имени М. И. Калинина. Ленинград.
Мат. Сборн.	Математический Сборник. Москва.
Н.-педагог. Сборн.	Научно-педагогический Сборник. (Восточный Педагогический Институт в Казани).
Наук. Зап.	Наукові Записки. Орган Київських науководослідчих катедр. Київ.
Наук. Зап.	Наукові Записки науково-дослідчих математичних катедр України. Харків. [Продолженне Ученых Записок научно-исследовательских Кафедр Украины, Отдел математический].
Наука на Укр.	Наука на Украине. Орган Научного Комитета Укрглавпрофобра. Харьков.
Научн. Раб.	Научный Работник. Москва.
Поверочное дело.	Поверочное дело. Ленинград.
Працы Беларуск. Дзярж. Унив.	Працы Беларускага Дзяржаунага Унівэрсытэту у Менску.
Р. Астр. Ж.	Русский Астрономический Журнал. Москва.
Сборн. Инст. пут. сообщ.	Сборник Ленинградского Института Инженеров Путей Сообщения. Ленинград.
Сообщ. Мат. Общ.	Сообщения Харьковского Математического Общества. [2-я серия заканчивается томом 16 1—2, 3-ю серию составляют Учен. Зап. научно-исслед. кафедр Украины и Наукові Записки науково-досл. катедр 1, 2, 3, 4-я серия началась в 1927 г.].
Техн.-Эконом. Вестн.	Технико-Экономический Вестник. Москва.
Торг. Флот.	Торговый Флот. Ленинград.
Трд. Авиац. расч.-исп. бюро.	Труды Авиационного Расчетно-Испытательного Бюро при Высшем Московском Техническом Училище. Москва.
Трд. Гос Опт. Инст.	Труды Государственного Оптического Института. Изд. Бюро Иностр. Науки и Техники. Берлин.
Трд. Дальневост. Унив.	Труды Государственного Дальневосточного Университета. Владивосток.
Трд. Мат. Семин. Унив.	Труды Математического Семинария при Пермском Государственном Университете. Пермь.
Трд. С.-Кавк. Асс. н.-иссл. Инст... Инст. Мат. и Естеств. при С.-Кавк. Гос. Унив.	Труды Северо-Кавказской Ассоциация научно-исследовательских Институтов... Институт Математики и Естествознания при Северо-Кавказском Государственном Университете. Ростов на Дону.

Трд. С.-Х. Инст.	Труды Ставропольского Сельско-Хозяйственного Института. Ставрополь.
Трд. Турк. Гос. Унив.	Труды Туркестанского Государственного Университета. Ташкент.
Трд. Турк. н. Общ.	Труды Туркестанского Научного Общества при Средне-Азиатском Государственном Университете. Ташкент.
Трд. Унив.	Труды Воронежского Государственного Университета. Воронеж.
Трд. Ф.-М. відділу.	Труды Фізично-Математичного відділу. Українська Академія Наук. Київ.
Трд. ЦАГИ.	Труды Центрального Аэро - Гидродинамического Института. Москва.
Усп. физ. наук.	Успехи Физических Наук. Москва и Москва-Ленинград.
Уч. Зап. н.-иссл. кафедр.	Ученые записки научно-исследовательских кафедр Украины. Отдел математический. Харьков. [**1**, со **2** — Наукові Записки...].
Уч. Зап. Унив.	Ученые Записки Казанского государственного Университета имени В. И. Ульянова-Ленина. Казань.
Уч. Зап. Унив.	Ученые Записки Саратовского Государственного имени Н. Г. Чернышевского Университета. Саратов.
Электричество.	Электричество. Ленинград-Москва.

Во время печатания этого списка составителю удалось достать ряд бывших ранее для него недоступными изданий, в которых имеются математические работы. Данные об этих работах войдут в дополнительный список, который будет помещен в ближайшем выпуске Журнала.

Предвидя возможность и других пропусков и ошибок, составитель просит не отказать сообщать ему о них.

Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables *).

Par Michel Akimoff.

L'objet du présent travail est l'étude des fonctions qui se rencontrent d'abord sous forme d'intégrale définie

$$(1) \qquad I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\,(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_m \sin mv - \ldots)\, dv,$$

comme les coefficients du développement en série

$$(2) \qquad v = \zeta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} I_k(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) \sin k\zeta$$

de la solution de l'équation

$$(3) \qquad v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots - e_m \sin mv - \ldots = \zeta \text{ **)}.$$

Dans le cas particulier d'une variable ($m = 1$) on a l'équation classique de Kepler

$$v - e_1 \sin v = \zeta$$

et sa solution donnée par Bessel ***)

$$v = \zeta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} I_k(ke_1) \sin k\zeta,$$

où

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\,(kv - x \sin v)\, dv$$

est la fonction bien connue de Bessel.

*) Ce mémoire, sauf les remarques de l'auteur mises entre les crochets, est une traduction exacte des §§ 5—7, 10, 11, 16, 17, 20—23, 29 du travail lithographié plus étendu de l'auteur „Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables et leurs applications en mécanique" (Thèse, Petrograd, 1922), publié en russe. *Remarque de la Rédaction.*

**) Le nombre des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ou $e_1, e_2, \ldots, e_m$ avec certaines restrictions pour elles peut être illimité.

***) Bessel, „Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen..." (Abhandlungen der Berliner Akademie, 1824, p. 21).

Par analogie avee ce cas, nous appelons l'équation (3) l'équation de Kepler généralisée et la fonction I_k $(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$—la fonction de Bessel de plusieurs variables.

A l'équation (3) conduisent plusieurs problèmes de mécanique.

De même que l'équation de Kepler elle se rencontre d'abord dans la mécanique céleste.

Tel est le développement de l'équation du centre $v - \zeta$ suivant les sinus des multiples de l'anomalie vraie v, où ζ est l'anomalie moyenne d'une planète.

Le problème de l'inversion de cette série, c'est-à-dire le développement de l'équation du centre suivant les sinus des multiples de l'anomalie moyenne ζ a été considéré par Clairaut et d'Alembert et puis par plusieurs autres géométres *).

Schlömilch le premier en 1849 dans la monographie „Die allgemeine Umkehrung gegebener Functionen" a obtenu la solution de l'équation (3) sous forme de la série (2) et a représenté les coefficients de cette série sous forme des intégrales définies (1).

Puis Weierstrass en 1866 dans le mémoire „Über eine Gattung reell periodischer Functionen" **) a lié avec le problème de l'inversion de la série (3) celui de l'inversion de l'intégrale

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{(1-x^2)\,.\,F(x)}} = t,$$

qui se rencontre dans un grand nombre des problèmes de mécanique ***).

*) Voir l'article de H. Burkhardt „Trigonometrische Reihen und Integrale" № 19, dans l'Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, B. 2, p. 944.

**) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, p. 97 (Werke, B. 2, p. 1).

***) Ici se rapportent tous les problèmes, où l'équation des forces vives avec les autres équations du mouvement conduit à l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1 - x^2)\ F\ (x),$$

où x est une des coordonnées et t est le temps. Tels sont: le problème du mouvement du point sous l'action de la force centrale à la condition d'existence de la fonction des forces; quelques cas du mouvement du point sur la surface (en particulier — les pendules); divers cas du mouvement d'un corps autour d'un point fixe etc. Voir le mémoire de M. Staude „Über bedingt periodische Functionen... und Anwendungen derselben auf Mechanik." (Journal für die reine und angew. Mathematik, B. 105, 1889, p. 298). [Voir encore P. Appell, Traité de Mécanique rationnelle, t. 1, 1926, p. 340—347, 427. — I. Horn, Zeitschrift für Mathematik und Physik, B. 49, 1903, p. 246. — Charlier, Mechanik des Himmels, B. 1, 1902, p. 96. Les indications bibliographiques plus complètes, ainsi que les diverses applications des transcendantes de Bessel généralisées aux problèmes de mécanique rationnelle et de mécanique céleste, ont été données dans ma Thèse lithographiée, 1922, Ch. V, dont une nouvelle édition va paraître prochaînement dans les Annales de l'Institut des Mines à Leningrad, t. 72, 1928. Voir mes Notes aux Comptes rendus, t. 165, 1917, p. 1100; t. 179, 1924, p. 435; t. 183, 1926, p. 333; un arcticle aux Annales du Laboratoire mathématique de l'Université de Crimée, t. 3, 1921, p. 64 et le rapport au Congrès des mathématiciens russes à Moscou (le 3 mai 1927), où a été développée avec plus de détails la théorie des transcendantes de Bessel à deux variables].

Ici $F(x)$ est la fonction continue et positive de l'argument réel x qui ne devient pas une seule fois zéro ou infini dans tout l'intervalle de -1 à $+1$, y compris ses limites. Le radical a le signe $+$ ou $-$ selon que x croît ou décroît, et

$$-1 \leqq x \leqq 1, \quad -1 \leqq x_0 \leqq 1.$$

L'équation (4) définit x comme fonction périodique de t avec la période *)

$$T = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)F(x)}}.$$

En posant $x = \mp \cos v$ et en développant la fonction $\frac{1}{\sqrt{F(\mp \cos v)}}$ en série trigonométrique, Weierstrass a ramené l'équation (4) à la forme (3), où ζ est une fonction linéaire de t, et a établi le développement en série

$$(5) \qquad \mp x = \cos v = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\zeta,$$

où

$$A_k = \frac{1}{k\pi}\left\{\int_0^\pi \cos[(k-1)v - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots]\, dv - \right.$$

$$\left. - \int_0^\pi \cos[(k+1)v - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots]\, dv\right\}.$$

Les formules de Weierstrass contiennent aussi le développement plus général

$$(6) \quad \cos pv = -\frac{pe_p}{2} +$$

$$+ p\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos[(k-p)v - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots]\, dv - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos[(k+p)v - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots]\, dv\right\} \cos k\zeta$$

et le développement de la fonction arbitraire

$$G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} G_p \cos pv$$

en série

$$(7) \qquad G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\zeta,$$

*) Abel. „Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi(x)$ déterminée par l'équation $f(y)\, dy - dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_m-y)} = 0, \ldots$" (Oeuvres, t. 2, 1881, p. 40).

où B_k se compose des intégrales

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos\left[(k \pm p)\,v - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots\right] dv,\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Il faut, cependant, remarquer qu'en introduisant les intégrales

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos\,(kv - x_1 \sin v - x_2 \sin 2v - \ldots - x_m \sin mv - \ldots)\, dv,$$

ni Schlömilch, ni Weierstrass ne les considèrent comme les fonctions des arguments $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ Au contraire, en mentionnant à la page 6 *) de son mémoire que les formules (5), (6) et (7) renferment les intégrales de Bessel et Hansen **), Weierstras dit: „In den meisen Fällen aber, selbst wenn die Function $F(x)$ eine einfache Form hat, sind die Coefficienten A_k, B_k sehr complicirt zusammengesetzte Grössen, deren direkte Entwicklung aus den aufgestellten Ausdrücken schwierig erscheint".

Ce n'est que M. P. Appell ***) en 1915 a proposé de considérer les intégrales (1) comme une généralisation de la fonction classique de Bessel $I_k(x)$ pour le cas de plusieurs variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ****). M. I. Pérès *****) a indiqué ensuite pour les fonctions $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ les relations

$$\frac{\partial I_k}{\partial x_m} = \frac{1}{2}(I_{k-m} - I_{k+m}),\ m = 1,\ 2, \ldots, \tag{8}$$

$$kI_k = \frac{1}{2}\left[x_1(I_{k-1} + I_{k+1}) + 2x_2(I_{k-2} + I_{k+2}) + \ldots + \right.$$
$$\left. + mx_m(I_{k-m} + I_{k+m}) + \ldots\right], \tag{9}$$

qui conduisent, dans le cas d'un nombre limité de n variables, au système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre ******),

*) Werke, B. 2.

**) Comme un cas particulier pour $e_2 = e_3 = \ldots = e_m = \ldots = 0$.

***) Comptes rendus, t. 160, 1915, p. 419. [M. P. Appell fait une première approximation avant de l'inversion de l'intégrale (4), en représentant $\frac{1}{\sqrt{F(x)}}$ dans l'intervalle -1, $+1$ par un polynome].

****) Une généralisation des fonctions de Bessel pour le cas de plusieurs variables se rencontre aussi dans le mémoire de M. Whittaker (Mathematische Annalen, B. 57, 1903, p. 351). Cependant les fonctions introduites par cet auteur ne présentent pas une si profonde analogie avec les fonctions ordinaires de Bessel comme les fonctions considérées dans le travail présent.

*****) Comptes rendus, t. 161, 1915, p. 169.

******) [Nous désignons le système de M. Pérès dans la suite par (S). Celui-ci est étudié avec tous les détails dans notre Thèse lithographiée (1922), p. 43—54. Voir encore B. Jekhowsky, Comptes rendus t. 170, 1920, p. 1042].

admettant $2n$ solutions linéairement indépendantes, dont l'une est la fonction $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elle-même, et équivalent pour cette fonction à l'équation de Bessel pour $I_k(x)$.

Enfin M. B. Jekhowsky *) a donné pour la fonction $I_k(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ l'expression sous forme de série infinie

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{k-np}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) I_p(x_n) \tag{10}$$

§ 1. Solution de l'équation (3) sous forme de série trigonométrique. En considérant l'équation (3) nous supposons que pour toutes les variations de ζ et v la dérivée $\frac{d\zeta}{dv}$ conserve le signe ne devenant pas zéro **). Cette supposition se vérifie dans tous les cas, comme cela a lieu dans les exemples cités, quand l'équation (3) s'obtient de l'intégrale (4).

Sous cette condition la solution de l'équation (3) sera unique et si l'on choisit un nombre entier p de telle manière que

$$p\pi < \zeta < (p+1)\pi,$$

on se convaincra, en substituant dans l'équation (3) ces deux valeurs multiples de π au lieu de v, de l'existence de racine de l'équation (3) qui est contenue entre ces deux valeurs ***).

Comme une fonction périodique impaire de ζ on peut développer la différence $v - \zeta$ en série ****)

$$v - \zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\zeta, \tag{11}$$

où

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (v - \zeta) \sin k\zeta \, d\zeta.$$

---

*) Comptes rendus, t. 162, 1916, p. 318. Bulletin des Sciences mathématiques, t. 41, 1917, p. 58. [En 1927 a paru la Thèse (Paris) de M. B. Jekhowsky „Étude sur les transcendantes Fourier-Bessel à plusieurs variables" dont la seconde partie (p 17—31) est une traduction textuelle (faite avec quelques erreurs et avec la restriction $n = 2$, mais sans citer ma Thèse) des §§ 13 (renvoi à la page 51 et 52), 16, 17, 20—24 et 29 (voir les §§ 6—12 de ce mémoire) de ma Thèse lithographiée (1922) qui a été bien connue de M. B. Jekhowsky].

**) Pour cela il suffit, par exemple, que les variables $e_1, e_2, \ldots e_m, \ldots$ satisfassent la condition

$$|e_1| + |2e_2| + \ldots + |me_m| + \ldots < 1.$$

***) P. Appell. Comptes rendus, t. 160, 1915, p. 419.

****) [En vertu de l'inégalité $|a_k| = \frac{2|I_k|}{k} \leqslant I_k^2 + \frac{1}{k^2}$ cette série converge absolument et uniformément pour toutes les valeurs réelles de ζ, car les séries $\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergent].

En intégrant par parties et en remarquant qu'en vertu de l'équation (3) $v-\zeta=0$ pour $\zeta=0$ et $\zeta=\pi$, on trouve

$$a_k=\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos k\zeta\, dv,$$

c'est-à-dire

$$a_k=\frac{2}{k} I_k(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots),$$

où

(1) $$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots-x_m\sin mv-\ldots)\, dv.$$

§ 2. D'autres représentations de la fonction $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$. Considérons encore l'intégrale

$$I_k'(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots-x_m\sin mv-\ldots)\, dv.$$

En remplaçant dans $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ et $I_k'(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ v par $2\pi-v$, on trouve

$$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \cos(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots-x_m\sin mv-\ldots)\, dv,$$

$$-I_k'(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots-x_m\sin mv-\ldots)\, dv.$$

Par suite

$$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots-x_m\sin mv-\ldots)\, dv,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots-x_m\sin mv-\ldots)\, dv.$$

D'ici on conclut

$$I_k(x_1, x_2, \ldots)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots)-$$

$$-i\sin(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots)]\, dv.$$

c'est-à-dire

(12) $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\,(x_1 \sin v + x_2 \sin 2v + \ldots + x_m \sin mv + \ldots - kv)}\, dv.$$

Posons ici $e^{iv} = t$, alors l'intégrale (12) entre les limites réelles se transforme en intégrale curviligne.

(13) $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\frac{x_1}{2}(t - t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2 - t^{-2}) + \ldots + \frac{x_m}{2}(t^m - t^{-m}) + \ldots}\, t^{-k-1}\, dt,$$

prise suivant la circonférence de rayon un avec le centre au point $t = 0$.

§ 3. Fonction génératrice*) pour $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ et développement de la fonction $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ en série multiple suivant les produits des fonctions $I_{k_m}(x_m)$, $m = 1, 2, \ldots$**). De la dernière expression (13) on voit que la fonction $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ se définit comme le coefficient du développement suivant en série de Laurent ***)

(14) $$e^{\frac{x_1}{2}(t - t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2 - t^{-2}) + \ldots + \frac{x_m}{2}(t^m - t^{-m}) + \ldots} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)\, t^k$$

qui a lieu pour toutes les valeurs finies de t ****), sauf $t = 0$.

Pour $m = 1$ on a le développement connu *****)

$$e^{\frac{x_1}{2}(t - t^{-1})} = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} I_{k_1}(x_1)\, t^{k_1}.$$

En remplaçant ici x_1 par x_m et t par t^m, on déduit

(15) $$e^{\frac{x_m}{2}(t^m - t^{-m})} = \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} I_{k_m}(x_m)\, t^{mk_m},$$

*) M. Akimoff. Comptes rendus, t. 163, 1916, p. 26.

**) M. Akimoff. Loc. cit.

***) Voir, par exemple, E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 1920, p. 100, 101.

****) [et avec la restriction convenable pour t, x_1, x_2,..., qui est toujours remplie quand l'équation (3) s'obtient de l'intégrale (4), si le nombre de ces variables est infiniment grand].

*****) [Hansen. „Ermittelung der absoluten Störungen..., 1." (Schriften der Sternwarte Seeberg (Gotha), 1843, p. 106)]. Schlömilch. Zeitschrift für Mathematik und Physik, B. 2, 1857, p. 137.

d'où, en posant $m = 1, 2, \ldots$ et en multipliant terme à terme les séries obtenues*), qui sont absolument convergentes, on arrive à l'égalité

$$e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \ldots + \frac{x_m}{2}(t^m - t^{-m}) + \ldots} =$$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} \cdots I_{k_1}(x_1) I_{k_2}(x_2) \ldots I_{k_m}(x_m) \ldots t^{k_1+2k_2+\ldots+mk_m+\ldots}$$

En comparant cette égalité avec (14), on conclut
$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) =$

$$= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} \cdots I_{k_1}(x_1) I_{k_2}(x_2) \ldots I_{k_m}(x_m) \ldots,$$

où $k_1 + 2k_2 + \ldots + mk_m + \ldots = k$. c'est-à-dire

(16) $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) =$

$$= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} \cdots I_{k-2k_2-\ldots-mk_m-\ldots}(x_1) I_{k_2}(x_2) \ldots I_{k_m}(x_m) \ldots$$

On obtient le développement de la fonction $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ en série multiple de produits des fonctions de Bessel ordinaires **).

Remarque. En posant dans (14) $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1} = x_{m+1} = = \ldots = 0$, on trouve

$$(17) \qquad e^{\frac{x_m}{2}(t^m - t^{-m})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(0, 0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots) t^k,$$

où

$$I_k(0, 0 \ldots, 0, x_m, 0, \ldots) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kv - x_m \sin mv)\, dv.$$

En comparant (15) et (17), on conclut

$$I_k(0, 0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots) = I_{k_m}(x_m)$$

pour $k = mk_m$, c'est-à-dire pour k multiple de m, et

$$I_k(0, 0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots) = 0$$

dans tous les autres cas.

---

*) Jordan. Cours d'analyse, t. 1, 1909, §§ 315, 316.

**) La possibilité du développement suivant les fonctions de Bessel ordinaires des coefficients A_k et B_k, qui se rencontrent dans la méthode de Weierstrass, est prévue par plusieurs auteurs, par exemple par M. M. Charlier (Mechanik des Himmels, t. 1, 1902, p. 34), Bohlin (Acta mathematica, t. 10, 1887, p. 130), mais il n'est indiqué explicitement nulle part. [Dans la Thèse lithographiée (1922) de l'auteur (p. 27, 28 et 92) sont indiquées d'autres représentations des fonctions $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$—sous forme de séries de polynomes ou de produits de deux polynomes. Voir Comptes rendus, t. 165, 1917, p. 23 et t. 185, 1927, p. 409].

On vérifie aisément, en changeant dans (14) t, x_2, x_4, ... respectivement en $-\frac{1}{t}$, $-x_2$, $-x_4$, ... et en comparant le développement obtenu avec le précédent (14), la formule

(18) $$I_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = (-1)^k I_k(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{m-1} x_m, \ldots).$$

En se servant de cette formule on peut dans l'étude des fonctions $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ se borner au cas de la valeur entière et positive de k. En changeant dans (14) t en $-\frac{1}{t}$ on arrive facilement à la nouvelle formule

(19) $$I_{-k}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) = I_k(-x_1, -x_2, \ldots, -x_m, \ldots).$$

En comparant (18) et (19) on conclut encore

(20) $$I_k(-x_1, x_2, \ldots, (-1)^m x_m, \ldots) = (-1)^k I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots).$$

Les formules (18) et (19) représentent l'extension *) à $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ des formules connues

$$I_{-k}(x) = (-1)^k I_k(x), \quad I_{-k}(x) = I_k(-x)$$

pour $I_k(x)$.

On a encore immédiatement de (14)

$$I_{2r}(0, x_2, 0, x_4, \ldots) = I_r(x_2, x_4, \ldots)$$

et

$$I_{2r+1}(0, x_2, 0, x_4, \ldots) = 0$$

§ 4. Développement d'une fonction périodique de v en série trigonométrique suivant les sinus et cosinus des multiples de ζ. Considérons maintenant les fonctions $\cos pv$ et $\sin pv$, où p est un nombre entier quelconque.

Comme une fonction périodique paire de ζ on peut développer $\cos pv$ en série

(21) $$\cos pv = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\zeta,$$

où

$$b_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos pv \, d\zeta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos pv \, (1 - e_1 \cos v - 2e_2 \cos 2v \quad \ldots) \, dv = -pe_p$$

ou $b_0 = 2$ pour $p = 0$.

---

*) Pour le cas $m = 2$ voir encore B. Jekhowsky, Comptes rendus t. 172, 1921, p. 1331.

Ensuite

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos pv \cos k\zeta \, d\zeta.$$

Intégration par parties donne

$$b_k = \frac{2p}{\pi k} \int_0^\pi \sin pv \sin k\zeta \, dv =$$

$$= \frac{2p}{\pi k} \int_0^\pi \sin pv \sin k (v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots) \, dv,$$

ou bien

$$b_k = \frac{p}{\pi k} \int_0^\pi \cos (kv - pv - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots) \, dv -$$

$$- \frac{p}{\pi k} \int_0^\pi \cos (kv + pv - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots) \, dv,$$

ou enfin

$$(22) \quad b_k = \frac{p}{k} [I_{k-p} (ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) -$$

$$- I_{k+p} (ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)].$$

Comme une fonction périodique impaire de ζ on peut développer $\sin pv$ en série

$$(23) \qquad \sin pv = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\zeta ,$$

où

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin pv \sin k\zeta \, d\zeta.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$c_k = \frac{2p}{\pi k} \int_0^\pi \cos pv \cos k\zeta \, dv =$$

$$= \frac{2p}{\pi k} \int_0^\pi \cos pv \cos k (v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots) \, dv$$

ou

$$c_k = \frac{p}{\pi k} \int_0^\pi \cos (kv - pv - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots) \, dv +$$

$$+ \frac{p}{\pi k} \int_0^\pi \cos (kv + pv - ke_1 \sin v - ke_2 \sin 2v - \ldots) \, dv,$$

ou enfin *)

$$(24)\qquad c_k = \frac{p}{k}\,[I_{k-p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) + I_{k+p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)].$$

On peut présenter les égalités (21), (22) et (23), (24), c'est-à-dire

$$\cos pv = -\frac{pe_p}{2} + p\sum_{k=1}^{\infty}[I_{k-p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) - $$
$$- I_{k+p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)]\,\frac{\cos k\zeta}{k},$$

$$\sin pv = \qquad p\sum_{k=1}^{\infty}[I_{k-p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots) +$$
$$+ I_{k+p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)]\,\frac{\sin k\zeta}{k},$$

en vertu de la formule (19)

$$I_{-k-p}(-ke_1, -ke_2, \ldots, -ke_m, \ldots) = I_{k+p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots),$$

sous forme

$$\cos pv = -\frac{pe_p}{2} + p\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k-p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\,\frac{\cos k\zeta}{k},$$

$$\sin pv = \qquad p\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k-p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\,\frac{\sin k\zeta}{k},$$

ou

$$(25)\qquad e^{\pm ipv} = -\frac{pe_p}{2} \pm p\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k\mp p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots)\,\frac{e^{ik\zeta}}{k},$$

où k prend toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, sauf $k = 0$, et il faut remplacer le terme $-\frac{pe_p}{2}$ par 1 pour $p = 0$.

En vertu de cette égalité on peut représenter **) toute la fonction périodique

$$F(v) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p e^{ipv}$$

de v sous forme

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\zeta},$$

---

*) La convergence des développements (21) et (23) se prouve comme dans le § 1. Les développements (21), (22) et (23), (24) pour le cas d'une variable ($m = 1$) sont indiqués par Jacobi (Crelle's Journal, B. 15, 1836, p. 1—26). [Le resultat obtenu par M. B. Jekhowsky (Bulletin astronomique, t. 35, 1918, p. 139—145) est incorrect].

**) [Sous la condition de la convergence absolue de la série donnée].

où

$$(26)\qquad A_0 = C_0 - \frac{e_1}{2}(C_1 + C_{-1}) - 2\frac{e_2}{2}(C_2 + C_{-2}) - \ldots - m\frac{e_m}{2}(C_m + C_{-m}) - \ldots$$

et

$$(27)\qquad A_k = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{p}{k} C_p I_{k-p}(ke_1, ke_2, \ldots, ke_m, \ldots),\ k \gtrless 0.$$

Ce résultat conduit à l'extension au cas de l'équation de Kepler généralisée du théorème suivant de Cauchy *):

Si

$$F = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p e^{ipv}$$

et

$$(3)\qquad v - e_1 \sin v - e_2 \sin 2v - \ldots - e_m \sin mv - \ldots = \zeta,$$

alors

1) le coefficient A_k du développement

$$F = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\zeta}$$

st égal au coefficient de e^{ikv} dans le développement suivant les puissances de e^{iv} de la fonction

$$Fe^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \ldots}\left[1 - \frac{e_1}{2}(e^{iv} + e^{-iv}) - 2\frac{e_2}{2}(e^{2iv} + e^{-2iv}) - \ldots\right];$$

2) il est égal encore au coefficient de e^{ikv} dans le développement suivant les puissances de e^{iv} de la fonction

$$\frac{1}{ik}\frac{dF}{dv}e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \ldots}$$

*) Comptes rendus, t. 12, 1841, p. 88 (Oeuvres, 1e série, t. 6, p 21). [Avant la publication de ma Thèse lithographiée cette généralisation du théorème de Cauchy a été indiquée par M. B. Jekhowsky (Comptes rendus, t. 166, 1918, p. 342) qui reproduit le raisonnement de Tisserand (Traité de mécanique céleste, t. 1, p. 229—233). A cause de l'interruption de nos rapports scientifiques avec l'étranger dès le commencement de l'année 1918 jusqu' au moment de la publication de ma Thèse lithographiée (janvier 1922) les indications bibliographiques données dans ce travail se terminent par l'année 1917].

Pour démontrer la première partie du théorème il suffit de présenter le coefficient A_k sous forme

(28) $$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F e^{-ik\zeta} d\zeta,$$

d'où, en vertu de l'équation (3),

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F e^{i(ke_1 \sin v + ke_2 \sin 2v + \ldots)} (1 - e_1 \cos v -$$

$$- 2e_2 \cos 2v - \ldots) e^{-ikv} dv$$

et si l'on pose

(29) $$F e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \ldots} \left[1 - \frac{e_1}{2}(e^{iv} + e^{-iv}) - \right.$$

$$\left. - 2\frac{e_2}{2}(e^{2iv} + e^{-2iv}) - \ldots\right] =$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} A'_{k'} e^{ik'v},$$

on a

(30) $$A_k = A'_k.$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème il suffit de transformer l'intégrale (28) à l'aide de l'intégration par parties, alors

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F e^{-ik\zeta} d\zeta = -\frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} F de^{-ik\zeta} = \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} \frac{dF}{dv} e^{-ik\zeta} dv,$$

ou, en vertu de l'équation (3),

$$A_k = \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} \frac{dF}{dv} e^{ik(e_1 \sin v + e_2 \sin 2v + \ldots)} e^{-ikv} dv$$

et si l'on pose

$$\frac{1}{ik} \frac{dF}{dv} e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \ldots} = \sum_{k''=-\infty}^{+\infty} A''_{k''} e^{ik''v},$$

on a

(31) $$A_k = A''_k.$$

Le développement de la fonction $e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \ldots}$ suivant les puissances de e^{iv} introduit dans les expressions des coefficients A'_k, A''_k la fonction *) I_{k_1} $(ke_1, ke_2, \ldots, ke_{m_1}, \ldots)$. En effectuant le calcul des coefficients A'_k, A''_k, on s'assure que les égalités (30), (31) sont équivalentes aux formules (26), (27).

Comme exemple de l'application de la formule (30), citons le développement en série

$$\frac{1}{1 - e_1 \cos v - 2e_2 \cos 2v - \ldots} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\zeta} . \tag{32}$$

Ici l'égalité (29) se réduit à la suivante

$$e^{\frac{ke_1}{2}(e^{iv} - e^{-iv}) + \frac{ke_2}{2}(e^{2iv} - e^{-2iv}) + \ldots} = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} I_{k'} (ke_1, ke_2, \ldots) e^{ik'v}.$$

Par conséquent

$$A_k = I_k (ke_1, ke_2, \ldots).$$

On peut vérifier encore le développement (32) en partant du développement suivant, donné plus haut (§ 1),

$$v = \zeta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} I_k (ke_1, ke_2, \ldots) \sin k\zeta,$$

si l'on se rappele la formule (19)

$$I_{-k} (-x_1, -x_2, \ldots) = I_k (x_1. x_2, \ldots),$$

car en vertu de l'équation (3) on a

$$\frac{1}{1 - e_1 \sin v - 2e_2 \sin 2v - \ldots} = \frac{dv}{d\zeta} .$$

§ 5. **Relations de récurrence entre les fonctions I_k $(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ et entre ces fonctions et leurs dérivées.** En partant du développement (14) on prouve pour les fonctions I_k $(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ les relations fondamentales (8) et (9) de M. Pérès. En différentiant les deux parties de l'égalité (14) par rapport à x_m, on a

$$\frac{1}{2}(t^m - t^{-m}) e^{\frac{x_1}{2}(t - t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2 - t^{-2}) + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{2}(t^m - t^{-m}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) t^k =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial I_k (x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_m} t^k.$$

En comparant les coefficients de t^k dans les deux parties de la dernière égalité, on arrive aux relations (8).

*) Voir l'égalité (14).

En différentiant ensuite les deux parties de l'égalité (14) par rapport à t, on trouve

$$\left[\frac{x_1}{2}(1+t^{-2})+2\frac{x_2}{2}(t+t^{-3})+\ldots+m\frac{x_m}{2}(t^{m-1}+t^{-m-1})+\ldots\right]\times$$
$$\times\, e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2})+\ldots} =$$
$$=\left[\frac{x_1}{2}(1+t^{-2})+2\frac{x_2}{2}(t+t^{-3})+\ldots+m\frac{x_m}{2}(t^{m-1}+t^{-m-1})+\ldots\right]\times$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)\, t^k =$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kI_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)\, t^{k-1}.$$

En comparant les coefficients de t^{k-1} dans les deux parties de la dernière égalité, on arrive à la relation (9).

§ 6. Solution du système (8), (9) pour la valeur quelconque d'indice k sous forme d'une intégrale définie*). L'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kv-x_1\sin v-x_2\sin 2v-\ldots-x_n\sin nv)\,dv$$

ou

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}\, t^{-k-1}\,dt,$$

C désignant un chemin d'intégration fermé quelconque entourant le point $t=0$, définit la fonction $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour la valeur entière d'indice k. En considérant maintenant l'indice k comme un nombre quelconque réel ou complexe, par analogie avec le cas d'une variable **) nous allons chercher la solution du systeme (8), (9) sous forme d'une intégrale curviligne

$$S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b Ft^{-k-1}\,dt, \tag{33}$$

*) [Les §§ qui suivent, dont le resumé est donné dans les Notes de l'auteur aux Comptes rendus (t. 163, 1916, p. 26; t. 165, 1917, p. 23 et 1100; t. 185, 1927, p. 409), ainsi que la remarque faite aux pages 51, 52 du travail lithographié de l'auteur à propos de la vérification des conditions d'integrabilité du système (S), sont textuellement (avec la restriction $n=2$) reproduits dans la Thèse de M. B. Jekhowsky „Étude sur les transcendantes Fourier-Bessel à plusieurs variables." Paris, 1927, Deuxième partie].

**) Sonine. „Recherches sur les fonctions cylindriques" (Mathematische Annalen, B. 16, 1880, p. 10). Dans mon article „Sur les cas limites de la fonction P de Riemann" (Annales de l'Institut des Mines à Saint-Pétersbourg, t. 1, 1907, p. 87), [voir encore Comptes rendus, t. 181, 1925, p. 313], j'ai obtenu cette intégrale comme cas limite de l'intégrale pour la fonction P.

où

$$F = e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \dots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}$$

et a et b sont des nombres constants qu'il faut définir.

Pour toutes les valeurs de a et b cette intégrale *) satisfait aux équations (8).

En effet, si dans l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x_m} t^{-k-1}\, dt,$$

on intervertit le signe de la dérivation avec le signe de l'intégration, cette intégrale sera égale à $\frac{\partial S_k}{\partial x_m}$. D'autre part, si l'on effectue la différentiation sous le signe d'intégrale, elle sera égale à $\frac{1}{2}(S_{k-m}-S_{k+m})$.

Considérons ensuite l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial t} t^{-k-1}\, dt.$$

Si on la transforme par l'intégration par parties, elle se trouvera égale à

$$\left[\frac{1}{2\pi i} F t^{-k}\right]_a^b + kS_k.$$

D'autre part, si l'on effectue la différentiation sous le signe d'intégrale, elle sera égale à

$$\frac{x_1}{2}(S_{k-1}+S_{k+1}) + 2\,\frac{x_2}{2}(S_{k-2}+S_{k+2}) + \dots + n\,\frac{x_n}{2}(S_{k-n}+S_{k+n}).$$

On voit d'ici que l'intégrale (33), qui satisfait toujours au système (8), va satisfaire en même temps à l'équation (9), si l'on choisit les constantes a et b telles que

(34) $$[F \,.\, t^{-k}]_a^b = 0.$$

Désignons par $R(u)$ la partie réelle d'une quantité complexe quelconque u. Soit α et β deux constantes telles que **)

$$R(x_n\alpha^n) < 0,\quad R(x_n\beta^n) < 0$$

---

*) De même que l'intégrale plus générale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \dots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}\,\psi(t)\, dt,$$

où $\psi(t)$ est une fonction arbitraire de t.

**) [En supposant ici $n=1, 2$ au lieu de $n=2$, M. B. Jekhowsky (Thèse, Paris, 1927, p. 21, 25, 26, 28) comprend mal ces inégalités].

et $\rho = e^{\frac{i\pi}{n}}$. La condition (34) conduit aux trois systèmes des valeurs pour les limites a et b, savoir

$$1)\ a = \infty \cdot \alpha,\quad b = \infty\,\beta$$

$$2)\ a = \frac{0}{\rho\beta},\quad b = \frac{0}{\rho\alpha},$$

$$3)\ a = \frac{0}{\rho\beta},\quad b = \infty\,\alpha,$$

le symbole ∞ étant reputé une valeur réelle positive infinie. Conformément à cela on obtient pour les solutions du système (8), (9) trois expressions suivantes sous forme d'intégrales définies

$$(35')\qquad S'_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\,\alpha}^{\infty\,\beta} e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}\, t^{-k-1}\,dt,$$

$$(35'')\qquad S''_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{0}{\rho\beta}}^{\frac{0}{\rho\alpha}} e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}\, t^{-k-1}\,dt,$$

$$(35''')\qquad S'''_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{0}{\rho\cdot\beta}}^{\infty\,\alpha} e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}\, t^{-k-1}\,dt,$$

où $t^k = e^{k\,lg\,t}$ et $lg\,t$ prend les valeurs réelles pour t réel positif. Étudions ces intégrales.

En nous tournant aux intégrales $(35')$ et $(35'')$, nous nous imaginons le chemin d'intégration sous forme d'une ligne sans noeuds allant à l'infini dans les directions déterminées, ou venant et revenant au point $t = 0$. En posant

$$\beta = \alpha e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

et en remplaçant α successivement par

$$\alpha_m = \alpha e^{\frac{2m\pi i}{n}}\ {*}),\ m = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

on obtient des intégrales S'_k, S''_k $2n$ solutions du système (8), (9)

$$(37)\qquad I_k^{(0)},\ I_k^{(1)}, \ldots,\ I_k^{(n-1)},$$

$$(38)\qquad I_k^{(n)},\ I_k^{(n+1)}, \ldots,\ I_k^{(2n-1)},$$

pour k non entier linéairement indépendantes les unes des autres **).

---

*) Où, comme précédemment,

$$(36)\qquad R\,(x_n\,\alpha^n) < 0.$$

**) J o r d a n, Cours d'analyse, t. 3, 1887, p. 244—247.—N e k r a s s o f f „Über lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden" (Mathematische Annalen, B. 38, 1891, p. 509).

Faisons des intégrales (37) la somme suivante

$$I_k^{(0)} + I_k^{(1)} + \ldots + I_k^{(n-1)}$$

qui se réduit à une intégrale

$$(39) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\alpha}^{\infty\alpha} e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})} t^{-k-1} dt.$$

Pour k entier, le chemin curviligne d'intégration, partant du point $\infty\alpha$ et y revenant dans la même direction, après avoir entouré l'origine $t = 0$ (sans cela l'intégrale serait égale à zéro), se réduit à un contour arbitraire fermé autour de ce dernier point; c'est pourquoi l'intégrale (39) est égale à

$$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Faisons des intégrales (38) la somme suivante

$$I_k^{(n)} + I_k^{(n+1)} + \ldots + I_k^{(2n-1)}$$

qui se réduit à une intégrale

$$(40) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{0}{\rho\alpha}}^{\frac{0}{\rho\alpha}} e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})} t^{-k-1} dt$$

Pour k entier, le chemin curviligne d'intégration, partant du point $\frac{0}{\rho\alpha}$ et y revenant dans la même direction, après avoir entouré l'origine $t = 0$, se réduit à un contour arbitraire fermé autour de ce dernier point; c'est pourquoi l'intégrale (40) est égale à

$$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Par conséquent, pour k entier,

$$I_k^{(0)} + I_k^{(1)} + \ldots + I_k^{(n-1)} = I_k^{(n)} + I_k^{(n+1)} + \ldots + I_k^{(2n-1)}.$$

On peut prendre alors comme nouvelle solution du système (8), (9), linéairement indépendente des précédentes, l'intégrale

$$H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{0}{\rho\alpha}}^{\infty\alpha} e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})} t^{-k-1} dt$$

qui, comme nous l'établirons dans la suite, s'exprime linéairement pour k non entier par deux intégrales (39) et (40).

§ 7. Expressions des fonctions S_k'', S_k''' par S_k'. Passons à l'étude des autres solutions S_k'', S_k''' du système (8), (9). Nous allons montrer que ces solutions s'expriment par S_k' *).

*) [Pour $n = 1$ comparer Sonine, Mémoire cité, p. 24].

Soit, pour préciser les idées, $R(x_n) < 0$. Posons alors $\alpha = 1$ et représentons le chemin d'intégration de la manière suivante.

Construisons le cercle de rayon un avec le centre à l'origine des coordonnées. Soient $A_0, A_1, \dots, A_{2n-1}$ (sur la figure $2n = 10$) les points d'intersection de ce cercle avec les droites passant par l'origine et formant avec l'axe réel positif les angles $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$. Soit B_p le point infini de la droite passant de l'origine par A_p. En désignant par C un chemin quelconque d'intégration, posons pour abréviation

$$S(C) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t-t^{-2}) + \dots + \frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}\, t^{-k-1}\, dt.$$

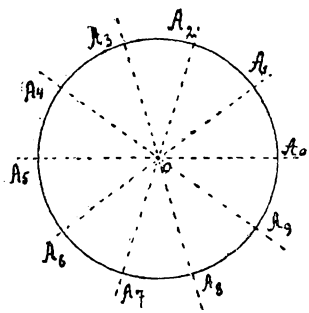


Fig. 1.

D'après ces notations on a

$$I_k^{(m)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(B_{2m}\, A_{2m}\, A_{2m+1}\, A_{2m+2}\, B_{2m+2}),$$

$$I_k^{(n+m)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(OA_{2n-2m-3}\, A_{2n-2m-2}\, A_{2n-2m-1}\, O),$$

$$m = 0, 1, \dots, n-1$$

$$I_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = I_k^{(0)} + I_k^{(1)} + \dots + I_k^{(n-1)} =$$
$$= S(B_0 A_0 A_1 \dots A_{2n-1}\, A_0 B_0),$$

$$I_k^{(2n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = I_k^{(n)} + I_k^{(n+1)} + \dots + I_k^{(2n-1)} =$$
$$= S(OA_{2n-1}\, A_0 \dots A_{2n-2}\, A_{2n-1}\, O),$$

$$H_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(OA_{2n-1}\, A_0 B_0).$$

On trouve facilement

$$e^{2k\pi i} I_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(A_{2n-1}\, A_0) - S(A_{2n-1}\, A_{2n-2} \dots A_0) +$$
$$+ (1 - e^{2k\pi i})\, S(A_0 B_0),$$

$$I_k^{(2n)}(x_1, x_2 \ldots, x_n) = (1 - e^{-2k\pi i})\, S(OA_{2n-1}) + S(A_{2n-1} A_0) -$$
$$- e^{-2k\pi i} S(A_{2n-1} A_{2n-2} \ldots A_0),$$
$$H_k(x_1, x_2 \ldots, x_n) = S(OA_{2n-1}) + S(A_{2n-1} A_0) + S(A_0 B_0).$$

On a d'ici

$$(41) \quad I_k^{(2n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - I_k(x_1, x_2 \ldots, x_n) =$$
$$= (1 - e^{-2k\pi i})\, H_k(x_1, x_2 \ldots, x_n).$$

Donc $H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'exprime linéairement par $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $I_k^{(2n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Prenons ensuite l'intégrale

$$I_{-k}^{(m)}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1} x_n) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty \alpha_m \rho}^{-\infty \alpha_{m+1} \rho} e^{\frac{x_1}{2}(t - t^{-1}) - \frac{x_2}{2}(t^2 - t^{-2}) + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x_n}{2}(t^n - t^{-n})}\, t^{k-1} dt.$$

Si l'on pose ici $t = -\frac{1}{t_1} = \frac{e^{\pi i}}{t_1}$, $\frac{dt}{t} = -\frac{dt_1}{t_1}$, $t^k = e^{k\pi i}\, t_1^{-k}$, le chemin d'intégration $B_{2m+n+1}\, A_{2m+n+1}\, A_{2m+n+2}\, A_{2m+n+3}\, B_{2m+n+3}$ se transforme en le suivant: $OA_{2n-2m-1}\, A_{2n-2m-2}\, A_{2n-2m-3}\, O$.

C'est pourquoi

$$I_{-k}^{(m)}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1} x_n) = e^{k\pi i} S(OA_{2n-2m-3}\, A_{2n-2m-2}\, A_{2n-2m-1}\, O)$$
$$= e^{k\pi i}\, I_k^{(n+m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

et

$$I_k(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1} x_n) = e^{k\pi i}\, I_k^{(2n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

En vertu de cette égalité la formule (41) donne

$$H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-k\pi i} \frac{I_{-k}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1} x_n) - e^{k\pi i} I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1 - e^{-2k\pi i}}$$
$$(42) \qquad = \frac{I_{-k}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1} x_n) - e^{k\pi i} I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{2i \sin k\pi}.$$

§ 8. Généralisation de la fonction de C. Neumann. Pour la valeur arbitraire de k les fonctions $I_k^{(p)}$, $p = 0, 1, \ldots, 2n - 1$, représentent $2n$ solutions linéairement indépendantes du systeme (8), (9) et sa solution générale s'exprime par la combinaison linéaire de ces fonctions.

L'exception représente le cas de la valeur entière de k, on a alors (§ 3)

$$I_{-k}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1} x_n) = (-1)^k I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

et la fonction $I_k^{(2n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ coincide avec $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

On peut prendre dans ce cas comme nouvelle, linéairement indépendante des précédentes, solution du système (8), (9), la fonction $H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou la fonction plus simple suivante

(43)
$$Y_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{\cos k\pi\; I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) - I_{-k}(x_1, -x_2, \ldots, (-1)^{n-1} x_n)}{\sin k\pi}$$

qui représentent la généralisation des fonctions de Hankel *)

$$H_k(x) = \frac{I_{-k}(x) - e^{k\pi i} I_k(x)}{2i \sin k\pi}$$

et de C. Neumann **)

$$Y_k(x) = \frac{\cos k\pi\; I_k(x) - I_{-k}(x)}{\sin k\pi}$$

pour le cas de plusieurs variables.

§ 9. Intégrales entre les limites réelles pour la fonction $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Considérons avec plus de détails l'intégrale

(44)
$$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty\alpha}^{\infty\alpha} e^{\frac{x_1}{2}(t - t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2 - t^{-2}) + \ldots + \frac{x_n}{2}(t^n - t^{-n})}\, t^{-k-1}\, dt$$

dans le but de la transformer de façon que le chemin d'intégration devienne réel. Posons pour cela

$$\alpha = e^{(\psi - 2\pi) i}$$

et construisons, comme précédemment, un cercle de rayon un avec le centre à l'origine des coordonnées. Désignons par A le point d'intersection de ce cercle avec une droite menée de l'origine sous l'angle ψ à l'axe réel positif et par B le point infiniment éloigné de cette droite. On peut alors présenter l'intégrale (44) sous la forme suivante

(45)
$$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i} \left[e^{2k\pi i} \int_B^A + \int_{(A,A)} + \int_A^B \right],$$

le chemin d'intégration (A,A) étant une circonférence parcourue dans le sens positif de $\varphi = \psi - 2\pi$ jusqu'à $\varphi = \psi$, si l'on pose sur ce chemin $t = e^{i\varphi}$.

---

*) Niels Nielsen. Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen, 1904, p. 16 et 124.

**) Niels Nielsen. Travail cité, p. 11.

Posons dans la première et dans la troisième intégrale de la partie droite de l'égalité (45) $t = e^{\theta + \psi i}$, alors ces intégrales se réduisent à la suivante

$$-\frac{e^{k(\pi-\psi)i}\sin k\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{\frac{x_1}{2}(e^{\theta+\psi i}-e^{-\theta-\psi i})+\frac{x_2}{2}(e^{2(\theta+\psi i)}-e^{-2(\theta+\psi i)})+\ldots-k\theta}\,d\theta,$$

où l'on a supposé $R(x_n e^{n\psi i}) < 0$.

Quant à la seconde intégrale de la partie droite de (45), si l'on pose $t = e^{i\varphi}$ et $\varphi = \psi - \pi + \sigma$ de sorte que $\sigma = -\pi$ pour $\varphi = \psi - 2\pi$ et $\sigma = \pi$ pour $\varphi = \psi$, elle se transforme en celle-ci

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-2\pi}^{\psi} e^{\frac{x_1}{2}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})+\frac{x_2}{2}(e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi})+\ldots+\frac{x_n}{2}(e^{ni\varphi}-e^{-ni\varphi})-ki\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\psi-2\pi}^{\psi} e^{ix_1\sin\varphi+ix_2\sin 2\varphi+\ldots+ix_n\sin n\varphi-ki\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{e^{k(\pi-\psi)i}}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ix_1\sin(\psi+\sigma)+ix_2\sin 2(\psi+\sigma)-\ldots+(-1)^n ix_n\sin n(\psi+\sigma)-ki\sigma}\,d\sigma,$$

c'est-à-dire, en réduisant les limites d'intégration aux 0 et π,

$$\frac{e^{k(\pi-\psi)i}}{2\pi}\left\{\int_0^\pi e^{-ix_1(\sin\psi\cos\sigma+\cos\psi\sin\sigma)+ix_2(\sin 2\psi\cos 2\sigma+\cos 2\psi\sin 2\sigma)-\ldots-ki\sigma}\,d\sigma\,+\right.$$

$$\left.+\int_0^\pi e^{-ix_1(\sin\psi\cos\sigma-\cos\psi\sin\sigma)+ix_2(\sin 2\psi\cos 2\sigma-\cos 2\psi\sin 2\sigma)-\ldots+ki\sigma}\,d\sigma\right\} =$$

$$= \frac{e^{k(\pi-\psi)i}}{\pi}\int_0^\pi e^{-ix_1\sin\psi\cos\sigma+ix_2\sin 2\psi\cos 2\sigma-\ldots}\times$$

$$\times\cos(x_1\cos\psi\sin\sigma - x_2\cos 2\psi\sin 2\sigma+\ldots+k\sigma)\,d\sigma.$$

De cette manière on a finalement

$$(46)\qquad I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{e^{k(\pi-\psi)i}}{\pi}\left[\int_0^\pi e^{-ix_1\sin\psi\cos\sigma+ix_2\sin 2\psi\cos 2\sigma-\ldots}\times\right.$$

$$\times\cos(x_1\cos\psi\sin\sigma - x_2\cos 2\psi\sin 2\sigma+\ldots+k\sigma)\,d\sigma\,-$$

$$\left.-\sin k\pi\int_0^\infty e^{\frac{x_1}{2}(e^{\theta+\psi i}-e^{-\theta-\psi i})+\frac{x_2}{2}(e^{2(\theta+\psi i)}-e^{-2(\theta+\psi i)})+\ldots-k\theta}\,d\theta\right].$$

Pour $n = 1$ cette formule a été établie par Sonine *).

*) Mémoire cité, p. 14.

Elle est applicable, avec le choix convenable de ψ, pour toute la valeur de x_n différente de zéro. Si l'on pose dans cette formule $\psi = \pi$ ou $\psi = 0$, on en tire les formules suivantes

$$(47') \quad I_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(k\sigma - x_1 \sin\sigma - x_2 \sin 2\sigma - \ldots - x_n \sin n\sigma)\, d\sigma -$$

$$- \frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x_1 sh\,\theta + x_2 sh\,2\theta - \ldots + (-1)^n x_n sh\,n\theta - k\theta}\, d\theta,$$

$$sh\,\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2},$$

pour $R\,[(-1)^n x_n] < 0$ et

$$(47'') \quad I_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{e^{k\pi i}}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} \cos\,(k\sigma + x_1 \sin\sigma - x_2 \sin 2\sigma + \ldots - (-1)^n x_n \sin n\sigma)\, d\sigma - \right.$$

$$\left. - \sin k\pi \int_0^{\infty} e^{x_1 sh\,\theta + x_2 sh\,2\theta + \ldots + x_n\, sh\,n\theta - k\theta}\, d\theta\right\},$$

pour $R\,(x_n) < 0$, sur lesquelles on vérifie aisément l'égalité

$$(48) \quad I_k\,(-x_1, x_2, -x_3, \ldots, (-1)^n x_n) = e^{k\pi i}\, I_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ces formules pour $n = 1$ sont indiquées par Schläfli *) et pour k entier se réduisent à l'intégrale (1) de Schlömilch-Weierstrass-Appell. Dans la formule (46) pour $R\,(i^n x_n) < 0$ on peut poser $\psi = \frac{\pi}{2}$ et pour $R\;[(-i)^n x_n] < 0$ on peut poser $\psi = \frac{3\pi}{2}$. On obtient ainsi des intégrales analogues aux deux précédentes sur lesquelles on peut vérifier de nouveau l'égalité (48). Pour k entier on en déduit une nouvelle expression de la fonction $I_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous forme d'intégrale

$$\frac{1}{\pi i^k}\int_0^{\pi} e^{i\,(x_1 \cos\sigma - x_3 \cos 3\sigma + \ldots)} \cos\,(x_2 \sin 2\sigma - x_4 \sin 4\sigma + \ldots + k\sigma)\, d\sigma$$

donnée dans le cas $n = 1$ par Hansen **).

§ 10. Système fondamental d'intégrales des équations (S) dans le voisinage de $x_n = 0$. Des expressions des fonctions $I_k^{(p)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, sous forme

*) Annali di Matematica, 2e série, t. 1, 1868, p. 237.—Mathematische Annalen, B. 3, 1871, p. 148.

**) Mémoire cité, p. 105.

des intégrales définies ($35'$), ($35''$) on voit que les points singuliers (qui sont tous d'ailleurs des points singuliers essentiels) de ces fonctions seront

$$x_1 = \infty, \ x_2 = \infty, \ldots, \ x_n = \infty, \ x_n = 0 .$$

Lorsqu'une des variables x_h, $h = 1, 2, \ldots, n-1$, fait un tour dans son domaine complexe dans le sens direct autour du point singulier correspondant $x_h = \infty$, cela revient au même que si elle faisait un tour dans le sens négatif autour du point ordinaire $x_h = 0$. Donc, quand ce tour est accompli, la fonction $I_k^{(p)}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ reprend la même valeur *). Etudions la variation des valeurs de la fonction $I_k^{(p)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, quand la variable x_n fait dans son domaine complexe un tour du point $x_n = \infty$ dans le sens direct ou, ce qui est la même chose, dans le sens negatif autour du point $x_n = 0$.

Quand ce tour est accompli l'argument de x_n augmente de -2π, vu la condition (36) l'argument de α augmente donc de $\frac{2\pi}{n}$.

Par suite, chacune des fonctions $I_k^{(q)}$ ou $I_k^{(n+q)}$, $q = 0, 1, \ldots, n-2$, se change en la suivante $I_k^{(q+1)}$ ou $I_k^{(n+q+1)}$ et $I_k^{(n-1)}$ en $e^{-2k\pi i} I_k^{(0)}$ ou $I_k^{(2n-1)}$ en $e^{2k\pi i} I_k^{(n)}$.

On voit d'ici que chacune des fonctions $I_k^{(m)}$ ou $I_k^{(n+m)}$ se déduit d'une seule $I_k^{(0)}$ ou $I_k^{(n)}$ au moyen de circulation de la variable x_n dans son domaine complexe, effectuée successivement m fois ($m = 0, 1, \ldots, n-1$) dans le sens négatif autour du point singulier $x_n = 0$.

En donnant aux $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ des valeurs arbitraires, constantes et finies, nous allons chercher, conformément à la méthode de Fuchs, un système fondamental d'intégrales des équations (S) dans le voisinage de $x_n = 0$, dont chacune après le tour accompli par la variable x_n du point $x_n = 0$ prend la valeur qui ne différe de sa valeur initiale que par un multiplicateur constant μ.

En désignant les valeurs que prennent les fonctions $I_k^{(p)}$, $p = 0, 1, \ldots 2n-1$, après le tour du pont $x_n = 0$, fait une fois par la variable x_n, par $\bar{I}_k^{(p)}$, on a

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{I}_k^{(q)} = I_k^{(q+1)}, & \bar{I}_k^{(n-1)} = e^{-2\pi k i} I_k^{(0)}, \\ \bar{I}_k^{(n+q)} = I_k^{(n+q+1)}, & \bar{I}_k^{(2n-1)} = e^{2\pi k i} I_k^{(n)}, \\ \multicolumn{2}{c}{q = 0, 1, \ldots, n-2.} \end{array} \right.$$

---

*) Des expressions ($35'$) et ($35''$) il est aussi évident qu'après l'accroissement de l'argument d'une des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de 2π les fonctions $I_k^{(p)}$, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, reprennent les valeurs initiales.

On cherche l'intégrale du système (S) $\mathcal{J}_k$ prenant la valeur

$$\overline{\mathcal{J}}_k = \mu \mathcal{J}_k, \tag{50}$$

quand un tour du point $x_n = 0$ est accompli.

Pour k non entier les fonctions $I_k^{(p)}$, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, représentent un système fondamental d'intégrales par lesquelles s'exprime linéairement toute intégrale des équations (S); c'est pourquoi

$$\mathcal{J}_k = C_0 I_k^{(0)} + C_1 I_k^{(1)} + \ldots + C_{2n-1} I_k^{(2n-1)},$$

$$\overline{\mathcal{J}}_k = C_0 \overline{I}_k^{(0)} + C_1 \overline{I}_k^{(1)} + \ldots + C_{2n-1} \overline{I}_k^{(2n-1)}.$$

Des équations (49) et (50) on trouve

$$(C_{n-1} e^{-2\pi k i} - C_0 \mu) I_k^{(0)} + (C_0 - C_1 \mu) I_k^{(1)} + \ldots + (C_{n-2} - C_{n-1} \mu) I_k^{(n-1)} +$$
$$+ (C_{2n-1} e^{2\pi k i} - C_n \mu) I_k^{(n)} + (C_n - C_{n+1} \mu) I_k^{(n+1)} + \ldots +$$
$$+ (C_{2n-2} - C_{2n-1} \mu) I_k^{(2n-1)} = 0.$$

Mais $I_k^{(p)}$ $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, sont linéairement indépendentes les unes des autres, par conséquent de l'équation précédente on conclut

$$\begin{aligned} &C_{n-1} e^{-2\pi k i} - C_0 \mu = 0,\ C_0 - C_1 \mu = 0, \ldots, C_{n-2} - C_{n-1} \mu = 0, \\ &C_{2n-1} e^{2\pi k i} - C_n \mu = 0,\ C_n - C_{n+1} \mu = 0, \ldots, C_{2n-2} - C_{2n-1} \mu = 0, \end{aligned} \tag{51}$$

d'où, en éliminant $C_0, C_1, \ldots, C_{2n-1}$, on obtient deux équations dans lesquelles se décompose dans le cas considéré l'équation fondamentale de Fuchs.

De ces équations on trouve $2n$ valeurs distinctes pour μ

$$\mu_m = e^{-\frac{2\pi(k-m)i}{n}}, \quad \mu_{n+m} = e^{\frac{2\pi(k+m)i}{n}}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

auxquelles de (51) correspondent $2n$ systèmes des valeurs pour C_p, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$:

$$\begin{array}{cccccccc} C_0^{(0)}, & C_1^{(0)}, & \ldots, & C_{n-1}^{(0)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_0^{(n-1)}, & C_1^{(n-1)}, & \ldots, & C_{n-1}^{(n-1)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & C_n^{(n)}, & C_{n+1}^{(n)}, & \ldots, & C_{2n-1}^{(n)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & C_n^{(2n-1)}, & C_{n+1}^{(2n-1)}, & \ldots, & C_{2n-1}^{(2n-1)}, \end{array}$$

où

$$C_l^{(m)} = C_0 \mu_m^{-l},$$
$$C_{n+l}^{(n+m)} = C_n \mu_{n+m}^{-l},$$
$$l = 0, 1, \ldots, n-1; \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

De cette manière le système fondamental cherché des intégrales irrégulières des équations (S) dans le voisinage de $x_n = 0$ sera

$$\mathcal{J}_k^{(0)} = I_k^{(0)} + \mu_0^{-1} I_k^{(1)} + \ldots + \mu_0^{-(n-1)} I_k^{(n-1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{J}_k^{(n-1)} = I_k^{(0)} + \mu_{n-1}^{-1} I_k^{(1)} + \ldots + \mu_{n-1}^{-(n-1)} I_k^{(n-1)},$$
$$\mathcal{J}_k^{(n)} = I_k^{(n)} + \mu_n^{-1} I_k^{(n+1)} + \ldots + \mu_n^{-(n-1)} I_k^{(2n-1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{J}_k^{(2n-1)} = I_k^{(n)} + \mu_{2n-1}^{-1} I_k^{(n+1)} + \ldots + \mu_{2n-1}^{-(n-1)} I_k^{(2n-1)}.$$

Quand la variable x_n fait un tour du point singulier $x_n = 0$ dans le sens négatif, $\mathcal{J}_k^{(m)}$ obtient le facteur $\mu_m = e^{-\frac{2\pi(k-m)i}{n}}$ et $\mathcal{J}_k^{(n+m)}$ obtient le facteur $\mu_{n+m} = e^{\frac{2\pi(k+m)i}{n}}$. On peut donc présenter ces intégrales sous la forme

$$\mathcal{J}_k^{(m)} = x_n^{\frac{k-m}{n}} f_m (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\mathcal{J}_k^{(n+m)} = x_n^{\frac{-k-m}{n}} f_{n+m} (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

où $f_p (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = 0, 1, \ldots, 2n-1$, sont des fonctions uniformes qui se développent en série de Laurent suivant les puissances positives et négatives de x_n et en série de Maclaurin suivant les puissances positives de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *).

Remarquons que si au système (8), (9) satisfait la fonction $S_k (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, au même système satisfait encore la fonction $e^{-k\pi i} S_{-k} (x_1, -x_2 \ldots, (-1)^{n-1} x_n)$. On peut donc obtenir l'intégrale $\mathcal{J}_k^{(n+m)}$ de $\mathcal{J}_k^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, en multipliant cette dernière par $e^{-k\pi i}$ et en y remplaçant k par $-k$ et $x_2, x_4, \ldots$, par $-x_2 - x_4, \ldots$

*) [Divers développements des fonctions

$$I_k^{(p)} (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; \mathcal{J}_k^{(p)} (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; p = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

en séries sont indiqués par l'auteur dans sa Thèse lithographiée, §§ 18 et 19. Voir encore Comptes rendus, t. 165, 1917, p. 23 et 1100; t. 185, 1927, p. 409].

§ 11. Formule d'addition. Remplaçons maintenant dans les intégrales (35) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement par $x_1+y_1, \ldots, x_2+y_2, \ldots$ x_n+y_n, nous obtenons

$$S_k(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})} \times$$

$$\times e^{\frac{y_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{y_2}{2}(t^2-t^{-2})+\ldots+\frac{y_n}{2}(t^n-t^{-n})}\, t^{-k-1}dt,$$

où a et b ont la signification indiquée en § 6 et

(52) $$R\,[(x_n+y_n)\,\alpha^n] < 0,\quad R\,[(x_n+y_n)\,\beta^n] < 0.$$

Pour chaque valeur de y_n on peut choisir les constantes α, β de telle manière qu'en même temps avec les conditions (52) seront satisfaites encore les suivantes

$$R\,(y_n\alpha^n) < 0,\quad R\,(y_n\beta^n) < 0.$$

Pour cela, en vertu des inégalités

$$R\left[y_n\alpha^n\left(1+\frac{x_n}{y_n}\right)\right] < 0,\quad R\left[y_n\beta^n\left(1+\frac{x_n}{y_n}\right)\right] < 0,$$

il suffit d'admettre que mod $\dfrac{x_n}{y_n} < 1$.

Développons alors

$$e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}$$

en série suivant la formule (14), nous obtenons la formule d'addition

$$S_k\,(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{1}{2\pi i}\int_a^b e^{\frac{y_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{y_2}{2}(t^2-t^{-2})+\ldots+\frac{y_n}{2}(t^n-t^{-n})}\, t^{p-k-1}dt$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, S_{k-p}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

avec

(53) $$\text{mod } x_n < \text{mod } y_n.$$

Pour $n=1$ elle a été indiquée par Schläfli *).

---

*) Mathematische Annalen, B. 3, 1871, p. 135—137. [Cette démonstration de la formule d'addition n'est pas rigoureuse à cause de l'intervalle infini de l'intégration. La démonstration rigoureuse se trouve dans la nouvelle édition de l'ouvrage de l'auteur „Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables et leurs applications en mécanique“ qui va paraître prochainement dans les Annales de l'Institut des Mines à Leningrad, t. 72, 1928].

Pour k entier le chemin curviligne d'intégration dans l'expression de $I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sous forme d'intégrale se réduit à un contour fermé autour de l'origine et la condition (53) disparaît.

Comme cas particulier de l'égalité

$$I_k(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n'+y_n) =$$
$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x_1, x_2, \ldots, x_n') I_{k-p}(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

si l'on y pose

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = x_n' = 0, \quad y_n = x_n$$

et si l'on se rappele (§ 3, Remarque) que

$$I_{k-p}(0, 0, \ldots, 0, y_n) = I_{\frac{k-p}{n}}(y_n)$$

pour $k-p$ multiple de n et

$$I_{k-p}(0, 0, \ldots, 0, y_n) = 0$$

pour toutes les autres valeurs de $k-p$, on obtient la formule de M. B. Jekhowsky *)

$$I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) I_{\frac{k-p}{n}}(x_n)$$
$$= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} I_{k-nq}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) I_q(x_n),$$

où $k-p=nq$.

§ 12. Généralisation d'une formule de C. Neumann. Du développement (14) on déduit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k[x_1(s+s^{-1}), x_2(s^2+s^{-2}), \ldots] t^k =$$
$$= e^{\frac{x_1}{2}(s+s^{-1})(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(s^2+s^{-2})(t^2-t^{-2}) + \ldots}$$

D'autre part

$$e^{\frac{x_1}{2}(s+s^{-1})(t-t^{-1}) + \frac{x_2}{2}(s^2+s^{-2})(t^2-t^{-2}) + \ldots} =$$
$$= e^{\frac{x_1}{2}(ts-t^{-1}s^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2s^2-t^{-2}s^{-2}) + \ldots} \; e^{\frac{x_1}{2}(ts^{-1}-st^{-1}) + \frac{x_2}{2}(t^2s^{-2}-s^2t^{-2}) + \ldots}$$

*) Comptes rendus, t. 162, 1916, p. 318.—Bulletin des Sciences mathématiques, t. 41, 1917, p. 58.

Par conséquent

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k[x_1\ (s+s^{-1}),\ x_2\ (s^2+s^{-2}),\ldots]\, t^k =$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p\ (x_1,\ x_2,\ldots)\ t^p s^p \sum_{p'=-\infty}^{+\infty} I_{p'}\ (x_1,\ x_2,\ldots)\ t^{p'} s^{-p'}.$$

En comparant dans les deux membres de cette dernière égalité les coefficients des mêmes puissances de t, on conclut

$$p' = -p+k$$

et

$$I_k\ [x_1\ (s+s^{-1}),\ x_2\ (s^2+s^{-2}),\ldots] =$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_p(x_1,\ x_2,\ldots)\ I_{-p+k}(x_1,\ x_2,\ldots)\ s^{2p-k}.$$

En posant ici $s=e^{i\alpha}$ et en remplaçant respectivement k et p d'abord par $2k$ et $p+k$, puis par $2k+1$ et $p+k+1$, on arrive aux développements suivants

$$I_{2k}\ (2x_1\cos\alpha,\ 2x_2\cos 2\alpha,\ldots) = [I_k\ (x_1,\ x_2,\ldots)]^2 +$$

$$+\,2\sum_{p=1}^{\infty} I_{k+p}\ (x_1,\ x_2,\ldots)\ I_{k-p}\ (x_1,\ x_2,\ldots)\ \cos 2p\alpha,$$

$$I_{2k+1}(2x_1\cos\alpha,\ 2x_2\cos 2\alpha,\ldots) =$$

$$=2\sum_{p=0}^{\infty} I_{k+p+1}\ (x_1,\ x_2,\ldots)\ I_{k-p}\ (x_1,\ x_2,\ldots)\ \cos\ (2p+1)\ \alpha,$$

pour le cas d'une variable indiqués par Schläfli *).

Il vient d'ici **)

$$(54')\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_{2k}\ (2x_1\cos\alpha,\ 2x_2\cos 2\alpha,\ldots)\ \cos 2p\alpha\, d\alpha =$$

$$= I_{k+p}\,(x_1,\ x_2,\ldots)\ I_{k-p}\,(x_1,\ x_2,\ldots),$$

$$(54'')\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_{2k+1}\,(2x_1\cos\alpha,\ 2x_2\cos 2\alpha,\ldots)\ \cos\,(2p+1)\,\alpha\, d\alpha =$$

$$= I_{k+p+1}\,(x_1,\ x_2,\ldots)\ I_{k-p}\,(x_1,\ x_2,\ldots).$$

*) Mathematische Annalen, B. 3, 1871, p. 142.

**) [En indiquant dans ma Thèse lithographiée (chapitre IV) une extension des séries de Lommel, C. Neumann, Kapteyn et Schlömilch au cas de plusieurs variables, je profite (§ 29) des formules (54'), (54'') pour le passage des séries ordonnées suivant les fonctions $I_k\ (x_1,\ x_2,\ \ldots)$, $I_0\ (kx_1,\ kx_2,\ \ldots)$, $I_k\,(kx_1,\ kx_2,\ \ldots)$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, aux séries suivant les produits de ces fonctions. Voir Comptes rendus, t. 165, 1917, p. 23].

Pour $p = 0$ on obtient de (54') la formule intéressente

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi I_{2k}\left(2x_1\cos\alpha,\ 2x_2\cos 2\alpha, \ldots\right)d\alpha = \left[I_k\left(x_1,\ x_2, \ldots\right)\right]^2,$$

pour les fonctions de Bessel ordinaires donnée par C. Neumann *).

О функциях Bessel'я многих переменных.

М. И. Акимова.

В этой статье, представляющей перевод §§ 5—7, 10, 11, 16, 17, 21—23 и 29 литографированной диссертации автора „О функциях Bessel'я многих переменных и их приложениях в механике" (Петроград, 1922), исследуются некоторые свойства функций $I_k\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$, определяемых как коэффициенты разложения

$$e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)\ t^k$$

и при произвольном значении параметра k представляемых контурным интегралом

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\alpha}^{\infty\beta} e^{\frac{x_1}{2}(t-t^{-1})+\frac{x_2}{2}(t^2-t^{-2})+\ldots+\frac{x_n}{2}(t^n-t^{-n})}\, t^{-k-1}dt,$$

где вещественная часть $x_n\alpha^n$ и $x_n\beta^n$ меньше нуля.

---

*) Theorie der Besselschen Functionen, 1867, p. 70.

Sur la convergence des formules des quadratures mécaniques dans un intervalle infini.

A. Jouravsky.

§ 1. La problème des quadratures mécaniques, comme il est bien connu, consiste en ceci:

Soit $p(x)$ une fonction satisfaisante à la condition

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\, dx \geq 0, \quad a \leq \alpha < \beta \leq b.$$

Toutes les intégrales

$$m_n = \int_a^b p(x)\, x^n dx, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

appelées des moments, existent.

On peut alors indiquer le nombres

$$a \leq x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn} \leq b$$

et la suite des valeurs positives $A_{1n}, A_{1n}, \ldots A_{nn}$ telles, que

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + A_{2n} f(x_{2n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}).$$

Cette égalité est vrai pour tous les polynomes de degré non superieur à $2n - 1$.

Pour les autres fonctions cette formule est seulement approximative et tout naturellement la question se pose, s'il est possible d'obtenir ainsi une approximation indéfinie.

La problème de la convergence des quadratures mécaniques était l'objet des travaux des plusieur géomètres savants.

Pour le cas des limites finis cette question était resolue par Stieltjes *). Puis le même problème et le problème plus général était étudié par Stekloff **) et Kryloff ***).

---

*) Stieltjes. Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. Annales de l'école normale. 1884. T. I. S 3.

**) Sur le calcul approché des intégrales définies au moyen des formules des quadratures mécaniques. Bulletin de l'Academie des Sciences de P. 1916. S. VI, № 3 (en russe).

***) Sur la convergence des formules des quadratures mécaniques et quelques questions qui s'y rattachent. Annales de l'école des mines de Petrograde 1915 (en russe).

Le cas des limites infinis presentait plus de difficulté. Stieltjes a étudié le problème de la convergence de la fraction continue à l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{x-z}\,dx.$$

Ce problème est equivalent au problème de la convergence de la formule des quadratures mécaniques pour la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x-z}$$

Markoff *) Sonin **) et Perron ***) s'occupaient du même problème. La question générale de la convergence des formules des quadratures mécaniques dans un intervalle infini était duscutée pour la première fois par Ouspensky *). Dans son travail „Sur la convergence des formules des quadratures mécaniques entre des limites infinies" il a etabli le resultat important suivant.

La formule des quadratures mécaniques

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, f(x)\, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n$$

est convergente sous la condition

$$\lim_{n \to \infty} m_{2n} \left(\frac{lgn}{n}\right)^{2n} = 0$$

pour toute fonction intégrable $f(x)$, qui satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < |x|^s, \qquad |x| > N,$$

ou N est un nombre assez grand.

Le but de cette note est de montrer que ces conditions penvent être étandus sensiblement par rapport au caractère de la croissance de la fonction $f(x)$ aussi bien par rapport des moments.

§ 2. Soit $F(x)$ une fonction entière

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

dont tous les coefficients sont des nombres positifs.

---

*) Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues. Acta Mathematica T. 19.

**) Sur l'intégrale $\int_a^b F(x)\frac{dx}{z-x}$. Mémoires de l'Academie des Sciences de St.-Petersbourg. T. 38. S. VII, № 14.

***) Erweiterung eines Markoffschen Satzes über Konvergenz gewisser Ketten brüche: Mathematische Annalen Bd. 74, 1913.

****) Bulletin de l'Academie des Sciences de Petrograde. 1916.

Supposons que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n m_{2n}$$

est convergente.

Alors nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 1.

La formule des quadratures mécaniques (1) est convergente pour

$$f(x) = F(x^2).$$

Posons pour simplifier l'écriture.

$$m_k(h) = \int_{-h}^{h} p(x)\, x^k dx,$$

$$m_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} A_{in} x_{in}^k$$

et

$$m_{k,n}(h) = \sum_{|x_{in}| \leqslant h} A_{in}\, x_{in}^k,$$

où la sommation est etendue sur les valeurs x_{in} appartenantes à l'intervalle $(-h, h)$.

En intégrant la série

$$F(x^2) = c_0 + c_1 x^2 + \ldots + c_n x^{2n} + \cdots,$$

qui est uniformement convergente dans l'intervalle $(-h, h)$, nous obtenons

$$\int_{-h}^{h} p(x)\, F(x^2)\, dx = \sum_{k=0}^{n} c_k m_{2k}(h) + R_n(h). \tag{2}$$

En même temps

$$\sum_{|x_{is}| \leqslant h} A_{is}\, f(x_{is}) = \sum_{k=0}^{n} c_k m_{2k,s}(h) + R_{n,s}(h), \tag{3}$$

La série

$$S = c_0 + c_1 m_2 + \ldots + c_n m_{2n} + \ldots \tag{4}$$

st majorante pour la série (2) parceque

$$m_{2n} \geqq m_{2n}(h).$$

La même série est majorante pour la série (3) et pour la série

$$S_s = c_0 + c_1 m_{2,s} + \ldots + c_n m_{2n,s} + \ldots \tag{5}$$

En effet il est evident, que

$$m_{2n,\,s} \geqq m_{2n,\,s}\ (h).$$

D'autre part l'inégalité de Grommer *) montre, que

$$m_{2k} \geqq m_{2k,s}\,.$$

Designons par R_n le reste de la série (4). Soit ε un nombre positif arbitraire. Prenons un nembre n_0 assez grand pour, que l'on a

$$R_n < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \geqq n_0.$$

Pour ces valeurs de n on a aussi

$$R_n\ (h) < \frac{\varepsilon}{3},$$

quel que soit h.

Il est aisé de voir, que

$$\left| S - \int_{-h}^{h} p\ (x)\ F\ (x^2)\ dx \right| < \sum_{k=0}^{n_0} c_k\ \Big((m_{2k} - m_{2k}\ (h)\Big) + \frac{2}{3}\ \varepsilon.$$

Choisissons maintenant um nombre H ainsi, qu'il soit

$$\sum_{k=0}^{n_0} c_k \Big(m_{2k} - m_{2k}\ (h)\Big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $h > H$.

Alors on a

$$\left| S - \int_{-h}^{h} p\ (x)\ F\ (x^2)\ dx \right| < \varepsilon$$

pour $h > H$.

Il suit de là

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p\ (x)\ F\ (x^2)\ dx = c_0 + c_1 m_2 + \ldots + c_n m_{2n} + \ldots$$

Nous avons aussi

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A_{in}\, F\ (x_{in}^{\ 2}).$$

Considérons la différence

$$S - S_n.$$

*) Ganze transcendente Functionen mit lauter reelen Nullstellen. Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 144. 1914.

On trouve aisement l'inégalité

$$| S - S_n | < \sum_{k=0}^{n_0} c_k \, (m_{2k} - m_{2k,\, n}) + \frac{2}{3}\,\varepsilon.$$

Prenons maintenant $n > 2n_0$. Pour cette valeur de n,

$$m_{2k} = m_{2k,n}, \qquad k \leqq n_0$$

et par suite

$$\sum_{k=0}^{n_0} c_k \, (m_{2k} - m_{2k,\, n}) = 0.$$

On obtient ainsi

$$| S - S_n | < \varepsilon, \qquad n > 2n_0 \, (\varepsilon).$$

Il suit delà

$$\sum_{i=1}^{n} A_{in} \; F\,(x_{in}^{\,2}) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} p\,(x)\; F\,(x^2)\; dx$$

quand n croit infiniment.

§ 3. Il est très important pour ce qui suit d'éstimer la somme

$$\sum_{| x_{in} | > h} A_{in} \, F\,(x_{in}^{\,2})$$

étandue sur les valeurs $| x_{in} | > h$.

Supposons que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} p\,(t)\; dt$$

est une fonction continue de x et que les moments satisfont à la condition

(6) $$m_{2n} < C\,\,(2n+p)!\; l^n, \; p > 0, \; l > 0.$$

Dans ce cas, comme l'a démontré P o l y a *)

$$\sum_{a \leqq | x_{in} | \leqq b} A_{in} \longrightarrow \int_{a}^{b} p\,(x)\; dx$$

quand n croit infiniment.

*) Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheintlichkeitsrechnung und das Momenten problem. Mathematische Zeitschrift Bd. 8. 1920.

On peut aisement tirer delà *) que, si la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a, b),

$$\sum_{a \leqq |x_{in}| \leqq b} A_{in} f(x_{in}) \longrightarrow \int_a^b p(x) f(x)\, dx.$$

En utilisant ces resultats nous démontrons le théorème suivant.

Téorème 2.

Si la formule des quadratures mécaniques

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n$$

est convergente, l'inégalité

$$\left| \sum_{|x_{in}| > H} A_{in} f(x_{in}) \right| < \varepsilon$$

est satisfaite, pour les valeurs assez grandes de n, si H est suffisament grand.

On a

$$\sum_{|x_{in}| > h} A_{in} f(x_{in}) = \sum_{i=1}^{n} A_{in} f(x_{in}) - \sum_{|x_{in}| \leqq h} A_{in} f(x_{in})$$

d'où l'on tire

$$\left| \sum_{|x_{in}| > h} A_{in} f(x_{in}) \right| \leqq \left| \sum_{i=1}^{n} A_{in} f(x_{in}) - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx - \int_{-h}^{h} p(x) f(x)\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{-h}^{h} p(x) f(x)\, dx - \sum_{|x_{in}| \leqq h} A_{in} f(x_{in}) \right|.$$

---

*) Stiltjes. Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques.

Prenons un nombre H assez grand pour que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) \, dx - \int_{-H}^{H} p(x) f(x) \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

où ε est un nombre positif arbitraire.

De ce que nous avons dit il est aisé de voir, qu'on peut choisir un nombre N tel, que

$$\left| \int_{-H}^{H} p(x) f(x) \, dx - \sum_{|x_{in}| \leq H} A_{in} f(x_{in}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n > N$$

et

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) \, dx - \sum_{i=1}^{n} A_{in} f(x_{in}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n > N.$$

Ces inégalités nous donnent

$$\left| \sum_{|x_i| > H} A_{in} f(x_{in}) \right| < \varepsilon, \quad n > N.$$

Le théorème est démontré.

Nous pouvons appliquer maintenant ces resultats à la fonction $F(x^2)$ et nous obtenons

$$\sum_{|x_{in}| > H} A_{in} F(x_{in}^2) < \varepsilon, \; n > N.$$

§ 4. Les resultats obtenus permettent d'établir aisement le théorème

Théorème 3.

Si la formule des quadratures mécaniques

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) F(x) \, dx = A_{1n} F(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} F(x_{nn}) + R_n$$

est convergente pour une fonction $F(x)$ qui est positive pour les valeurs assez grandes de $|x|$, la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) \, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + r_n$$

est convergente pour toute fonction intégrable $f(x)$ qui satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < F(x), \quad |x| > L.$$

L étant un nombre assez grand.

En partant de l'inégalité

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} A_{in} f(x_{in}) \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_{-h}^{+h} p(x) f(x)\, dx - \sum_{|x_{in}| \leqslant h} A_{in} f(x_{in}) \right| +$$

$$+ \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx - \int_{-h}^{+h} p(x) f(x)\, dx \right| +$$

$$+ \left| \sum_{|x_{in}| > h} A_{in} f(x_{in}) \right|$$

choisissons H' de telle manière qu'il soit

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx - \int_{-h}^{h} p(x) f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad h \geqq H',$$

où ε est un nombre positif donné à l'avance. Nous pouvons aussi, conformemant à le théorème 2, indiquer le nombre $H \geqq \text{Max}\,(H', L)$ tel que l'on a

$$\sum_{|x_{in}| > H} A_{in} F(x_{in}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $n > N_1$.

Il suit delà, que

$$\left| \sum_{|x_{in}| > H} A_{in} f(x_{in}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Remarquons que l'inégalité

$$\left| \int_{-H}^{H} p(x) f(x)\, dx - \sum_{|x_{in}| \leqslant H} A_{in} f(x_{in}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tienne place pour $n > N_2$.

On conclat delà, que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} A_{in} f(x_{in}) \right| < \varepsilon$$

pour $n > N = \text{Max}\,(N_1, N_2)$.

Le théorème est demontré.

§ 5. Comme une conséquence immédiate des théorèmes precedentes on a la proposition.

Théorème 4.

La formule des quadratures mécaniques

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, f(x)\, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n$$

est convergente pour toute fonction intégrable $f(x)$, qui pour les valeurs suffisament grandes du $|x|$ reste plus petite en valeur absolue, que $F(x^2)$ où

$$F(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad c_i \geqq 0 \ (i = 0, 1, \ldots)$$

est une fondction entière tranoscendente et la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i\, m_{2i}$$

est convergente.

Signalons une forme particulière de la fonction de comparaison $F(x)$

$$(7) \qquad F(x) = A\left(\frac{1}{m_0} + \frac{\mu x}{m_2} + \ldots + \frac{\mu^n x^n}{m_{2n}} + \ldots\right), \quad 0 < \mu < 1.$$

A est un nombre positife arbitraire.

Si les moments croissent trop lentement pour que la série (7) représente une fonction entière nous pouvons toujours trouver tels nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ que la fonction

$$\Phi(x) = \frac{1}{\lambda_0 m_0} + \frac{\mu x}{\lambda_1 m_2} + \ldots + \frac{\mu^n x^n}{\lambda_n m_{2n}} + \ldots$$

sera une fonction entière et prendre cette fonction $\Phi(x)$ comme une fonction de comparaison.

Il est important pour le suivant de remarquer que

$$\sum_{i=1}^{n} A_{in} \frac{|x_{in}|^r}{|x_{in}|^s + \lambda^2} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)\,|x|^r}{|x|^s + \lambda^2} dx$$

quand n croit infiniment.

En effet on a evidement

$$\frac{|x|^r}{|x|^s + \lambda^2} < x^{2M}, \quad |x| > N,$$

où M et N sont des nombres suffisament grands et la fonction

$$F(x) = x^M$$

satisfait aux conditions du théorème 4.

§ 6. Ayant en vue les applications nous démontrons qu'on peut prendre une autre fonction comme la fonction de comparaison. Considérons la fonction

$$\Phi(x) = \frac{F(x^2)}{|x|^s + \lambda^2}$$

où

$$F(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad c_i \geqq \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

est une fonction entière transcendente.

Soit

$$s = 2k + 2\sigma \qquad 0 \leqq \sigma < 1$$

k est un nombre entier.

Théorème 5.

La formule des quadratures mécaniques

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x) F(x^2)}{|x|^s + \lambda^2} dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{in} F(x_{in}^2)}{|x_{in}|^s + \lambda^2} + R_n$$

est convergente, si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k}\, m_{2n-2}^{\sigma}\, m_{2n}^{1-\sigma}$$

est convergente.

Soit

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

où

$$F_1(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k$$

et

$$F_2(x) = c_{k+1} x^{k+1} + \ldots + c_n x^n \ldots$$

La formule des quadratures converge pour la fonction

$$\Phi_1(x) = \frac{F_1(x^2)}{|x|^s + \lambda^2}$$

parceque $\Phi_1(x)$ reste finie pour toutes les valeurs de x.

Pour établir la convergence des quadratures pour

$$\Phi_2(x) = \frac{F_2(x^2)}{|x|^s + \lambda^2}$$

nous avons à peu prés la même marche à suivre que dans la démonstrations du théorème 1.

En intégrant la série

$$\Phi_2(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n x^{2n}}{|x|^s + \lambda^2} \tag{8}$$

terme à terme on obtien

$$\int_{-h}^{h} p(x)\, \Phi_2(x)\, dx = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n \int_{-h}^{h} \frac{p(x)\, x^{2n}}{|x|^s + \lambda^2}\, dx.$$

L'intégrale

$$\int_{-h}^{h} \frac{p(x)\, x^{2n}}{|x|^s + \lambda^2}\, dx \leqq \int_{-h}^{h} p(x)\, |x|^{2n-s}\, dx.$$

En appliquant la formule généralisée de Schwarz, nous avons

$$\int_{-h}^{h} p(x)\, |x|^{2n-s}\, dx \leqq$$

$$\leqq \left(\int_{-h}^{h} p(x)\, x^{2n-2k-2}\, dx \right)^{\sigma} \left(\int_{-h}^{h} p(x)\, x^{2n-2k}\, dx \right)^{1-\sigma}$$

La série

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} c^n \cdot m_{(n-k-1)}^{\sigma} \cdot m_{2(n-k)}^{1-\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k}\, m_{2n-2}^{\sigma} \cdot m_{2n}^{1-\sigma} \tag{9}$$

est majorante pour la série (8).

En répetant les raisonements du théorème 1 on démontre aisément que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, \Phi_2(x)\, dx = \sum_{r=k+1}^{\infty} c_r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)\, x^{2r}}{|x|^s + \lambda^2}\, dx.$$

Prenons maintenant en considération la somme

$$\sum_{i=1}^{n} A_{in}\, \Phi_2(x_{in}) = \sum_{r=k+1}^{\infty} c_r \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{in}\, x^{2r}}{|x_{in}|^s + \lambda^2}\,.$$

De l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{in} \mid x_{in} \mid^{2r-s} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} A_{in} \mid x_{in} \mid^{2(r-k-1)} \right)^{\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{in} \mid x_{in} \mid^{2(r-1)} \right)^{1-\sigma}$$

on tire au moyen de l'inégalité de Grommer la conclusion, que

$$\sum_{i=1}^{n} A_{in} \mid x_{in} \mid^{2r-s} \leqq m_{2(r-k-1)}^{\sigma} \cdot m_{2(r-k)}^{1-\sigma}.$$

La série (9) est majorante pour la série

$$\sum_{r=k+1}^{\infty} c_r \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{in}\, x_{in}^{2r}}{\mid x_{in} \mid^{s} + \lambda^2}$$

quel que soit n.

Considérons la différence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, \Phi_2(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} A_{in}\, \Phi_2(x_{in}) =$$

$$= \sum_{r=k+1}^{m} c_r \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)\, x^{2r}}{\mid x \mid^{s} + \lambda^2}\, dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{in}\, x_{in}^{2r}}{\mid x_{in} \mid^{s} + \lambda^2} \right) +$$

$$+ \sum_{r=m+1}^{\infty} c_r \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)\, x^{2r}}{\mid x \mid^{s} + \lambda^2}\, dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{in}\, x_{in}^{2r}}{\mid x_{in} \mid^{s} + \lambda^2} \right).$$

Prenons m assez grand pour que le reste de la série

$$\sum_{r=m+1}^{\infty} c_r\, m_{2(r-k-1)}^{\sigma} \cdot m_{2(r-k)}^{1-\sigma} < \frac{\varepsilon}{3}$$

On a alors

$$\sum_{r=m+1}^{\infty} c_r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)\, x^{2r}}{\mid x \mid^{s} + \lambda^2}\, dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{r=m+1}^{\infty} c_r \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{in}\, x_{in}^{2r}}{\mid x_{in} \mid^{s} + \lambda^2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La valeur de m étant ainsi fixée choisissons une telle valeur n_0, qu'il soit, si $c_r > 0$,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)\, x^{2r}}{\mid x \mid^{s} + \lambda^2}\, dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{in}\, x_{in}^{2r}}{\mid x_{in} \mid^{s} + \lambda^2} \right| < \frac{\varepsilon}{3\, c_r m}, \quad r = k+1, \ldots . m$$

pour $n > n_0$.

On tire de là

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, \Phi_2(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} A_{in}\, \Phi_2(x_{in}) \right| < \varepsilon, \quad n > n_0.$$

La formule des quadratures est convergente pour la fonction $\Phi_2(x)$ et par conséquent elle est convergente pour la fonction $\Phi(x)$.

§ 7. Ayant en vue que pour les valeurs suffisament grandes de $|x|$ a fonction $\Phi(x)$ est du même ordre que la fonction

$$\frac{F(x^2)}{|x|^s}$$

nous pouvons énoncer la proposition fondamental.

Théorème 6.

La formule des quadratures mécaniques

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, f(x)\, dx = A_{1n}\, f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn}\, f(x_{nn}) + R_n$$

est convergente sous la condition

$$m_{2n} \leqq M\, (2n+p)\,!\; l^n$$

pour toute fonction intégrable $f(x)$, qui satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < \frac{F(x^2)}{|x|^{2k+2\sigma}}, \quad 0 \leqq \sigma < 1;$$

pour les valeurs assez grandes de $|x|$.

La fonction

$$F(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad c_n \geqq 0 \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

est une fonction entière transcendente et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k}\, m_{2n-2}^{\sigma}\, m_{2n}^{1-\sigma} \qquad (10)$$

est supposée convergente. Le nombre k est entier

Ce théorème offre un grand nombre d'applications.
Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{2n-2}^{\sigma}\, m_{2n}^{1-\sigma}}{m_{2n+2k}}$$

est convergente nous pouvons affirmer la convergence des quadratures pour la fonction $f(x)$, qui satisfait à la condition

$$|f(x)| < \frac{F(x^2)}{|x|^{2k+2\sigma}}, \quad |x| > L$$

où

$$F(x) = \frac{1}{m_0} + \frac{x}{m_2} + \ldots + \frac{x^n}{m_{2n}} + \ldots$$

est une fonction entière transcendente.

Si la fonction $F(x)$ n'est pas une entière transcendente nous pouvons choisir une suite des nombres positifs

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n \ldots$$

ainsi que la fonction

$$\Phi(x) = \frac{1}{\lambda_0 m_0} + \frac{x}{\lambda_1 m_2} + \ldots + \frac{x^n}{\lambda_n m_{2n}} + \ldots$$

sera une fonction entière et prendre la fonction $\Phi(x^2)$ au lieu de $F(x^2)$.

On peut tirer d'autres conséquences.

Théorème 7.

La formule des quadratures mécaniques

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) \, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n$$

est convergente sous la condition

$$m_{2n} \leqq M (2n+p)! \, a^{2n}$$

pour toute fonction inégrable $f(x)$ qui satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < A \frac{e^{\frac{|x|}{a}}}{|x|^{p+1+\varepsilon}}, \quad |x| > L, \quad \varepsilon > 0$$

où L est un nombre suffisament grand.

Soit $p = 2l + 2\lambda$. Nombre l est un entier et $0 \leqq \lambda < 1$.
Posons alors

$$F(x^2) = P \, ch \frac{x}{a}$$

et choisissons

$$k = l, \quad 2\sigma = 2\lambda + \alpha$$

si $2\lambda < 1$.

Il est aisé de voir, que

$$c_{n+k}\, m_{2n-2}^{\sigma}\; m_{2n}^{1-\sigma} < \frac{B}{n^{\alpha}},$$

où B est une constante convenable.

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k}\; m_{2n-2}^{\sigma} \cdot m_{2n}^{\sigma} \tag{11}$$

est convergente, si $\alpha > 1$.

Quand $2\lambda \geqq 1$ posons

$$k = l + 1, \qquad 2\sigma = 2\lambda + \alpha - 2.$$

On a alors

$$c_{n+k}\; m_{2n-2}^{\sigma}\; m_{2n}^{1-\sigma} < \frac{B'}{n^{\alpha}},$$

où B' est une constante proprement choisie.

Si $\alpha > 1$, la série (11) est convergente. Il suit de là la convergence des quadratures pour chaque fonction inégrable $f(x)$ satisfaisante à l'inégalité

$$|f(x)| < C\, \frac{ch\, \frac{x}{a}}{|x|^{p+\alpha}}, \quad \alpha > 1$$

pour les valeurs suffisament grandes de la variable.

En remarquant maintenant que la fonction $ch\, \frac{x}{a}$ est du même ordre de grandeur que $e^{\frac{|x|}{a}}$ pour les grandes valeurs de $|x|$ nous obtenons la convergence de la formule des quadratures pour la fonction $f(x)$, qui satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < A\, \frac{e^{\frac{|x|}{a}}}{|x|^{p+\alpha}}, \quad \alpha > 1$$

pour les valeurs du $|x|$ suffisament grandes.

§ 8. Les conditions de la convergence rélatives à la croissance de la fonction $f(x)$ peuvent être precisées dans les cas speciaux.

Considérons comme un exemple les quadratures

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n \tag{12}$$

La formule des quadratures (12) est convergente pour toute fonction intégrable $f(x)$, qui satisfait à la condition

$$|f(x)| < A\frac{e^{x^2}}{|x|^{\alpha}}, \quad \alpha > 1$$

pour les valeurs suffisament grandes de $|x|$.

En effet posons

$$F(x) = e^{x}$$

et

$$k = 0, \qquad 2\sigma = \alpha.$$

On a alors

$$c_{n+k}\, m_{2n-2}^{\sigma}\, m_{2n}^{1-\sigma} < \frac{B}{n^{\sigma+\frac{1}{2}}}.$$

La sèrie (10) est convergente pour $\alpha > 1$. Il suit de là la convergence des quadratures sous les conditions mentionnées.

§ 9. Les conditions de la convergence rélatives aux moments peuvent être étandues dans le cas où seulement un des limites d'intégration devient infini.

Pour le faire aussi simple que possible signalons une corréspondance étroite qui éxiste entre les formules des quadratures mécaniques avec deux limites d'intégration infini et celles rélatives aux cas où seulement un des limites a une valeur infinie.

Soit

$$(13) \quad \int_{c}^{\infty} p(x)\, f(x)\, dx = A_{1n}\, f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn}\, f(x_{nn}) + R_n$$

une d'elles.

Posons

$$P(x) = |x|\, p(x^2 + c)$$

et considérons la formule

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P(u)\, F(u)\, du = C_{1e}\, F(u_{1e}) + \ldots + C_{ee}\, F(u_{ee}) + R_e.$$

Les quantités $x_{11}, x_{12}, \ldots x_{1n}$ sont les racines de l'équation

$$\theta_n(x) = 0,$$

où $\theta_n(x)$ est un polynome bien détérminé du degré n.

Ce polynome est caractérisé par la propriété.

(15) $$\int_c^\infty p(x)\,\theta_n(x)\,f(x)\,dx = 0,$$

où $f(x)$ est un polynome du degré non supérieur à $n - 1$.

En même temps les quantités $u_{1e}, \ldots u_{ee}$ sont les racines de l'équation

$$\Theta_e(u) = 0$$

du degré e. Le polynome $\Theta_e(u)$ est caractérisé par la rélation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(u)\,\Theta_e(u)\,F(u)\,du = 0$$

ayant place pour tout polynome $F(u)$ du degré non supérieur à $e - 1$.

Par la transformation $x = u^2 + c$ nous passons de la rélation (16) à la rélation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(u)\,\theta_n(u^2 + c)\,f(u^2 + c)\,du = 0.$$

Polynome $\varphi(u) = f(u^2 + c)$ est un polynome arbitraire, qui ne contient que les puissances paires de x.

En remarquant que l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(u)\,\theta_n(u^2 + c)\,\psi(u)\,du = 0$$

est evidement satisfaite pour chaque polynome impaire $\psi(u)$ nous en deduisons la rélation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(u)\,\theta_n(u^2 + c)\,F(u)\,du = 0,$$

où

$$F(u) = \varphi(u) + \psi(u)$$

est un polynome arbitraire de u dont le degré et plus petit que $2n$.

Il suit de là, que

$$\Theta_{2n}(u) = \theta_n(u^2 + c)$$

et par conséquence

(16) $$u_{i,\,2n} = -u_{2n-i+1,\,2n}, \quad u^2_{i,\,2n} + c = x_{in}, \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

De la formule bien connue

$$A_{in} = \int_c^{\infty} p(x) \frac{\theta_n(x)}{(x - x_{in})\, \theta_n'(x_{in})}\, dx$$

il suit, que

$$A_{in} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(u) \frac{\theta_n(u^2 + c)}{(u^2 - u_{in}^2)\, \theta_n'(u_{in}^2 + c)}\, du.$$

En observant, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(u) \frac{u\, \theta_n(u^2 + c)}{(u^2 - u_{in}^2)\, \theta_n'(u_{in}^2 + c)}\, du = 0$$

et que

$$\Theta'_{2n}(u) = 2u\, \theta_n'(u^2 + c)$$

il est aisé d'y déduir, que

$$A_{in} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} P(u) \frac{\Theta_{2n}(u)}{(u - u_{i,\,2n})\, \Theta_{2n}'(u_{in})}\, du,$$

ou

$$(17) \qquad A_{in} = 2C_{i,\,2n} = 2C_{2n-i+1,\,2n} \; (i = 1, 2, \ldots n).$$

Les rélations (16), (17) établissent une corréspondance entre les formules (13) et (14).

Le moment M_{2n} est donné par la formule

$$M_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(u)\, u^{2n} du = \int_c^{\infty} p(x)\, (x - c)^n dx$$

et on a

$$M_{2n} = m_n - \binom{n}{1} c m_{n-1} + \binom{n}{2} c^2 m_{n-2} + \ldots + (-1)^n c^n.$$

Si les moments

$$m_n < M\, (2n + p)!\, a^n$$

les moments M_{2n} satisfont à l'inégalité

$$M_{2n} < M\, (2n + p)!\, b^{2n},$$

où

$$b^2 = a + |c|.$$

On tire de là en faisant usage du resultat indiqué par Polya, que

$$\sum_{x_{in} < x} A_{in} \rightarrow \int_c^x p(x)\, dx$$

quand n croit infiniment, si les moments m_n satisfont à la condition

$$m_n < M\,(2n+p)!\; a^n .$$

§ 10. En répetant les mêmes raisonements, que nous avons fait dans les paragraphes précédants on démontre les propositions suivantes.

Théorème 8.

La formule des quadratures mécaniques

$$(18) \quad \int_c^\infty p(x)\, f(x)\, dx = A_{1n}\, f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn}\, f(x_{nn}) + R_n$$

est convergente sous la condition

$$(19) \qquad m_n < M\,(2n+p)!\; a^{2n}$$

pour toute fonction intégrable $f(x)$, qui pour les valeurs assez grandes de x satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < \frac{F(x^2)}{x^{2k+2\sigma}} \quad 0 \leqq \sigma < 1;\; k \text{ entier},$$

où

$$F(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots c_n \geqq 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

est une fonction entière transcendante et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k}\, m_{2n-2}^{\sigma}\, m_{2n}^{1-\sigma}$$

est convergente.

Théorème 9.

La formule des quadratures mécaniques (18) est convergente sous la condition (19) pour toute fonction $f(x)$ qui satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < A \frac{e^{\frac{\sqrt{x}}{a}}}{x^{\frac{1}{2}(p+1)+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0$$

pour les valeurs suffisament grandes de x.

§ 11. Les conditions du théorème 9 peuvent être précisées dans le cas speciaux. Considérons par exemple les quadratures

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} f(x)\, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n, \quad \lambda > -1.$$

Ces quadratures sont convergentes pour toute fonction intégrable $f(x)$ satisfaisante à la condition

$$|f(x)| < A \frac{e^x}{x^{\lambda+1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad x > L$$

où L est suffisament grand.

О сходимости формул механических квадратур в бесконечном промежутке.

А. Журавский.

Предметом настоящей статьи служит вопрос о сходимости формул механических квадратур, относящихся к бесконечному промежутку. Автор устанавливает следующее общее предложение.

Формула механических квадратур

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n$$

сходится при условии, что

$$(**) \qquad m_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, x^{2n}\, dx < M \; (2n+p)!\; a^{2n}$$

для всякой интегрируемой функции $f(x)$, которая при достаточно больших по абсолютной величине значениях x удовлетворяет неравенству

$$({}_{*}{}^{*}{}_{*}) \qquad |f(x)| < \frac{F(x^2)}{|x|^{2k+2\sigma}}, \quad 0 \leqq x < 1 \quad (k \text{— число целое}),$$

где

$$F(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots \qquad c_n \geqq 0$$

есть целая трансцендентная функция и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k}\, m_{2n-2}^{\sigma}\, m_{2n}^{1-\sigma}$$

сходится.

Из этой теоремы следует в частности, что формула механических квадратур (*) сходится при условии (**) для всякой интегрируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$|f(x)| < A\frac{e^{\frac{|x|}{a}}}{|x|^{p+1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

при достаточно больших значениях $|x|$.

Последнее условие может быть улучшено в отдельных случаях.

Так, например, формула механических квадратур

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = A_{11} f(x_{11n}) + \ldots + A_{1n} f(x_{nn}) + R_n$$

сходится, если интегрируемая функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x)| < A\frac{e^{x^2}}{|x|^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

при $|x|$ достаточно большом.

Если только один из пределов интегрирования бесконечный, то условие (**) может быть заменено условием

$$(\,{}^{*}_{*}\,{}^{*}_{*}\,) \qquad m_n < M\,(2n+p)!\; a^n.$$

Формула механических квадратур

$$\int_{c}^{\infty} p(x)\, f(x)\,dx = A_{in} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n$$

сходится при условии $({}^{*}_{*}\,{}^{*}_{*})$ для всякой интегрируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей при достаточно больших значениях x неравенству $({}_{*}{}^{*}{}_{*})$.

Сходимость формулы

$$\int_{c}^{\infty} p(x)\, f(x)\,dx = A_{1n} f(x_{1n}) + \ldots + A_{nn} (f(x_{nn}) + R_n$$

при условии $({}^{*}_{*}\,{}^{*}_{*})$ может быть гарантирована для всякой интегрируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$|f(x)| < A\frac{e^{\frac{\sqrt{x}}{a}}}{x^{\frac{1}{2}(p+1)+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0$$

при достаточно больших значениях x.

Это условие может быть в отдельных случаях значительно улучшено.

Например, квадратуры

$$\int_0^\infty x^\lambda e^{-x} f(x)\, dx = A_{11} f(x_{11}) + \ldots + A_{nn} f(x_{nn}) + R_n \quad \lambda > -1.$$

сходятся при условии, что

$$|f(x)| < A \frac{e^x}{x^{\lambda+1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad x > L,$$

где L достаточно большое число.

Sum-formulae containing numerical functions.

By *N. S. Koshliakov.*

The present paper contains the investigation and applications of the sum-formulae concerning sums of the following form

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} a_n f(n),$$

where a_n denotes a certain arithmetical function.

The formulae of this kind were considered by Voronoï, *) Sierpinski,**) and Landau***); namely when a_n denotes the number of divisors of n, or the number of integral solutions of the equation $x_1^2+x_2^2=n$ and the like.

Here we consider the case, when a_n denotes the arithmetical function, subject to some sufficiently general conditions.

In the first paragraph of our paper we deal with the fundamental auxiliary problem of finding the function $\sigma(-z)$ having on the plane of the variable $z=x+iy$ an illimited number of simple poles in $z=1, 2, 3, \ldots$; the respective residues being equal to $a_1, a_2, a_3, \ldots$ This function $\sigma(-z)$ is analogous to $cotg \pi z$ and to Voronoï's function $g(-z)$ ****). It can be found by the method indicated by Voronoï, but we prefer to develop an independent method which is simpler and at the same time more elementary *****).

The following two paragraphs contain the deduction of sum-formulae and their applications. In the last paragraph we investigate some particular cases of the function a_n; the number of examples related

---

*) Voronoï. Annales de l'École Norm. (3). 21. (1904).

**) Sierpinski. Prace Matem. fizyczne. t. XVIII (1907).

***) Landau. Vorlesungen über Zahlentheorie. Bd. II. (1927).

****) Voronoï. loc. cit. p. 264.

*****) We note, that when this paper has been already written, the author became acquainted with the lately publishid work by A. Oppenheim (Proc. of the Lond. Math. Soc. (2) v. 26, p. 4. (1927)), who gives, by applications of Voronï's method, the expansion of the function anologous to $\sigma(-z)$, in the region of its poles, corresponding to the particular case of our theory, when a_n denotes the number of integral solutions of the equation $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2p}^2=n$.

of the theory of elliptic functions can be considerably increased by using formulae of Hermite's paper: „Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques“ (Oeuvres complètes t. II. p. 242).

§ 1. The study of the function $\sigma(z)$.

1. Denoting by ν a positive integer, let us consider the arithmetical function a_n such that $| a_n | = O(n^{\nu-1+\varepsilon})$, where ε denotes an arbitrarily small positive number. Let further $\varphi(s)$ denote a function of the complex variable $s = \tau + it$, regular at the point $s = 0$ and capable of being represented for all values of $\tau > \nu$ by an absolutely convergent Dirichlet's series

$$(1) \qquad \varphi(s) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s} .$$

Together with the function $\varphi(s)$ we consider the function $\psi(s)$ also regular at the origin and representable by a series

$$(2) \qquad \psi(s) = \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s} ,$$

absolutely convergent on the straight line $\tau = \beta_0 > \nu$.

Let us suppose that two constant numbers a and $b > 0$ can be found, such that the transformation formula

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nb\rho} = \frac{a}{\rho^{\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\frac{nb}{\rho}}, \quad \rho > 0$$

holds good where it is assumed $a_0 = \varphi(0)$, $b_0 = -\psi(0)$.

The class of functions thus defined has some common properties, the study of which is the chief aim of the present paper.

2. In the following it is essential to study the properties of the function $\sigma(z)$ of the complex variable $z = x + iy$, defined by the following expansion

$$(\mathrm{II}) \qquad \sigma(z) = -2abz^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^{\frac{\nu-1}{2}}} K_{\nu-1}(2b\sqrt{nz}).$$

Here

$$(3) \qquad K_\mu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{1}{2}\mu i\pi} H'_\mu(iz).$$

and $H'_\mu(z)$ denotes the Hankel's function of the first kind, connected with the cylindrical functions $I_\mu(z)$ and $Y_\mu(z)$ by the relation $H'_\mu(z) = I_\mu(z) + i\,Y_\mu(z)$.

In (II) $\sqrt{z}$ represents that value of the radical whose real part is positive : $R(\sqrt{z}) > 0$.

As to the function $K_{\nu-1}(2b\sqrt{nz})$ we notice the following integral representation *)

$$(4) \qquad K_{\nu-1}(2b\sqrt{nz}) = \frac{1}{2}(b\sqrt{nz})^{\nu-1}\int_0^\infty e^{-\tau-\frac{b^2nz}{\tau}}\frac{d\tau}{\tau^\nu},$$

valid for all the complex values of z with a positive real part.

In the following we make use of this integral relation. For the function $z^{\frac{\nu-1}{2}}K_{\nu-1}(2b\sqrt{nz})$ the negative part of the real axis serves as a cut i. e. that $z^{\frac{\nu-1}{2}}K_{\nu-1}(2b\sqrt{nz})$ represents two different analytic functions, according to the sign of the imaginary part of z. Let us find the value of the difference

$$\Delta = \left\{(-x+i\delta)^{\frac{\nu-1}{2}}K_{\nu-1}\left(2b\sqrt{n(-x+i\delta)}\right)\right\}_{\delta \xrightarrow{>0} 0} -$$

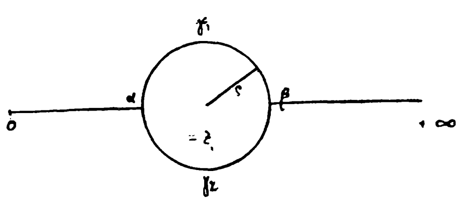
$$-\left\{(-x-i\delta)^{\frac{\nu-1}{2}}K_{\nu-1}\left(2b\sqrt{n(-x-i\delta)}\right)\right\}_{\delta \xrightarrow{>0} 0}$$

using the following integral given by Sonin

$$z^{\frac{\nu-1}{2}}K_{\nu-1}(2b\sqrt{nz}) =$$

$$(5) \qquad = \frac{\nu!}{2b^\nu n^{\frac{\nu}{2}}}\int_0^\infty \frac{t^{\nu-\frac{1}{2}}I_{2\nu-1}(2b\sqrt{nt})}{(t+z)^{\nu+1}}dt, \quad R(\sqrt{z}) > 0.$$

Let $z_1 = -x < 0$ be a point situated on the negative part of the real axis.



The function under the sign of the integral (5) has the point $t = -z$ for a pole of the $\nu+1$ order. When the difference $z - z_1$ tends to zero, this pole coincides with the point $-z = x$, situated on

*) Watson. A treatise on the theorie of Bessel functions. p. 183.

the positive part of the real axis. Let us describe around the latter point a circle $\alpha\gamma_1\beta\gamma_2\alpha$ (fig. 1) of an arbitrary small radius ρ. It is easy to prove by means of the formula (5) that

$$\Delta = \frac{\nu!}{2b^{\nu} n^{\frac{\nu}{2}}} \lim_{\rho \to 0} \int_{\alpha\gamma_1\beta\gamma_2\alpha} \frac{t^{\nu-\frac{1}{2}} I_{2\nu-1}(2b\sqrt{nt})}{(t+z_1)^{\nu+1}}\, dt = -$$

$$= -\frac{\pi i}{b^{\nu} n^{\frac{\nu}{2}}} D_x^{(\nu)} \left[x^{\nu-\frac{1}{2}} I_{2\nu-1}(2b\sqrt{nx}) \right],$$

but

$$D_x^{(\nu)} \left[x^{\nu-\frac{1}{2}} I_{2\nu-1}(2b\sqrt{nx}) \right] = b^{\nu} n^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}(2b\sqrt{nx})$$

and consequently

$$\Delta = -\pi i x^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}(2b\sqrt{nx}). \tag{6}$$

3. We proceed now to study the properties of the function $\sigma(z)$.

Theorem I. The infinite series (II) defining the function $\sigma(z)$ converges uniformly in any point of the region, characterized by the inequality

$$R(\sqrt{z}) \geqslant \sqrt{x_0}, \tag{7}$$

where x_0 denotes any positive number.

It is easy to establish the theorem using the following formula, known in the theory of cylindrical functions *)

$$K_{\nu}(2\sqrt{z}) = \vartheta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-2\sqrt{z}}}{\sqrt[4]{z}}, \quad |\vartheta| < 1.$$

Theorem II. For all values of z defined by the inequality (7) the modulus of $\sigma(z)$ satisfies the O-condition

$$|\sigma(z)| = O(|z|^{\frac{\nu-1}{2}}). \tag{8}$$

The proof of the theorem is almost evident.

Theorem III. For all values of z with a positive real part the function $\sigma(z)$ split into series of rational fractions as follows

$$\sigma(z) = \frac{\varphi(0)}{z} + (-1)^{\nu-1} \frac{\psi(0)\, ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)} z^{\nu-1} \lg z +$$

$$+ c_1 z^{\nu-1} + c_2 z^{\nu-2} + \ldots + c_{\nu} +$$

$$+ (-1)^{\nu} z^{\nu-1} \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\nu-1}} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right), \tag{III}$$

where $c_1, c_2, \ldots c_{\nu}$ denote definite constants.

*) Watson. loc. cit. p 207.

To establish the theorem we take the transformation formula (I) written in the form

$$\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-n\rho} = \varphi(0) - \psi(0)\frac{ab^{\nu}}{\rho^{\nu}} + \frac{ab^{\nu}}{\rho^{\nu}} \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-\frac{nb^2}{\rho}}$$

and integrate both parts with respect to ρ ν times

$$(-1)^{\nu} \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\nu}} e^{-n\rho} = \frac{\varphi(0)}{\Gamma(\nu+1)} \rho^{\nu} +$$

$$+ (-1)^{\nu} \psi(0) \frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \lg\rho + A_0 + A_1\rho + \ldots + A_{\nu-1}\rho^{\nu-1} +$$

$$(9) \qquad + ab^{\nu} \sum_{1}^{\infty} b_{\nu} \int_{(\nu)}^{\rho} e^{-\frac{nb^2}{\rho}} \frac{d\rho}{\rho^{\nu}}$$

Here $\int\limits_{(\nu)}^{\rho} \ldots d\rho$ denotes a ν-multiple integral and $A_0, A_1, \ldots A_{\nu-1}$ are the constants of integration. It is allowed here to interchange the sum and integral signs as, in virtue of the supposed properties of the series of Dirichlet (1) and (2), the two series

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^k} e^{-n\rho}, \quad \sum_{1}^{\infty} b_n \int_{(k)}^{\rho} e^{-\frac{nb^2}{\rho}} \frac{d\rho}{\rho^{\nu}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant \nu$$

are uniformly convergent with respect to ρ, satisfying the inequality

$$\rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1,$$

where ρ_0 and ρ_1 are two arbitrary values of ρ such, that $0 < \rho_0 < \rho_1$.

Let us multiply both parts of the equality (9) by $e^{-z\rho}$, where $R(z) > 0$, and integrate with respect to ρ from 0 to $+\infty$. We get

$$(-1)^{\nu} \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\nu}} \frac{1}{z+n} = \frac{\varphi(0)}{z^{\nu+1}} +$$

$$+ (-1)^{\nu-1} \frac{\psi(0)}{\Gamma(\nu)} ab^{\nu} \frac{\lg z}{z} + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \ldots + \frac{B_{\nu}}{z^{\nu}} +$$

$$(10) \qquad + ab^{\nu} \sum_{1}^{\infty} b_n \int_{0}^{\infty} e^{-z\rho} \int_{(\nu)}^{\rho} e^{-n\frac{b^2}{\rho}} \frac{d\rho}{\rho^{\nu}},$$

where $B_1, B_2, \ldots B_{\nu}$ are constants.

We are allowed to interchange the signs $\int\limits_{0}^{\infty}$ and $\sum\limits_{1}^{\infty}$ here too because of the supposed properties of the series (1) and (2).

The integration by parts, applied ν times to the last integral in (10), leads to the equation

$$(-1)^{\nu}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\nu}}\,\frac{1}{z+n}=\frac{\varphi(0)}{z^{\nu+1}}+$$
$$+(-1)^{\nu-1}\,\psi(0)\,\frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\,\frac{\lg z}{z}+\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^2}+\ldots+\frac{C_{\nu}}{z^{\nu}}+$$
$$(11)\qquad +\frac{ab^{\nu}}{z^{\nu}}\sum_{1}^{\infty}b_n\int_{0}^{\infty}e^{-z\rho-\frac{nb^2}{\rho}}\frac{d\rho}{\rho^{\nu}},$$

where $C_1, C_2,\ldots C_{\nu}$ are constants.

But the integral in the right hand member of the formula (11) is reduced by means of (4) to the function $K_{\nu-1}(2b\sqrt{nz})$ and, as it is easy to see, referring to the formula (II), that the last member in the formula (11) is equal to

$$(12)\qquad -\frac{\sigma(z)}{z^{\nu}}.$$

From (11) and (12) we derive then the formula (III).

Corollary. For all z where $|z|<1$ the function $\sigma(z)$ may be expressed by the series

$$\sigma(z)=\frac{\varphi(0)}{z}+(-1)^{\nu-1}\,\psi(0)\,\frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\,z^{\nu-1}\lg z+$$
$$+c_1 z^{\nu-1}+c_2 z^{\nu-2}+\ldots+c_{\nu}+$$
$$(13)\qquad +(-1)^{\nu-1}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k}\,\varphi(\nu+k)\,z^{\nu+k-1}.$$

4. Let us investigate now the function $\sigma(z)$ supposing the real part of z negative. Let us consider the function $\sigma(-z)$ supposing that $R(z)>0$. Then $lg(-z)=lg z\mp\pi i$, taking the sign „$-$" if $\omega=arg z$ satisfies the inequality $0<\omega<\pi$, and the sign „$+$" if $-\pi<\omega<0$.

Unter such conditions it follows from the formula (III) that

$$\sigma(-z)=-\frac{\varphi(0)}{z}+\psi(0)\,\frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\,z^{\nu-1}(\lg z\mp\pi i)+R(-z)+$$
$$(\mathrm{IV})\qquad +z^{\nu-1}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\nu-1}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right),$$

according to

$$0<\omega<\pi,\ \text{or}\ -\pi<\omega<0$$

and putting for brevity

$$R(z)=c_1 z^{\nu-1}+c_2 z^{\nu-2}+\ldots+c_{\nu-1}z+c_{\nu}.$$

5. It is further necessary for our purposes to find an upper limit for $|\sigma(z)|$ for sufficiently large $|z|$. The following theorem, the proof of which may be achieved by means of the formulae (IV), the theorem (II) and the supposed equality $|a_n|=O(n^{\nu-1+\varepsilon})$, may be used for this purpose.

Theorem IV. If the real part of z satisfies the inequality

$$\alpha_0 < \{R(z)\} < \beta_0, \quad (\{\tau\} = \tau - [\tau])$$

where α_0 and β_0 are arbitrary positive fractions, then the upper limit of $|\sigma(-z)|$ is given by O-equation:

$$|\sigma(-z)| = O(|z|^{\nu-1+\varepsilon}), \tag{15}$$

where ε denotes an arbitrarily small positive number.

§ 2. Construction of the sum-formulae.

1. Let $f(z)$ denote the function of the complex variable $z = x + iy$ holomorphic within of a certain closed contour C intersecting the real axis in the points α and β, where

$$0 < \alpha < \beta, \quad m - 1 < \alpha < m, \quad n < \beta < n + 1,$$

and m and n are integers.

Let us denote the upper part of the contour C by γ_1, the lower part by γ_2. Let us consider the function

$$F(z) = -\frac{\varphi(0)}{z} + \psi(0)\frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)} z^{\nu-1}(\lg z + \pi i) +$$

$$+ R(-z) + z^{\nu-1}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\nu-1}}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

This function has within the contour C a finite number of simple poles in the points $z = m, m+1, \ldots n-1, n$, with correspondent residues equal to $a_m, a_{m+1}, \ldots a_{n-1}, a_n$. By Cauchy's theorem

$$\sum_{m}^{n} a_\lambda f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\, F(z)\, dz,$$

or

$$\sum_{m}^{n} a_\lambda f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha\gamma_2\beta} f(z)\, F(z)\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha\gamma_1\beta} f(z)\, F(z)\, dz.$$

Let us consider the contour $\alpha\gamma_2\beta$ as the limit of the contour $\alpha'\gamma_2\beta'$, where $\alpha' = \alpha - i\delta$, $\beta' = \beta - i\delta$ and δ remaining positive converges to zero. Taking into consideration the formula (IV) we find that

$$\int_{\alpha\gamma_2\beta} f(z)\, F(z)\, dz = \lim_{\delta\to 0}\int_{\alpha'\gamma_2\beta'} f(z)\,\sigma(-z)\, dz.$$

Equally by means of the formula (IV) we can prove that

$$\int_{\alpha\gamma_1\beta} f(z)\, F(z)\, dz = \lim_{\delta\to 0}\int_{\alpha''\gamma_1\beta''} f(z)\,\sigma(-z)\, dz +$$

$$+ 2\pi i\,\psi(0)\frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_{\alpha\gamma_1\beta} f(z)\, z^{\nu-1} dz,$$

where

$$\alpha'' = \alpha + i\delta, \quad \beta'' = \beta + i\delta, \quad \delta > 0.$$

In what follows we assume that $f(z)$ is a holomorphic function within and on the boundary of C, whence

$$\int_{\alpha\gamma_1\beta} f(z)\, z^{\nu-1}\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu-1} f(x)\, dx$$

and so

$$\text{(V)} \qquad \sum_{m}^{n} a_\lambda f(\lambda) = -\psi(o) \frac{ab^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu-1} f(x)\, dx +$$

$$+ \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\alpha'\gamma_2\beta'} f(z)\, \sigma(-z)\, dz - \int_{\alpha''\gamma_1\beta''} f(z)\, \sigma(-z)\, dz \right\}$$

Let us suppose now that $\alpha > o$ is an integer. Let us exclude the point $z = \alpha$ by means of an arbitrary small semicircle with the radius ε. Let on this semicircle z be $=$ to $\varepsilon e^{i\psi}$ and suppose that the function $f(z)$ takes at the point $z = \alpha$ a determined and finite value, while it is not absolutely necessary for $f(z)$ to be holomorphice in this point. Let further that the difference $f(z) - f(\alpha)$ tends to zero uniformly with respect to $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, when ε decreases to zero. Taking then into account the expansion of the function $F(z)$ in the region of the poles, we find that in the considered case an additional summand $-\frac{1}{2} a_\alpha f(\alpha)$ appears in the right hand member of the formula (V) and the summation in the left hand member begins from the value $\lambda = \alpha + 1$.

3. Let the contour C be a rectangle with the altitude $2h$, situated symmetrically with respect to the real axis. Then the formula (V) may be written in the form

$$\sum_{m}^{n} a_\lambda f(\lambda) = -\psi(o) \frac{ab^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu-1} f(x)\, dx +$$

$$\text{(VI)} \qquad + \lim_{\delta \to 0} \left\{ I(\beta, h) - I(\alpha, h) \right\} + R(h),$$

where

$$I(x, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\delta}^{x-i\delta} f(z)\, \sigma(-z)\, dz -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\delta}^{x+i\delta} f(z)\, \sigma(-z)\, dz$$

and

$$R(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} f(x-ih)\, \sigma(-x+ih)\, dx -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} f(x+ih)\, \sigma(-x-ih)\, dx.$$

Suppose now that the function $f(z)$ is such, that the equalites

(16) $$\lim_{h\to\infty} R(h)=0, \qquad \lim_{\delta\to 0,\ \beta\to\infty} I(\beta,\infty)=0$$

hold good. Then the sum-formula (VI) takes the form

$$\sum_{m}^{\infty} a_\lambda f(\lambda)=-\psi(0)\frac{ab^\nu}{\Gamma(\nu)}\int_\alpha^\infty x^{\nu-1} f(x)\,dx+$$

(VII) $$+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^{\alpha-i\infty} f(z)\,\sigma(-z)\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^{\alpha+i\infty} f(z)\,\sigma(-z)\,dz,$$

where $\alpha>0$.

4. Let us investigate one more transformation of the formula (V). As the series

$$\sigma(-z)=-2ab\,(\sqrt{-z})^{\nu-1}\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^{\frac{\nu-1}{2}}} K_{\nu-1}(2b\sqrt{-nz})$$

converges uniformly in the region $\alpha'\gamma_2\beta'$ and $\alpha''\gamma_1\beta''$, we have

(17)
$$\int_{\alpha'\gamma_2\beta'} f(z)\,\sigma(-z)\,dz=$$
$$=-2ab\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^{\frac{\nu-1}{2}}}\int_\alpha^\beta f(x-i\delta)\,(-x+i\delta)^{\frac{\nu-1}{2}}\times$$
$$\times K_{\nu-1}\left(2b\sqrt{n(-x+i\delta)}\right)dx$$
$$\int_{\alpha''\gamma_1\beta''} f(z)\,\sigma(-z)\,dz=$$
$$=-2ab\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^{\frac{\nu-1}{2}}}\int_\alpha^\beta f(x+i\delta)\,(-x-i\delta)^{\frac{\nu-1}{2}}\times$$
$$\times K_{\nu-1}\left(2b\sqrt{n(-x-i\delta)}\right)dx.$$

Returning to the formula (V) we suppose that the function $f(z)$ is such, that it is lawful to interchange both the sign lim and that of the infinite sum in (17). Then, recalling the formula (6), we have

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\alpha'\gamma_2\beta'} f(z)\,\sigma(-z)\,dz-\int_{\alpha''\gamma_1\beta''} f(z)\,\sigma(-z)\,dz\right\}=$$
$$=ab\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^{\frac{\nu-1}{2}}}\int_\alpha^\beta x^{\frac{\nu-1}{2}} f(x)\,I_{\nu-1}(2b\sqrt{nx})\,dx$$

aud finally get the following sum-formula

$$\sum_{m}^{n} a_\lambda f(\lambda) = -\psi(0) \frac{ab^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_\alpha^\beta x^{\nu-1} f(x)\, dx +$$

$$\text{(VIII)} \qquad + ab \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\frac{\nu-1}{2}}} \int_\alpha^\beta x^{\frac{\nu-1}{2}} f(x)\, I_{\nu-1}(2b\sqrt{nx})\, dx,$$

where $0 < \alpha < \beta$.

§ 3. Application of the sum-formulae to the study of the functions $\varphi(s)$ and $\psi(s)$.

1. Let us apply the formula (VII) to the function $f(z) = \frac{1}{z^s}$, $R(s) > \nu$, supposing $\alpha = 1$. We have to prove that in this case the conditions (16) are satisfied. The first of these conditions is satisfied, as the modulus of the function $\frac{\sigma(-z)}{z^s}$ can be made arbitrary small with sufficiently large value of $|z|$. As to the second of these conditions (16) supposing that the number β increases indefinitely in the way that $\alpha_0 < \{\beta\} < \beta_0$, where α_0 and β_0 are two arbitrary fractions, we find by the theorem (IV), that

$$|I(\beta, \infty)| < 2M \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(\beta^2+t^2)^{\tau-\nu+1-\varepsilon}}},$$

where M is a constant.

As $\tau > \nu$ we can choose ε so small, that $\tau - \nu + 1 - \varepsilon > 1$. Then from the inequality

$$|I(\beta,\infty)| < \frac{2M}{\beta^{\tau-\nu-\varepsilon}} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{\tau-\nu+1-\varepsilon}{2}}}$$

we infer that

$$\lim_{\beta \to \infty} I(\beta, \infty) = 0,$$

i. e. that the second condition (16) is satisfied with $\tau > \nu$.

The formula (VII) in our case gives

$$(18) \qquad \varphi(s) = \frac{1}{2} a_1 - \psi(0) \frac{ab^\nu}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{s-\nu} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma(-1+it)\, e^{is\, tgt - 1} + \sigma(-1-it)\, e^{-is\, tgt - 1}}{(1+t^2)^{s/2}}\, dt, \ \tau > \nu.$$

The integral in the right hand member of this equality is a holomorphic function for all finite values of s. On the ground of the principles of the analytic continuation we can conclude, that the equality (18) defines a function $\varphi(s)$ for all values of the complex variable s. From the formula (18) we see that $\varphi(s)$ is a one valued analytic function, which has one singular point $s=\nu$ as a pole of the first order, with the residue equal to $-\psi(0)\frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)}$. Let us suppose in the formula (VII) $f(z)=\frac{1}{z^s}$ and $0<\alpha<1$; we have

$$\varphi(s)=-\psi(0)\frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\frac{\alpha^{\nu-s}}{s-\nu}+ \tag{19}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\alpha-i\infty}\frac{\sigma(-z)}{z^s}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\alpha+i\infty}\frac{\sigma(-z)}{z^s}dz$$

and as above this formula holds good for all values of the variable s.

From the expansion $\sigma(-z)$ in the region of the poles, we see that, in so far as $R(s)<-1$, the functions under the sign of integral in (19) assume definite values in $s=0$. We are allowed therefore, in (19) to make α to converge to 0 and, passing to the limit, we obtain

$$\varphi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{-i\infty}\frac{\sigma(-z)}{z^s}ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+i\infty}\frac{\sigma(-z)}{z^s}ds$$

whence

$$\varphi(s)=\frac{\sin\frac{s\pi}{2}}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sigma(it)-\sigma(-it)}{2i}\frac{dt}{t^s}-\frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sigma(it)+\sigma(-it)}{2}\frac{dt}{t^s}. \tag{20}$$

But the right hand member of this formula is a function holomorphic for $R(s)<0$; so we only suppose in the formula (20) $\tau<0$.

Let us replace now in Heaviside's integral

$$\int_{0}^{\infty}K_{\mu}(u)\,u^{\lambda-1}du=2^{\lambda-2}\Gamma\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right),\ R(\lambda)>\mu$$

the index μ by $\nu-1$ and suppose that $\lambda=2s-\nu+1$, $u=2b\sqrt{nx}$. We have

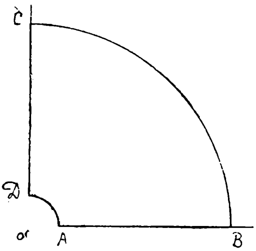
$$\int_{0}^{\infty}K_{\nu-1}(2b\sqrt{nx})\,x^{s-\frac{\nu+1}{2}}dx=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(s)\Gamma(s-\nu+1)}{b^{2s-\nu+1}n^{s-\frac{\nu-1}{2}}},\ \tau>\nu-1.$$

Taking into consideration the formula (11) we find that

$$\psi(s)=-\frac{b^{2s-\nu}}{a\Gamma(s)\Gamma(s-\nu+1)}\int_{0}^{\infty}x^{s-\nu}\sigma(x)\,dx,\ \tau>\nu. \tag{21}$$

Replacing s by $\nu - s$ we have

$$(22) \qquad \int_0^\infty \frac{\sigma(x)}{x^s}\,dx = -\frac{\pi a b^{2s-\nu}}{\sin \pi s}\,\frac{\Gamma(\nu-s)\,\psi(\nu-s)}{\Gamma(s)},\ \tau < 0.$$



Let us take now the function $\omega(z) = \frac{\sigma(z)}{z^s}$ where $R(s) < 0$ and integrate it along the contour $ABCDA$ (fig. 2). It is easy to prove on the ground of the properties of the function $\sigma(z)$ established above that the integrals $\int \omega(z)\,dz$ taken along the arcs BC and DA converge to 0 when the radius of the outer circle increases indefinitely and at the same time that of the inner circle tends to 0. Hence we conclude that,

$$\int_0^\infty \frac{\sigma(it)}{t^s}\,dt = \frac{\pi i a b^{2s-\nu}}{\sin \pi s}\,\frac{\Gamma(\nu-s)\,\psi(\nu-s)}{\Gamma(s)}\,e^{\frac{i\pi s}{2}}$$

and consequently

$$(23)_1 \quad \int_0^\infty \frac{\sigma(it)+\sigma(-it)}{2}\,\frac{dt}{t^s} = -\frac{\pi a b^{2s-\nu}}{2\cos\frac{s\pi}{2}}\,\frac{\Gamma(\nu-s)\,\psi(\nu-s)}{\Gamma(s)},\ \tau < 0$$

$$(23)_2 \quad \int_0^\infty \frac{\sigma(it)-\sigma(-it)}{2i}\,\frac{dt}{t^s} = \frac{\pi a b^{2s-\nu}}{2\sin\frac{s\pi}{2}}\,\frac{\Gamma(\nu-s)\,\psi(\nu-s)}{\Gamma(s)},\ \tau < 0.$$

From the formulae (20) and (23) we derive the following functional equation between the functions $\varphi(s)$ and $\psi(s)$

$$(\mathrm{IX}) \qquad a\,\frac{\Gamma(\nu-s)\,\psi(\nu-s)}{b^{\nu-s}} = \frac{\Gamma(s)\,\varphi(s)}{b^s}.$$

This equation can also be immediately proved from the formula of transformation (I).

As to the function $\psi(s)$, it has the some character as $\varphi(s)$. In particular, the expansion of the function $\psi(s)$ in the region of the pole $s = \nu$ has the forme

$$\psi(s) = -\varphi(0)\,\frac{b^\nu}{a\Gamma(\nu)}\,\frac{1}{s-\nu} + \omega(s),$$

where $\omega(s)$ is a holomorphic function.

The formulae (IX) and (22) give the following integral form of the function $\varphi(s)$:

$$(24) \qquad \varphi(s) = -\frac{\sin \pi s}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma(x)}{x^s}\,dx, \quad \tau < 0.$$

From this form we conclude that the function $\varphi(s)$ has an infinite number of roots $s = -1, -2, -3, \ldots$

3. The function $\varphi(s)$, representable for $R(s) > \nu$ by Dirichlet's series $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, is closely connected with the function

$$(25) \qquad \Phi(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-nz}, \quad R(z) > 0.$$

Let us develop it in power series of y

$$\Phi(x+iy) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m (iy)^m$$

and try to find an asymptotic expression of the coefficient A_m for the large values of m.

As

$$\Phi(x+iy) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n(x+iy)}$$

we have

$$(26) \qquad A_m = \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^m e^{-nx}$$

and so the problem is reduced to finding approximative expression of the sum (26) supposing m large. We know that

$$\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{\rho}} = \varphi(0) - \psi(0)\, ab^\nu \rho^\nu + ab^\nu \rho^\nu \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-nb^2\rho}, \quad \rho > 0.$$

Here we multiply both parts by ρ^{m-1} and differentiate with respect to ρ m times. As

$$D_\rho^{(m)} \rho^{m-1} e^{-\frac{n}{\rho}} = n^m \rho^{-m-1} e^{-\frac{n}{\rho}},$$

$$D_\rho^{(m)} \rho^{m+\nu-1} e^{-nb^2\rho} = \rho^{\nu-1} m!\, e^{-nb^2\rho} L_m^{(\nu-1)}(nb^2\rho),$$

where $L_m^{(\alpha)}(x)$ is Laguerre's polynomial

$$L_m^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{m!} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x} x^{m+\alpha}), \quad \alpha > -1,$$

therefore

$$(27) \qquad \sum_{1}^{\infty} a_n n^m e^{-n\rho} = -\psi(0)\, a \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{b^\nu}{\rho^{m+\nu}} +$$

$$+ ab \frac{m!}{\rho^{m+\nu}} \sum_{1}^{\infty} b_n L_m^{(\nu-1)}\left(\frac{nb^2}{\rho}\right) e^{-\frac{nb^2}{\rho}}$$

and so

$$(28) \qquad A_m = -\psi(0)\, a \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(m+1)} \frac{b^\nu}{x^{m+\nu}} + $$

$$+ \frac{ab^\nu}{x^{m+\nu}} \sum_1^\infty b_n L_m^{(\nu-1)}\left(\frac{nb^2}{x}\right) e^{-\frac{nb^2}{x}}.$$

But as it is shown by Szegö in one of his papers *), the asymtotic expansion of Laguerre's polynom is given by the formula

$$e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} m^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) + R_m,$$

where

$$R_m = x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} O(m^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}) + x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} O(m^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}+\xi})$$

$$n^{-\delta} \leqq x \leqq n^\varepsilon, \quad 0 < \delta < 1, \quad 0 < \varepsilon < 1/3, \quad \xi > \frac{3\varepsilon}{2}.$$

Substituing this expansion in (28) we find

$$(29) \qquad A_m = \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(m+1)} \frac{a}{x^{m+\frac{2\nu+1}{4}}} \left\{ -\frac{\psi(0)}{\Gamma(\nu)} \frac{b^\nu}{x^{\frac{2\nu-1}{4}}} + \right.$$

$$+ a\sqrt{\frac{\pi}{b}} \cdot \frac{1}{m^{\frac{2\nu-1}{4}}} \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n^{\frac{2\nu-1}{4}}} \cos\left[2b\sqrt{\frac{mn}{x}} - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right] e^{-\frac{nb^2}{2x}} +$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{m^{\frac{2\nu+1}{4}-\eta}}\right)\right\},$$

where $\eta > 0$.

Hence it follows that

$$(30) \qquad A_m = \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(m+1)} \frac{a}{x^{m+\frac{2\nu+1}{4}}} \left\{ -\frac{\psi(0)}{\Gamma(\nu)} \frac{b^\nu}{x^{\frac{2\nu-1}{4}}} + O\left(\frac{1}{m^{\frac{2\nu-1}{4}}}\right)\right\}.$$

We notice that the transformation (27) may be established by means of the sum formula (VIII) with $\beta = \infty$ and $f(z) = z^m e^{-\rho z}$, $m > 0$, $\rho > 0$.

4. One more application of the transformation formula (I) may be obtained as follows.

Let

$$A(x) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} a_n$$

and

$$P(x) = A(x) + \psi(0) \frac{ab^\nu}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu.$$

---

*) Mathem. Zeitschrift. 25. Bd. 1. h. 1926.

Let us prove that for all $\rho > 0$ the formula

$$(31) \qquad \int_0^\infty e^{-t} t^n \, P(\rho t) \, dt = n! \, ab^\nu \rho^\nu \sum_1^\infty b_n L_n^{(\nu)} (nb^2\rho) \, e^{-nb^2\rho}$$

holds good. In fact

$$\int_0^\infty e^{-t} A(\xi t) \, dt = \sum_{m=0}^\infty (a_0 + a_1 + \ldots + a_m) \int_{\frac{m}{\xi}}^{\frac{m+1}{\xi}} e^{-t} \, dt =$$

$$= \sum_{m=0}^\infty a_m \int_{\frac{m}{\xi}}^\infty e^{-t} \, dt, \quad \xi > 0,$$

whence

$$\int_0^\infty e^{-t} A(\xi t) \, dt = -\varphi(0) + \sum_1^\infty a_m e^{-\frac{m}{\xi}}.$$

Applying to the latter sum the transformation (I) we find

$$\int_0^\infty e^{-\xi t} P(\rho t) \, dt = ab^\nu \frac{\rho^\nu}{\xi^{\nu+1}} \sum_1^\infty b_n e^{-\frac{nb^2\rho}{\xi}}.$$

Differentiating both parts of this equality n times with respect to ξ we find by means of the formula *)

$$\frac{d^n}{d\xi^n} \left\{ \frac{e^{\frac{-nb\rho}{\nu}}}{\xi^\nu + 1} \right\} = (-1)^n \frac{n!}{\xi^{n+\nu+1}} L_n^{(\nu)} \left(\frac{nb^2\rho}{\xi} \right) e^{\frac{-nb^2\rho}{\xi}}$$

the required equation (31).

Using the asymptotic expansion of Laguerre's polynomials we can prove that

$$(32) \qquad \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^n P(t) \, dt = O\left(n^{\frac{2\nu-1}{4}} \right).$$

This formula may serve to estimate the function $P(t)$.

§ 4. Investigation of some particular cases.

A great number of functions $\varphi(s)$ and $\psi(s)$ satisfies the conditions, mentioned in n° 3, § 1. Here are some examples of such functions.

---

*) See my note „Über eine Zahlentheoretische Anwendung der Laguerreschen Polynome“ (Bull. de la Soc. Math. de Leningrad. t. I. (1927). 275).

1. Let $a_n = \tau_{2k}(n)$ be the number of integral solutions of the equation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2k}^2 = n.$$

The Dirichlet's series

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\tau_{2k}(n)}{n^s}$$

converges absolutely for $R(s) > k$. In this case $\nu = k$ and

$$\varphi(s) = \zeta_{2k}(s)$$

is a function of Lerch-Epstein. It is known from the theory of elliptic functions that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_{2k}(n)\, e^{-n\pi\rho} = \frac{1}{\rho^k} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{2k}(n)\, e^{-\frac{n\pi}{\rho}}, \quad \rho > 0.$$

Consequently this case is contained under our general assumptions if we take

$$\nu = k, \; a = 1, \; b = \pi, \; a_n = b_n = \tau_{2k}(n), \; \varphi(0) = \psi(0) = -1.$$

It is to be noticed that for $k = 1$

$$\varphi(s) = 4\, \chi(s)\, \zeta(s),$$

where $\zeta(s)$ is a function of Riemann and $\chi(s)$ a function of Schlömilch.

The sum-formula (VII) for the case $(k = 1)$ was proved by means of real analysis by E. Landau in the second volume of his recently published book: „Vorlesungen über Zahlentheorie“ (s. 274). But before that it was found in a somewhat different form in the papers by Voronoï *) and Sierpinski **).

It is easy to show that for $k = 2$

$$\varphi(s) = 8\left(1 - \frac{1}{4^{s-1}}\right) \zeta(s)\, \zeta(s-1).$$

In fact by Jacobi's theorem

$$\tau_4 = 8\,[2 + (-1)^n]\, \overline{\zeta_1}(n),$$

where $\overline{\zeta_1}(n)$ denotes the sum of odd divisors of n. But there is no difficulty in proving that

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\overline{\zeta_1}(n)}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s)\, \zeta(s-1),$$

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\overline{\zeta_1}(n)}{n^s} = -\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 \zeta(s)\, \zeta(s-1),$$

whence the preceding equation follows immediately.

---

*) Verhandlungen des dritten Internat. Math. Kongr. in Heidelberg (1905).
**) loc. cit.

Let us apply the formula (30) to the investigation of the following question. Lef K and iK' be two periods of elliptic functions such that

$$\frac{K'}{K} = x + iy, \; y > 0$$

Let us develop the even power of the expression

$$\theta_3 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} = \frac{2K}{\pi}$$

into a power series of

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

It is known that this development is

$$\theta_3^{2k} = 1 + \tau_{2k}(1)\, q + \tau_{2k}(2)\, q^2 + \ldots$$

Developing the right hand member into a power series of y the problem is to find the asymptotic expression of the coefficient A_m in the development

$$\theta_3^{2k} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m (iy)^m$$

for very large m. This expression is given by the formula (30)

$$A_m = \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m+1)} \frac{1}{x^{m+\frac{2k+1}{4}}} \left\{ \frac{\pi^k}{\Gamma(k)\, x^{\frac{2k-1}{4}}} + O\left(\frac{1}{m^{\frac{2k-1}{4}}}\right) \right\}$$

and coincides with the expression, obtained recently in our article „Über eine Zahlentheoretishe Anwendung der Laguerreschen Polynome“.

We notice also that for the investigated case the formula (32) was found by Szegö *) and served him to estimate the function $P(x)$. Lastly the development of the function $\sigma(z)$ in the region of poles for the considered case was quite lately found by Oppenheim in his article „Some identities in the theory of numbers“ **).

2. Let $P(n)$ be the number of representations n by binary quadratic form (a_1, b_1, c_1) of the determinant $-\Delta = b_1^2 - a_1 c_1 < 0$. The Dirichlet's series

$$\varphi(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{P_{(n)}}{n^s}$$

*) loc. cit.
**) loc. cit.

converges absolutely for $R(s) > 1$. Also the formula of transformation (I), proved by Rosenhain

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{\frac{-n\pi\rho}{\sqrt{\Delta}}} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{\frac{-n\pi}{\sqrt{\Delta}\,.\,\rho}}$$

holds good. In this case

$$\nu = 1,\ a = 1,\ b = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}},\ a_n = b_n = P(n),\ \varphi(0) = \psi(0) = -1.$$

The corresponding sum-formula (VIII) was established by Voronoï. *).

3. Let a_n denote the sum of odd powers of all divisors of the number n, i. e.

$$a_n = \sum_{n=d\delta} d^{2p-1},\ p > 1$$

In this case the Dirichlet's series

$$\varphi(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

converges absolutely for $R(s) > 2p$ and

$$\varphi(s) = \zeta(s)\zeta(s - 2p + 1).$$

There is no difficulty to establish that the following formula of transformation

$$\frac{(-1)^p B_p}{4p} + \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-2n\pi\rho} = \frac{(-1)^p}{\rho^{2p}} \left\{ \frac{(-1)^p B_p}{4p} + \sum_{1}^{\infty} a_n e^{\frac{-2n\pi}{\rho}} \right\},$$

where B_p denotes Bernullian number, holds good. Here we have

$$\nu = 2p,\ a = (-1)^p,\ b = 2\pi,\ \varphi(0) = \psi(0) = (-1)^p \frac{B_p}{4p}$$

4. We are going now to give examples when a_n is not equal to b_n. First we state the theorem, the proof of which is not difficult. This theorem is generalization of one of the theorems by Liouville, related to the theory of Dirichlet's series. It can be expressed as follows:

Let $a(n)$, $b(n)$ and $c(n)$ denote three arithmetical functions connected by the equation

$$a(n) = \sum_{n=d\delta} b(\delta)\, c(d), \tag{33}$$

where the summation extends over all the divisors of the number n.

Let further the Dirichlet's series

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s},\ R(s) > s_1,\ \sum_{1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s},\ R(s) > s_2$$

be absolutely convergent.

*) loc. cit.

If

$$(34)\qquad f_1(s)=\sum_1^{\infty} a(n)\, e^{-ns}, \quad f_2(s)=\sum_1^{\infty} b(n)\, e^{-ns},$$

then

$$(35)\qquad f_1(s)=\sum_1^{\infty} c(n)\, f_2(ns).$$

The proof can be derived from the well known equality

$$(36)\qquad \sum_1^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}=\sum_1^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}\cdot\sum_1^{\infty}\frac{c(n)}{n^s}$$

and for $b(n)=1$ it coincides with a theorem given by Liouville.

5. Let K and iK' denote two periods of elliptic function. K and K' being real and $\frac{K'}{K}>0$. The modulus k as well as its complement k' in this case are also real. Let us consider the expansion of the functions $sn\,(u, k)$ and $cn\,(u, k)$ into power series

$$sn\,(u, k)=u-A_2(k^2)\frac{u^3}{1.2.3}+A_3(k^2)\frac{u^5}{1.2.3.4.5}-\ldots$$

$$cn\,(u, k)=1-B_1(k^2)\frac{u^2}{1.2}+B_2(k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

Here $A_r(k^2)$ and $B_r(k^2)$ are polynomials in k^2 of degrees $2r$ and $2r-2$ respectively. Some properties of these polynoms were investigated already by Hermite *). We are going to show that the polynoms $A_r(k^2)$ and $B_r(k^2)$ can be developed into series of the form (34), the numerical functions $a(n)$, $b(n)$ corresponding to coefficients a_n, b_n, which enter our general formulae.

6. For brevity we set

$$u=\frac{2Kv}{\pi}, \quad q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

and take the expansions of the functions $sn\,(u, k)$ and $sn\,(ui, k')$ into series of sines

$$(37)\qquad \frac{kK}{\pi}\, sn\,(u, k)=2\sum_1^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)v,$$

$$(38)\qquad \frac{k'K}{\pi i}\, sn\,(ui, k')=\frac{1}{2}\,tg\, v-2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2nv,$$

*) Crelle's Journ. t. 81. (1876).

whence it follows

$$(39)\qquad A_r(k^2)=\frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r}\sum_{1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}(2n-1)^{2r-1},$$

$$(40)\qquad A_r(k'^2)=\frac{1}{k'}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r}\frac{2^{2r}(2^{2r}-1)}{2r}B_r+$$

$$+(-1)^r\frac{4}{k'}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}q^{2n}}{1+q^{2n}}(2n)^{2r-1},$$

where B_r is a Bernullian number.

If we develop now the right hand member of (39) in power series of q and suppose

$$(41)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2r-1}}{e^{(2n-1)s}-e^{-(2n-1)s}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-ns},$$

then

$$(42)\qquad A_r(k^2)=\frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r}\sum_{1}^{\infty}a_n e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{K'}{K}}.$$

Now we can investigate the character of the coefficients a_n using Liouville's generalized theorem. In our case

$$a(n)=a_n,\quad b(n)=\sin^2\frac{n\pi}{2},\quad c(n)=\sin^2\frac{n\pi}{2}\cdot n^{2r-1},$$

so that we have .

$$f_2(s)=\frac{1}{e^s-e^{-s}},\quad \sum_{1}^{\infty}c(n)\,f_2(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2r-1}}{e^{(2n-1)s}-e^{-(2n-1)s}}.$$

Consequently by the theorem in $n^0 4$ we have

$$(43)\qquad a_n=\sum_{d\delta=n}\sin^2\frac{\pi\delta}{2}\cdot\sin^2\frac{\pi d}{2}\cdot d^{2r-1}.$$

The Dirichlet's series

$$\varphi(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

is absolutely convergent for $R(s)>2r$ and from the formula (36) we find

$$(44)\qquad \varphi(s)=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^{s-2r-1}}\right)\zeta(s)\,\zeta(s-2r+1)$$

Further supposing that

$$(45)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)^{2r-1}}{1+e^{2ns}}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-ns}$$

and applying again Liouville's generalized theorem to the case

$$a(n) = b_n, \quad b(n) = (-1)^{n-1}, \quad c(n) = -\cos\frac{n\pi}{2} \cdot n^{2r-1}$$

we get

$$(46) \qquad b_n = \sum_{d\delta = n} (-1)^{\delta} \cos\frac{\pi d}{2}\, d^{2r-1} .$$

The Dirichlet's series

$$\psi(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

converges absolutely for $R(s) > 2r$ and

$$(47) \quad \psi(s) = \frac{1}{2^{s-2r+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{s-2r}}\right)\zeta(s)\,\zeta(s-2r+1).$$

With the accepted notations the expression (40) for $A_r\,(k'^2)$ can be written in the following form

$$A_r\,(k'^2) = \frac{1}{k'}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r} \frac{2^{2r}\,(2^{2r}-1)}{2r}\, B_r +$$

$$(48) \qquad + (-1)^r \frac{4}{k'}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r} \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-n\pi\frac{K'}{K}} .$$

We replace here k' by k, which changes K in K' conversely. Hence from the formulae (39), (42), (48) we can conclude that the formula of transformation

$$(49) \qquad \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{K'}{K}} = \frac{2^{2r-3}(2^{2r}-1)}{r} B_r \left(\frac{K}{K'}\right)^{2r} +$$

$$+ (1)^r \left(\frac{K}{K'}\right)^{2r} \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-n\pi\frac{K}{K'}}$$

holds good.

It is obvious now that to apply our general results we have to take

$$\nu = 2r,\ a = \frac{(-1)^r}{2^r},\ b = \frac{\pi}{\sqrt{2}},\ \varphi(0) = 0, \psi(0) = (-1)^{r-1} \cdot \frac{2^{2r-3}(2^{2r}-1)}{r} B_r,$$

and definite the numerical functions a_n and b_n by (43) and (46).

7. Let us consider the polynomial $B_r\,(k^2)$. From the expansions

$$\frac{kK}{\pi}\, cn\,(u_1 k) = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{n-1/2}}{1 + q^{2n-1}} \cos(2n-1)\,v$$

$$\frac{k'K}{\pi}\, cn\,(ui, k') = \frac{1}{2} \sec v - 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}} \cos(2n-1)\,v$$

it follows

$$(50)\qquad B_r(k^2) = \frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r+1} \sum_1^\infty a_n\, e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{K'}{K}}$$

$$(51)\qquad B_r(k'^2) = \frac{E_r}{k'}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r+1} + (-1)^{r-1}\frac{4}{k'}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2r+1} \sum_1^\infty b_n\, e^{-\pi n\frac{K'}{K}},$$

where E_r denotes Eulerian number; the coefficients a_n and b_n being defined by

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n-1)^{2r}}{e^{(2n-1)s}+e^{-(2n-1)s}} = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-ns},\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)^{2r}}{1+e^{(2n-1)s}} = \sum_{n=1}^\infty b_n e^{-ns}.$$

Applying to both these sums the Liouville's generalized theorem we find

$$(52)\qquad a_n = \sum_{d\delta=n} \sin\frac{\pi\delta}{2}\cdot \sin^2\frac{\pi d}{2}\cdot d^{2r},\quad b_n = \sum_{d\delta=n} (-1)^{\delta-1}\sin\frac{\pi d}{2}\cdot d^{2r}.$$

The Dirichlet's series

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s},\quad \psi(s) = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^s}$$

converge absolutely for $R(s) > 2r+1$ and

$$(53)\qquad \varphi(s) = \left(1-\frac{1}{2^{s-2r}}\right)\chi(s)\,\zeta(s-2r),$$

$$(54)\qquad \psi(s) = \left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)\,\chi(s-2r).$$

Further it is easy to prove, proceeding as in the preceding case, that the following formula of transformation

$$(55)\qquad \sum_1^\infty a_n\, e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{K'}{K}} = \frac{E_r}{2}\left(\frac{K}{K'}\right)^{2r+1} + (-1)^{r-1}\left(\frac{K}{K'}\right)^{2r+1}\sum_1^\infty b_n\, e^{-n\pi\frac{K}{K'}}$$

holds good.

To apply our general results to this case we must take

$$\nu = 2r+1,\ a = \frac{(-1)^{r-1}}{2^{r+1/2}},\ b = \frac{\pi}{\sqrt{2}},\ \varphi(0) = 0,\ \psi(0) = (-1)^r\frac{E_r}{2},$$

and define a_n and b_n by the formula (52).

In an analogous manner we can discuss the polynoms $C_r(k^2)$ entering the expansion

$$dn(u, k) = 1 - c_1(k^2)\frac{u^2}{1.2} + c_2(k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4}\ldots$$

Crimea, Iuly, 1927.

Сумматорные формулы, содержащие числовые функции.

Н. С. Кошляков.

Автор выводит различного рода сумматорные формулы для сумм вида

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} a_n\, f(n),$$

где a_n обозначают арифметические функции, подчиненные некоторым достаточно широким условиям.

Цель формул — решить следующий вопрос, относящийся к аналитическому продолжению функций:

Функция $\varphi(s)$ комплексной переменой s задана рядом Dirichlet

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

абсолютно сходящимся при $R(s) > \nu$, где ν — целое положительное число. Одновременно с $\varphi(s)$ рассматривается функция $\psi(s)$, разлагающаяся в ряд Dirichlet

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

абсолютно сходящийся на прямой $R(s) = \beta > \nu$.

Коэффициенты a_n и b_n таковы, что имеет место **формула преобразования**.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nb\rho} = \frac{a}{\rho^{\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\frac{nb}{\rho}},\quad \rho > 0,$$

где a и $b > 0$ — постоянные числа, при чем условно положено

$$a_0 = -\varphi(0),\quad b_0 = -\psi(0).$$

Требуется изучить аналитический характер функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ на всей плоскости переменного $s = \tau + it$.

Решение этой задачи получается на основании сумматорной формулы

$$\sum_{m}^{\infty} a_\lambda\, f(\lambda) = -\psi(0)\, \frac{ab^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_{\alpha}^{\infty} x^{\nu-1} f(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\alpha - i\infty} f(z)\, \sigma(-z)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\alpha + i\infty} f(z)\, \sigma(-z)\, dz,$$

$$m - 1 < \alpha < m.$$

Здесь

$$\sigma(z) = -2abz^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\frac{\nu-1}{2}}} K_{\nu-1}(2b\sqrt{nz}),$$

а $K_\nu(z)$ означает функцию Macdonald'a, связанную с известной функцией Hankel'я $H_\nu'(z)$ соотношением

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_\nu'(iz).$$

Аналитический характер функции $\varphi(s)$ оказывается следующим: эта функция голоморфна на всей плоскости, за исключением точки $s = \nu$, где она имеет полюс 1-го порядка с вычетом, равным $-\psi(0)\frac{ab^\nu}{\Gamma(\nu)}$. Кроме того, эта функция имеет бесчисленное множество простых корней в точках

$$s = -1, -2, -3, \ldots,$$

как это усматривается из ее интегрального представления

$$\varphi(s) = -\frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma(x)}{x^s} dx, \ (R(s) < 0).$$

Функция $\psi(s)$ имеет тот-же аналитический характер, что и $\varphi(s)$, и связана с ней функциональным уравнением

$$a\frac{\Gamma(\nu-s)\psi(\nu-s)}{b^{\nu-s}} = \frac{\Gamma(s)\varphi(s)}{b^s}.$$

К теории конечных групп линейных ортогональных преобразований.

В. А. Сперанский.

В 1913 г. Академиком Д. А. Граве для занятий в семинаре по алгебре при Киевском Университете был предложен вопрос о нахождении конечных групп ортогональных линейных преобразований многомерного пространства. Участниками семинара высказывалось предположение, что конечные группы ортогональных линейных вещественных преобразований многомерного пространства, начиная с 5-го измерения, могут быть представлены при помощи некоторых специальных групп матриц, обозначенных символами Y и Y', за исключением, разумеется, тривиальных случаев, когда рассматриваемая группа приводится к группам вещественных преобразований менее, чем 5-го измерения.

В настоящей заметке я доказываю, что, вообще говоря, и для пространств высших измерений указанные группы не всегда приводятся к группам Y и Y' и даю пример одной из таких групп.

Образуем квадратную матрицу n-ой степени*) таким образом, чтобы в каждой строке ее и в каждом столбце один из элементов равнялся 1 или -1, а остальные элементы равнялись бы нулю. Эти матрицы образуют относительно умножения группу порядка $n!\,2^n$, которую обозначим символом Y'. Если не нулевой элемент матрицы равняется 1, то получим группу порядка $n!$, изоморфную с симметрической группой подстановок из n элементов, которую обозначим через Y. Очевидно, группа Y является делителем группы Y'.

Рассмотрим, далее, абстрактную не *Abel*'еву группу $\mathfrak{G}$ порядка p^3, определяемую символическими равенствами:

$$P^{p^2}=1, \quad S^p=1, \quad S^{-1}PS=P^{1+p} ,$$

*) По установившейся в русской математической литературе терминологии — степенью будем называть число строк или столбцов квадратной матрицы.

где P и S—два производящих элемента группы, p любое простое нечетное число. Для представления этой группы возьмем мономиальную группу (monomiale Gruppe) матриц степени p и, обозначая через ρ один из первообразных корней из единицы степени p^2, определим матрицы, соответствующие производящим элементам группы, символами:

$$P = \begin{pmatrix} x_j \\ \rho^j x_{j+1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} x_j \\ \rho^{\frac{(p-j)(p-1)p}{2}} x_j \end{pmatrix}$$

($j = 1, 2 \ldots\ldots p$; указатели при x, большие p, заменяются их наименьшими положительными вычетами по модулю p). Замечая, что:

$$P^{1+p} = \begin{pmatrix} x_j \\ \rho^{\frac{p(p+1)}{2}+j} x_{j+1} \end{pmatrix}$$

и производя над этими символами соответствующие действия по правилам умножения и возвышения в степень подстановок, легко убедиться, что они удовлетворяют равенствам, определяющим группу $\mathfrak{G}$.

Определитель матрицы P, представляющий собой произведение корней ее характеристического уравнения, равняется:

$$\prod_{j=1}^{p} \rho^j = \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$$

Очевидно, это произведение должно быть комплексным числом, так как ρ—первообразный корень из единицы степени p^2. Отсюда следует, что рассматриваемая группа матриц не может быть эквивалентна группе вещественных матриц, так как соответственные матрицы двух эквивалентных конечных групп линейных преобразований должны иметь одинаковые характеристические уравнения.

Полученное таким образом представление группы $\mathfrak{G}$ неприводимо, т. е. оно не может быть эквивалентно с представлением, групповая матрица которого M имеет вид:

$$M = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}$$

где A—матрица степени k и B—матрица степени $p-k$. Для доказательства этого заметим, что степень неприводимого представления есть делитель порядка группы, поэтому обе матрицы A и B должны быть приводимыми. Действительно, если матрица A приводима, то порядок группы $\mathfrak{G}$ должен делиться на k, что возможно только при $k = 1$, но тогда p^3 не делится на $p-1$ и, следовательно, матрица A приводима. Применяя эти рассуждения к матрице B, придем к заключению, что группа $\mathfrak{G}$, в случае приводимости рассматриваемого представления, эквивалентна группе матриц, все элементы которых, не расположенные на главной диагонали, равняются нулю, но тогда группа $\mathfrak{G}$ была бы *Abel*'евой, что противоречит уравнениям, определяющим ее строй.

Образуем теперь группу матриц совершенно аналогичным способом, но первообразным корнем возьмем ρ^{-1}, тогда каждый элемент матрицы первой группы, находящийся на пересечении r-ой строки и l-го столбца, будет сопряженным с таким же элементом подобной матрицы второй группы. Очевидно, в силу приведенных выше соображений, групповая матрица N второго представления неприводима ни в какой области и не может быть эквивалентна матрице, содержащей только вещественные элементы.

Обозначая в дальнейшем образующие матрицы первого и второго представления группы соответственно через P, S и $\overline{P}$, $\overline{S}$, построим третье представление группы $\mathfrak{G}$ при помощи составных матриц степени $2p$, образующие элементы которого:

$$P' = \begin{Vmatrix} P & 0 \\ 0 & \overline{P} \end{Vmatrix} \quad \text{и } S' = \begin{Vmatrix} S & 0 \\ 0 & \overline{S} \end{Vmatrix}$$

Пользуясь идеями Frobenius'а и Schur'а (Sitzungsb. d. Pr. Akad. d. Wiss. 1906. Über die reellen Darstellungen d. endlichen Gruppen). последнее представление можно преобразовать в эквивалентное ему при помощи составной матрицы:

$$H = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon & \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon & \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon \end{Vmatrix}$$

где через ε обозначается единичная матрица степени p. Выделим вещественные и мнимые части матриц P, $\overline{P}$, S и $\overline{S}$ полагая:

$$P = U + Vi, \quad S = X + Yi,$$

где матрицы U, V, X, Y содержат только вещественные элементы. Тогда:

$$\overline{P} = U - Vi, \quad \overline{S} = X - Yi$$

и, следовательно:

$$P' = \begin{Vmatrix} U + Yi, & 0 \\ 0 & U - Vi \end{Vmatrix} \quad S' = \begin{Vmatrix} X + Yi & 0 \\ O & X - Yi \end{Vmatrix}$$

Замечая, что:

$$H^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon & \frac{-i}{\sqrt{2}}\varepsilon \\ \frac{-i}{\sqrt{2}}\varepsilon & \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon \end{matrix} \right\|$$

и преобразовывая матрицы P' и S' при помощи H, получим производящие матрицы четвертого представления группы $\mathfrak{G}$:

$$P'' = H^{-1} P' H = \left\| \begin{matrix} U & -V \\ V & U \end{matrix} \right\| \quad S'' = H^{-1} S' H = \left\| \begin{matrix} X & -Y \\ Y & X \end{matrix} \right\|.$$

Эти матрицы, очевидно, содержат только вещественные элементы и, кроме того, они ортогональны (Frobenius и Schur, ibid), а, следовательно, и все матрицы, образующие четвертое представление группы $\mathfrak{G}$, также обладают этими свойствами.

Легко видеть, что последнее представление группы $\mathfrak{G}$ не может быть сведено к эквивалентному или, хотя бы, к изоморфному представлению при помощи матриц Y' степени $2p$ или низшей, так как группа всех матриц Y' степени $2p$ имеет порядок $(2p)!\,2^{2p}$, который при p простом нечетном не делится на p^3, и, следовательно, эта группа не может иметь своим делителем группу $\mathfrak{G}$.

Докажем теперь, что 4-е представление группы $\mathfrak{G}$ в области вещественных чисел неприводимо. Действительно из предыдущего изложения видно, что групповая матрица 4-го представления эквивалентна матрице:

$$\left\| \begin{matrix} M & 0 \\ 0 & N \end{matrix} \right\|,$$

где M—групповая матрица 1-го представления, N—групповая матрица 2-го представления (или наоборот), при чем матрицы M и N неприводимы ни в какой области. Но групповую матрицу можно разложить только единственным способом на неприводимые части, поэтому всякое разложение групповой матрицы 4-го представления должно содержать две неприводимые части, эквивалентные матрицам M и N, а мы уже видели, что матрицы M и N не могут быть эквивалентны матрицам, содержащим только вещественные элементы.

Таким образом, мы доказали, что определители 4-го представления группы $\mathfrak{G}$ ортогональны и содержат только вещественные элементы, при чем это представление не может быть эквивалентно группе матриц типа Y' и не приводится к тривиальному случаю групп вещественных линейных преобразований менее чем 5-го измерения.

В заключение, приведем в виде примера производящие элементы 1-го и 4-го представления группы $\mathfrak{G}$ при $p=3$:

$$P=\left\|\begin{array}{ccc} 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \\ \rho^3 & 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad S=\left\|\begin{array}{ccc} \rho^6 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|$$

$$P''=\left\|\begin{array}{cccccc} 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\varphi & 0 & 0 & -\sin 2\varphi \\ \cos 3\varphi & 0 & 0 & -\sin 3\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\varphi & 0 & 0 & \cos 2\varphi \\ \sin 3\varphi & 0 & 0 & \cos 3\varphi & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$S''=\left\|\begin{array}{cccccc} \cos 6\varphi & 0 & 0 & -\sin 6\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos 3\varphi & 0 & 0 & -\sin 3\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 6\varphi & 0 & 0 & \cos 6\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin 3\varphi & 0 & 0 & \cos 3\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|$$

где $\rho=\cos\varphi+i\sin\varphi$—первообразный корень из единицы 9-й степени и, следовательно, $\varphi=\frac{2k\pi}{9}$, при чем k может принимать одно из значений: 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Sur les groupes finis des substitutions réels linéaires et orthogonales

V. Speranski.

On demontre qu'un groupe fini d'ordre p^3 et du type

$$P^{p^2}=1,\ S^p=1,\ S^{-1}PS=P^{1+p}$$

des substitutions réels linéaires et orthogonales d'ordre $2p$ n'est jamais isomorphe aux groupes des substitutions monomials d'ordre $2p$ dont les élements essentiels sont ègaux à ± 1 (p ètant premier >2).

О распределении индексов по составному модулю.

И. А. Скопин.

Задачу о распределении индексов впервые поставил и разрешил проф. И. М. Виноградов в 1926 г. [1]). Им рассмотрен случай простого модуля. В настоящей работе я, с необходимыми дополнениями, применяю метод, которым пользовался проф. И. М. Виноградов, к решению задачи в случае составного нечетного модуля.

В §§ 1 и 2 я вывожу формулы распределения индексов для двух частных случаев составного модуля. В § 3 я даю формулу для любого нечетного модуля, которую без труда получим, зная вывод формул §§ 1 и 2. В §§ 4 и 5 я получаю асимптотическое выражение для суммы дробных частей значений ф-ции $\frac{A^x + n}{P}$.

Чтобы каждый раз не оговариваться, я буду обозначать знаком Σ сумму, которая распространена на все целые числа в указанных пределах и знаком Σ^* сумму, распространенную на числа взаимно-простые с модулем.

§ 1. Рассмотрим первый частный случай.

Пусть $P = p_1\, p_2 \ldots p_k =$ произведению различных простых нечетных чисел; обозначим через g_i первообразный корень p_i $(i=1,\ 2, \ldots k)$. Тогда T_1 — число решений системы

$$x \equiv g_i^{y_i} \ (\text{мод. } p_i),\ i = 1,\ 2, \ldots k,$$

где x и y_i, независимо друг от друга, пробегают значения: $x = 1, 2, \ldots Q \leqslant P-1$; $(x,\ P) = 1$; $y_i = 1,\ 2, \ldots p_i' < p_i$, выражается формулой

$$T_1 = \frac{p_1'\, p_2' \ldots p_k' Q'}{\varphi\,(P)} + \theta_1\ \ 2^{2k}\ \sqrt{P}\ \lg P \lg p_1 \lg p_2 \ldots \lg p_k,$$

где $Q' =$ числу чисел, взаимно-простых с P и $\leqslant Q$ и $|\ \theta_1\ | < 1$.

---

[1]) И. М. Виноградов „О распределении индексов" Доклады. Академии Наук СССР 1926 г.

Журн. Ленингр. Физ.-Мат. О-ва. т. II, в. 1 (1928).

Для доказательства рассмотрим сумму

$$(1)\quad S_1=\sum_{m_1=0}^{p_1-2}\cdots\sum_{m_k=0}^{p_k-2}\sum_{y_1=1}^{p_1'}\cdots\sum_{y_k=1}^{p_k'}\sum_{x=1}^{Q}{}^{*}\times$$

$$\times\, e^{2\pi i\left(\frac{m_1(ind_{g_1}x-y_1)}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k(ind_{g_k}x-y_k)}{p_k-1}\right)}.$$

С одной стороны,

$$(2)\qquad S_1=\varphi(P)\,T_1.$$

С другой стороны,

$$(3)\quad S_1=p_1'\ldots p_k'\,Q'+\sum_{d_j}p'_{\alpha_{j+1}}\ldots p'_{\alpha_{k-j}}\sum_{m_{\alpha_1}=1}^{p_{\alpha_1}-2}\cdots\sum_{m_{\alpha_j}=1}^{p_{\alpha_j}-2}\sum_{y_{\alpha_1}=1}^{p'_{\alpha_1}}\cdots$$

$$\cdots\sum_{y_{\alpha_j}=1}^{p'_{\alpha_j}}\sum_{x=1}^{Q}{}^{*}\,e^{2\pi i\left(\frac{m_{\alpha_1}(ind_{g_{\alpha_1}}x-y_{\alpha_1})}{p_{\alpha_1}-1}+\ldots+\frac{m_{\alpha_j}(ind_{g_{\alpha_j}}x-y_{\alpha_j})}{p_{\alpha_j}-1}\right)}+$$

$$+\sum_{m_1=1}^{p_1-2}\cdots\sum_{m_k=1}^{p_k-2}\sum_{y_1=1}^{p_1'}\cdots\sum_{y_k=1}^{p_k'}\sum_{x=1}^{Q}{}^{*}\times$$

$$\times\, e^{2\pi i\left(\frac{m_1(ind_{g_1}x-y_1)}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k(ind_{g_k}x-y_k)}{p_k-1}\right)},$$

где суммирование по d_j распространено на все делители P, исключая 1 и P, а значек j показывает число простых множителей, входящих в d_j.

Обозначая через S_2 последнюю сумму в равенстве (3), имеем

$$S_2=\sum_{m_1=1}^{p_1-2}\sum_{y_1=1}^{p_1'}e^{-2\pi i\frac{m_1y_1}{p_1-1}}\ldots\sum_{m_k=1}^{p_k-2}\sum_{y_k=1}^{p_k'}\times$$

$$\times\, e^{-2\pi i\frac{m_ky_k}{p_k-1}}\sum_{x=1}^{Q}{}^{*}e^{2\pi i\left(\frac{m_1\,ind_{g_1}x}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\,ind_{g_k}x}{p_k-1}\right)}.$$

Имея в виду оценить S_2, оценим сумму

$$S_3=\sum_{x=1}^{Q}{}^{*}e^{2\pi i\left(\frac{m_1\,ind_{g_1}x}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\,ind_{g_k}x}{p_k-1}\right)}.$$

Для этого рассмотрим сумму

$$S(z)=\sum_{x_1=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\left(\frac{m_1\, ind_{g_1} x_1}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\, ind_{g_k} x_1}{p_k-1}+\frac{x_1 z}{P}\right)},$$

где $(z, P)=1$. Полагая

$$x\equiv x_1 z \ (\text{мод. } P),$$

получим

$$S(z)=e^{-2\pi i\left(\frac{m_1\, ind_{g_1} z}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\, ind_{g_k} z}{p_k-1}\right)} S(1), \tag{4}$$

где

$$S(1)=\sum_{x=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\left(\frac{m_1\, ind_g\, x}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\, ind_{g_k} x}{p_k-1}+\frac{x}{P}\right)}.$$

Имеем

$$|S(1)|^2=S(1)\,\overline{S}(1)=$$

$$=\sum_{x=1}^{P-1}{}^{*}\sum_{y=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\left(\frac{m_1\,(ind_{g_1} x-ind_{g_1} y)}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\,(ind_{g_k} x-ind_{g_k} y)}{p_k-1}+\frac{x-y}{P}\right)}.$$

Полагая

$$x\equiv ty \ (\text{мод. } P),\ t=1, 2,\ldots P-1,\ (t, P)=1,$$

получим

$$|S(1)|^2=\sum_{t=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\left(\frac{m_1\, ind_{g_1} t}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\, ind_{g_k} t}{p_k-1}\right)}\sum_{y=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\frac{(t-1)y}{P}}.$$

Если $t-1$ и P имеют общий наибольший делитель d_t, то имеем

$$\sum_{y=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\frac{(t-1)y}{P}}=\mu(\delta_t)\varphi(d_t)\ ^{*}),\ \delta_t d_t=P$$

и, следовательно

$$|S(1)|^2=\sum_{t=1}^{P-1}{}^{*}\mu(\delta_t)\varphi(d_t)\, e^{2\pi i\left(\frac{m_1\, ind_{g_1} t}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\, ind_{g_k} t}{p_k-1}\right)}=$$

$$=\sum_{\delta_j}\mu(\delta_j)\varphi(d_{k-j})\sum_{n=1}^{\delta_j-1} e^{2\pi i\left(\frac{m_{\alpha_1}\, ind_{g_{\alpha_1}}(nd_{k-j}+1)}{p_{\alpha_1}-1}+\ldots+\frac{m_{\alpha_j}\, ind_{g_{\alpha_j}}(nd_{k-j}+1)}{p_{\alpha_j}-1}\right)},$$

где $\delta_j=p_{\alpha_1}\ldots p_{\alpha_j}$, $(n, \delta_j)=1$, $(nd_{k-j}+1, \delta_j)=1$ и суммирование по δ_j распространено на все делители числа P. Заменяя $nd_{k-j}+1$

---

*) $\mu(x)$ обозначает известную ф-цию Мёбиуса.

наименьшим положительным вычетом по мод. p_{α_i}, $i=1, 2,\ldots j$, получим

$$|S(1)|^2=\sum_{\delta_j}\mu(\delta_j)\varphi(d_{k-j})\sum_{n_1=2}^{p_{\alpha_1}-1}e^{2\pi i\frac{m_{\alpha_1}\,ind_{g_{\alpha_1}}n_1}{p_{\alpha_1}-1}}\cdots\sum_{n_j=2}^{p_{\alpha_j}-1}e^{2\pi i\frac{m_{\alpha_j}\,ind_{g_{\alpha_j}}n_j}{p_{\alpha_j}-1}}=$$

$$=\sum_{\delta_j}\mu(\delta_j)\varphi(d_{k-j})\mu(\delta_j)=\sum_{\delta_j}\varphi(d_{k-j})=P.$$

Откуда

$$|S(1)|=\sqrt{P}.$$

Из (4) получим

$$\overline{S}_3=\sum_{z=1}^{Q}{}^{*}\,e^{-2\pi i\left(\frac{m_1\,ind_{g_1}z}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\,ind_{g_k}z}{p_k-1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{S(1)}\sum_{x_1=1}^{P-1}{}^{*}\,e^{2\pi i\left(\frac{m_1\,ind_{g_1}x_1}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k\,ind_{g_k}x_1}{p_k-1}\right)}\sum_{z=1}^{Q}{}^{*}\,e^{2\pi i\frac{x_1 z}{P}}.$$

На основании закона обращения числовых ф-ций, имеем

$$\sum_{z=1}^{Q}{}^{*}\,e^{2\pi i\frac{x_1 z}{P}}=\sum_{d_j}\mu(d_j)\sum_{z_j=1}^{Q_j=\left[\frac{Q}{d_j}\right]}e^{2\pi i\frac{x_1 z_j}{\delta_j}},\quad d_j\delta_j=P,$$

где суммирование по d_j распространено на все делители числа P. Пользуясь известным методом *), получим

$$(5)\qquad |\overline{S}_3|=|S_3|<\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{x_1=1}^{P-1}{}_{*}\sum_{d}\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi x_1}{\delta_j}\right|}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_{d_j}d_j\delta_j\sum_{x_j=1}^{\frac{\delta_j-1}{2}}\frac{1}{x_j}<\sqrt{P}\sum_{d_j}\lg\delta_j<2^k\sqrt{P}\lg P.$$

На основании только что упомянутой работы проф. И. М. Виноградова, имеем

$$(6)\qquad \left|\sum_{m_j=1}^{p_j-2}\sum_{y_j=1}^{p'_j}e^{-2\pi i\frac{m_j y_j}{p_j-1}}\right|<(p_j-1)\lg p_j,\ j=1, 2,\ldots k.$$

---

*) См. Журнал Физико-Математического Общества при Пермском Университете выпуск I, 1919 г. И. М. Виноградов „Sur la distribution des residus et des non residus des puissances“.

Пользуясь (5) и (6), получаем

$$|S_2| < 2^k \sqrt{P}\ \varphi\ (P)\ \lg\ P\ \lg\ p_1 \ldots \lg\ p_k$$

Каждая из 2^{k-1} сумм, входящих в средину правой части равенства (3), по модулю меньше оценки $|S_2|$. Пользуясь этим, получаем

$$S_1 = p_1' \ldots p_k'\ Q' + \theta_1 2^{2k} \sqrt{P}\ \varphi(P) \lg P \lg p_1 \ldots \lg p_k,\ |\theta_1| < 1$$

Из последнего и (2) найдем искомую формулу.

§ 2. Рассмотрим второй частный случай.

Пусть $P = p^\lambda$; p—простое нечетное число; λ—любое целое число > 1; g—первообразный корень числа P.

Тогда T_2—число решений сравнения

$$x \equiv g^y\ (\text{мод. } P),$$

где x и y независимо друг от друга пробегают значения: $x = 1,\ 2, \ldots Q < P$; $(x,\ P) = 1$; $y = 1,\ 2, \ldots Q' \leqslant \varphi\ (P) - 1$, выражается формулой

$$T_2 = \frac{Q'\ Q^*}{\varphi\ (P)} + \theta_2\ \ 2\ \sqrt{Pp}\ \lg P \lg \varphi(P),\ |\theta_2| < 1,$$

где Q^*—число чисел взаимно-простых с P от 1 до Q включительно.

Для доказательства рассмотрим сумму

$$S_4 = \sum_{m=0}^{\varphi(P)-1} \sum_{y=1}^{Q'} \sum_{x=1}^{Q}{}^{*}\ e^{2\pi i \frac{m\ (ind_g\ x - y)}{\varphi\ (P)}}.$$

С одной стороны,

$$S_4 = \varphi\ (P)\ T_2.$$

С другой стороны,

$$S_4 = Q'\ Q^* + \sum_{m=1}^{\varphi(P)-1} \sum_{y=1}^{Q'} \sum_{x=1}^{Q}{}^{*}\ e^{2\pi i \frac{m\ (ind_g\ x - y)}{\varphi\ (P)}} =$$

$$= Q'\ Q^* + \sum_{m=1}^{\varphi(P)-1} \sum_{y=1}^{Q'} e^{-2\pi i \frac{m\ y}{\varphi\ (P)}} \sum_{x=1}^{Q}{}^{*}\ e^{2\pi i \frac{m\ ind_g\ x}{\varphi\ (P)}}.$$

Оценим модуль суммы

$$S_5 = \sum_{x=1}^{Q}{}^{*}\ e^{2\pi i \frac{m\ ind_g\ x}{\varphi\ (P)}},$$

Для этого рассмотрим сумму

$$S(z) = \sum_{x=1}^{P-1}{}^{*}\ e^{2\pi i \left(\frac{m\ ind_g\ x}{\varphi\ (P)} + \frac{z\ x}{P}\right)}.$$

где $(z, P)=1$. Полагая

$$x\, z \equiv t \text{ (мод. } P),$$

получим

$$(7)\ S(z)=e^{-2\pi i \frac{m\, ind_g z}{\varphi(P)}} \sum_{t=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\left(\frac{m\, ind_g t}{\varphi(P)}+\frac{t}{P}\right)}=e^{-2\pi i\frac{m\, ind_g z}{\varphi(P)}}.S(1)$$

Имеем

$$|S(1)|^2=S_1\,\overline{S}_1=\sum_{t=1}^{P-1}{}^{*}\ \sum_{u=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\left(\frac{m\,(ind_g t-ind_g u)}{\varphi(P)}+\frac{t-u}{P}\right)}.$$

Полагая

$$t\equiv u\, v \text{ (мод } (P);\ v=1, 2,\ldots P-1;\ (v, P)=1$$

имеем

$$|S(1)|^2=\sum_{v=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i \frac{m\, ind_g v}{\varphi(P)}} \sum_{u=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i \frac{(v-1)\,u}{P}}=$$

$$=\varphi(P)-\varphi\left(\frac{P}{p}\right)\sum_{n=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{m\, ind_g\left(n\frac{P}{p}+1\right)}{\varphi(P)}} \text{*)} \geqslant$$

$$\geqslant\varphi(P)-\varphi\left(\frac{P}{p}\right)(p-1).$$

Откуда

$$|S_1|\geqslant\sqrt{\varphi\left(\frac{P}{p}\right)}$$

Из (7) получаем

$$\overline{S}_5=\sum_{z=1}^{Q}{}^{*} e^{-2\pi i\frac{m\, ind_g z}{\varphi(P)}}=\frac{1}{S(1)}\sum_{x=1}^{P-1}{}^{*} e^{2\pi i\frac{m\, ind_g x}{\varphi(P)}} \sum_{z=1}^{Q}{}^{*} e^{2\pi i\frac{z\,x}{P}}$$

Откуда, точно так же, как в (5), получим

$$(8)\qquad |S_5|=|\overline{S}_5|<\frac{P\lg P}{\sqrt{\varphi\left(\frac{P}{p}\right)}}<\sqrt{2}\,\sqrt{Pp}\,\lg P.$$

Далее

$$(9)\qquad \left|\sum_{m=1}^{\varphi(P)-1}\ \sum_{y=1}^{Q} e^{-2\pi i\frac{m\,y}{\varphi(P)}}\right|<\varphi(P)\lg\varphi(P) \text{ **)}$$

---

*) Смотр. вычисление $|<S(1)|$ в § 1.
**) Смотр. (6).

Итак, пользуясь (8) и (9), имеем

$$S_4 = Q' \; Q^* + \theta_2 \sqrt{2} \; \sqrt{Pp} \; \varphi(P) \lg P \; \lg \varphi(P)$$

Из полученных выражений для S_4 найдем T_2.

§ 3. Общий случай.

Пусть $P = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k}$, где p_i—простое нечетное число и λ любое целое число > 0 ($i = 1, 2, \ldots k$) и пусть g_i — первообразный корень $p_i^{\lambda_i}$. Тогда T_3—число решений системы

$$x \equiv g_i^{y_i} (\text{мод. } p_i^{\lambda_i}); \; i = 1, 2, \ldots k,$$

где x и y_i пробегают независимо друг от друга, значения: $x = 1, 2, \ldots P_1 \leqslant P - 1$; $(x, P) = 1$, $y_i = 1, 2, \ldots Q_i < \varphi(p_i^{\lambda_i}) - 1$, выражается формулой

$$T_3 = \frac{Q_1 Q_2 \ldots Q_k P_1'}{\varphi(P)} + \theta_3 a \sqrt{p_1^{\lambda_1+\varepsilon_1} p_2^{\lambda_2+\varepsilon_2} \ldots p_k^{\lambda_k+\varepsilon_k}} \lg P \lg p_1^{\lambda_1} \ldots \lg p_k^{\lambda_k},$$

где $|\theta_3| < 1$, a зависит только от k, $\varepsilon_i = 1$ при $\lambda_i > 1$ и $\varepsilon_i = 0$ при $\lambda_i = 1$.

Высказанное вытекает из рассуждений §§ 1 и 2.

§ 4. Пусть $P = p_1 p_2 \ldots p_k$ = произведению различных простых нечетных чисел, A целое число взаимно-простое с P, $a_i = ind_{g_i} A$ ($i = 1, 2, \ldots k$), l_i—общий наибольший делитель a_i— и $p_i - 1$, $l_i e_i = p_i - 1$, $E = e_1 e_2 \ldots e_k$. Тогда T_4—число решений сравнения

$$y \equiv A^x (\text{мод. } P),$$

где y и x, независимо друг от друга, пробегают значения: $y = 1, 2, \ldots P' \leqslant P - 1$; $(y, P) = 1$, $x = 1, 2, \ldots E' < E$, выражается формулой

$$T_4 = \frac{P_1' E'}{\varphi(P)} + \theta_4 2^{3k+1} \sqrt{P} \lg P \lg E,$$

где P_1' = числу чисел взаимно-простых с P и $\leqslant P'$ и $|\theta_4| < 1$.

Для доказательства рассмотрим сумму

$$S_6 = \sum_{m_1=0}^{p_1-2} \ldots \sum_{m_k=0}^{p_k-2} \sum_{x=1}^{E'} \sum_{y=1}^{P'}{}^{*} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 (a_1 x - ind_{g_1} y)}{p_1 - 1} + \ldots + \frac{m_k (a_k x - ind_{g_k} y)}{p_k - 1} \right)}.$$

С одной стороны,

$$S_6 = \varphi(P) \, T_4. \tag{10}$$

С другой стороны,

$$
(11) \qquad S_6 = P_1' E' +
$$

$$
+\sum_{d_j}\sum_{m_{\alpha_1}=1}^{p_{\alpha_1}-2}\cdots\sum_{m_{\alpha_k}=1}^{p_{\alpha_k}-2}\sum_{x=1}^{E'}\sum_{y=1}^{P'}{}^{*} e^{2\pi i\left(\frac{m_{\alpha_1}(a_{\alpha_1}x-ind_{g_{\alpha_1}}y)}{p_{\alpha_1}-1}+\ldots+\frac{m_{\alpha_j}(a_{\alpha_j}x-ind_{g_{\alpha_j}}y)}{p_{\alpha_j}-1}\right)}+
$$

$$
+\sum_{m_1=1}^{p_1-2}\cdots\sum_{m_k=1}^{p_k-2}\sum_{x=1}^{E'}\sum_{y=1}^{P'}{}^{*} e^{2\pi i\left(\frac{m_1(a_1x-ind_{g_1}y)}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k(a_kx-ind_{g_k}y)}{p_k-1}\right)}.
$$

где суммирование по d_j распространено на все делители P исключая 1 и P. Обозначая через S_7 последнюю сумму в (11), имеем

$$
S_7=\sum_{m_1=1}^{p_1-2}\cdots\sum_{m_k=1}^{p_k-2}\sum_{x=1}^{E'} e^{2\pi i\left(\frac{m_1 a_1}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k a_k}{p_k-1}\right)x}\sum_{y=1}^{P'}{}^{*}\times
$$

$$
\times e^{-2\pi i\left(\frac{m_1 ind_{g_1}y}{p_1-1}+\ldots+\frac{m_k ind_{g_k}y}{p_k-1}\right)}
$$

и на основании (5)

$$
|S_7|<2^k\cdot\sqrt{P}\lg P\left|\sum_{m_1=1}^{p_1-2}\cdots\sum_{m_k=1}^{p_k-2}\sum_{x=1}^{E'}\times\right.
$$

$$
\left.\times e^{2\pi i\left(\frac{m_1\alpha_1}{e_1}+\ldots+\frac{m_k\alpha_k}{e_k}\right)x}\right|,
$$

где $\alpha_i=\frac{a_i}{l_j}$ $(i=1,2,\ldots k)$. Докажем что T_5—число слагаемых, входящих в сумму правой части последнего неравенства, при данном x, удовлетворяющих условию

$$
(12) \qquad \frac{m_1\alpha_1}{e_1}+\ldots+\frac{m_k\alpha_k}{e_k}=\frac{t}{E}+N,
$$

при t одном из чисел ряда: $0, 1\ldots E-1$ и N целом, выражается формулой

$$
(13) \qquad T_5=\theta_5\, 2^{k+1}\frac{(p_1-2)(p_2-2)\ldots(p_k-2)}{E},
$$

где $|\theta_5|<1$. Для доказательства рассмотрим сумму

$$
S_8=\sum_{n=0}^{E-1}\sum_{m_1=1}^{p_1-2}\cdots\sum_{m_k=1}^{p_k-2} e^{2\pi i\left(\frac{\alpha_1 m_1}{e_1}+\ldots+\frac{\alpha_1 m_k}{e_k}-\frac{t}{E}\right)n}
$$

С одной, стороны

$$S_8 = E\ T_5 \tag{14}$$

С другой стороны,

$$S_8 = (p_1-2)\ (p_2-2)\ \ldots\ (p_k-2) + \tag{15}$$

$$\sum_{d_j} \sum_{n} (-1)^j \left(p_{\beta_{j+1}}-2\right) \left(p_{\beta_{j+2}}-2\right) \cdots \left(p_{\beta_{k-j}}-2\right),$$

где внутренняя сумма распространена на все n, которые делятся на произведение $e_{\beta_1}\ e_{\beta_2}\ \ldots\ e_{\beta_k}$, но не имеют делителями других e и внешняя сумма—на все делители P. Из (15) получаем

$$|S_8| < 2^{k+1}\ (p_1-2)\ (p_2-2) \ldots (p_k-2)$$

Из последнего и (14) найдем T_5. На основании (13), выделив все слагаемые, для которых (12) соблюдено с $t=0$, получим

$$|S_7| < 2^k \sqrt{D}\ \lg\ P \left(2^{k+1} \frac{(p_1-2)\ (p_2-2) \ldots (p_k-2)}{E} E' + \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{m_1=1}^{p_1-2}{}' \cdots \sum_{m_k=1}^{p_k-2}{}' \sum_{x=1}^{E'} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 \cdot \alpha_1}{e_1} + \ldots + \frac{m_k\ \alpha_k}{e_k} \right) x} \right| \right) <$$

($'$ над Σ указывают, что суммирование происходит по соответствующим оставшимся значениям)

$$< 2^k \sqrt{P} \lg P \left(2^{k+1} \frac{(p_1-2)\ (p_2-2) \ldots (p_k-2)}{E} \cdot E' + \right.$$

$$\left. + \sum_{m_1=1}^{p_1-2}{}' \cdots \sum_{m_k=1}^{p_k-2}{}' \frac{1}{\left| \sin \pi \left(\frac{m_1\ \alpha_1}{e_1} + \ldots \frac{m_k\ \alpha_k}{e_k} \right) \right|} \right) ^{*)}$$

и на основании (13) и (12)

$$< 2^k \sqrt{P} \lg P\ 2^{k+1} \frac{(p_1-2)\ p_2-2) \ldots (p_k-2}{E} \left(E' + \sum_{m=1}^{E-1} \frac{1}{\left| \sin \pi \frac{m}{E} \right|} \right) <$$

$$< 2^{2k+2} \sqrt{P}\ \varphi(P)\ \lg P \lg E.$$

---

*) Смотреть работу И. М. Виноградова, на которую я уже ссылался на странице 85-й.

Каждая из 2^{k-2} сумм, входящих в средину правой части равенства (11), по модулю $< |S_7|$ и, следовательно,

$$S_6 = P_1' \; E' + \theta_4 \; 2^{3k+1} \sqrt{P} \; \varphi \; (P) \lg P \lg \; E,$$

где $|\theta_4| < 1$. Из последнего и (10) получим T_4.

§ 5. Найдем асимптотическое выражение суммы

$$\sum_{x=1}^{E'} \left\{ \frac{A^x + n}{P} \right\}, \tag{16}$$

где A, P и E' те же, что и в § 4, n—любое целое число $< P$ и символ $\}z\{$ обозначает дробную часть числа z,

Из выведенной в § 4 формулы вытекает, что число значений дроби $\frac{s+n+\eta}{P}$, где $(s, P) = 1$, $\eta = 0$, если $s + n < P$ и $\eta = -P$, если $s + n \geqslant P$, $s < P$, входящих в сумму (16) есть $\frac{E'}{\varphi(P)} + \theta_s \;\; R - \theta_{s-1} \;\; R$, где $|\theta_s| < 1$, $|\theta_{s-1}| < 1$ и $R = 2^{3k+1} \sqrt{P} \lg P \lg E$. Давая s все значения ряда $1, 2, \ldots P-1$, те которые взаимно-простые с P, легко получим

$$\sum_{x=1}^{E'} \left\{ \frac{A^x + n}{P} \right\} = \frac{E'}{\varphi\;(P)} \sum_{s=1}^{P-1}{}^{*} \left(\frac{s+n+\eta}{P} \right) + 3 \; \theta_6 \; 2^{3k+1} \sqrt{P} \lg P \lg E$$

Сумму в правой части последнего напишем так:

$$\sum_{s=1}^{P-1}{}^{*} \frac{s}{P} + \sum_{s=1}^{P-1}{}^{*} \frac{n}{P} - \sum_{s \geqslant P-n}{}^{*} 1.$$

На основании закона обращения числовых ф-ций имеем

$$\sum_{s=1}^{P-1}{}^{*} \frac{s}{P} = \sum_{d_j} \mu\;(d_j) \sum_{s=1}^{\frac{P}{d_j}} \frac{d_j \; u}{P} =$$

$$= \sum_{d_j} \mu\;(d_j) \left(\frac{d_j + P}{2\;P} \cdot \frac{P}{d_j} \right) = \frac{1}{2} \; \varphi \; (P)$$

(Здесь суммирование по d_j распространено на все делители P). Далее легко получим

$$\left| \sum_{s=1}^{P-1}{}^{*} \frac{n}{P} - \sum_{s \geqslant P-n}{}^{*} 1 \right| < 2^{2k}$$

Окончательно имеем

$$\sum_{x=1}^{E'} \left\{\frac{A^{x+n}}{P}\right\} = \frac{E'}{2} + \theta_7\, 2^{3k+3} \sqrt{P} \lg P \lg E,$$

где $|\theta_7| < 1$.

Тем же методом, каким мы пользовались при выводе последней формулы, получим

$$\sum_{x=1}^{E'} \left\{\frac{A^x+n}{P}\right\} = \frac{E'}{2} + \theta_8\, a_1 \sqrt{p_1^{\lambda_1+\varepsilon_1} p_2^{\lambda_2+\varepsilon_2} \ldots p_k^{\lambda_k+\varepsilon_k}} \lg P \lg E,$$

где числа P, p_1, $p_2, \ldots p_k$, λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_k$, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ определены в § 3, $(A, P) = 1$, n—любое целое число $< P$, E определено аналогично числу E в § 4, $E' < E$, $|\theta_8| < 1$ и число a_1 зависит только от k.

Ueber die Verteilung der Indices in Bezug auf einen zusammengesetzten Modul.

J. Skopin.

In der vorliegenden Abhandlung löse ich das Problem der Verteilung der Indices für den Fall eines zusammengesetzten ungeraden Modul. Zuerst betrachte ich den Fall, wenn der Modul P ein Produkt verschiedener ungerader Primzahlen ist, $(P = p_1 p_2 \ldots p_k)$ dann — den zweiten Fall, wenn P irgend eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist $(P = p^\lambda)$, und endlich den Fall, wenn P irgend eine ungerade Zahl ist $(P = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k})$. Im letzten Falle wird die Anzahl T der Auflösungen des Systems

$$x \equiv g_i^{y_i} \pmod{p_i^{\lambda_i}}, \quad i = 1, 2, \ldots k,$$

wenn x und y_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ unabhängig von einander, x die zu P primen Werte der Reihe $1, 2, \ldots Q \leqslant P - 1$, y_i die Werte

$$1, 2, \ldots p_i' \leqslant \varphi(p_i^{\lambda_i})$$

durchlaufen und g_i eine Primwurzel der Zahl $p_i^{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots k)$, ist, durh folgende Formel ausgedrückt:

$$T = \frac{p_1' p_2' \ldots p_k' Q'}{\varphi(P)} + \theta a \sqrt{p_1^{\lambda_1+\varepsilon_1} p^{\lambda_2+\varepsilon_2} \ldots p_k^{\lambda_k+\varepsilon_k}} \lg P \lg p_1^{\lambda_1} \ldots \lg p_k^{\lambda_k},$$

wo $|\theta| < 1$ ist, Q' die Anzahl der zu P relativ primen Zahlen von 1 bis Q bedeutet, $\varepsilon_i = 1$ wenn $\lambda_i = 1$ und $\varepsilon_i = 0$ wenn $\lambda_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ ist.

Ferner gebe ich einen asymptotischen Ausdruck für die Summe der Bruchteile der Werte der Funktion $\frac{A^x+n}{P}$, wo P irgend eine ungerade Zahl ist. Im besonderen Falle, wenn P ein Produkt verschiedener ungerader Primzahlen ist $(P=p_1 p_2 \ldots p_k)$, lautet diese Formel:

$$\sum_{x=1}^{E'} \left\{\frac{A^x+n}{P}\right\} = \frac{E'}{2} + \theta\, 2^{3k+3} \sqrt{P}\, \lg P \lg E,$$

wo $(A,P)=1$, $|\theta|<1$, $E'<E$ ist, die Bedeutung der Grösse E aber, im § 4 meiner Arbeit erklärt wird.

Résolution algorithmique des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann.

(*Mémoire premier*: **Le problème de Poincaré, concernant la construction d'un groupe de monodromie d'un système donné d'équations différentielles linéaires aux intégrales régulières).**

Par M. *J. A. Lappo-Danilevski* (Léningrad).

I.

§ 1. Fixons m points a_j ($j=1, 2, \ldots m$) à distance finie sur le plan de la variable complexe x et traçons m coupures $(a_j \infty)$, joignant ces points au point à l'infini.

Désignons par:

$$U_j = \| u_{kl}^{(j)} \| \quad \text{et} \quad V_j = \| v_{kl}^{(j)} \| \quad (j=1, 2 \ldots m)$$

deux systèmes de substitutions linéaires du dégré n, dont les coefficients $u_{kl}^{(j)}$ et $v_{kl}^{(j)}$ ($k, l=1, 2, \ldots n$) sont independants de x. Nommons „matrice régulière, admettant les substitutions différentielles U_j et les substitutions intégrales V_j en points singuliers respectivement a_j", toute matrice

$$Y(x) = \| y_{kl}(x) \|,$$

formée de n^2 fonctions analytiques $y_{kl}(x)$, satistaisant aux conditions suivantes.

1°. $Y(x)$ représente une matrice intégrale du système d'équations différentielles linéaires aux singularités régulières:

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j}{x-a_j}. \tag{1}$$

2°. Les valeurs des fonctions $y_{kl}(x)$ sur le bord positif et négatif de toute coupure $(a_j \infty)$ *) sont liées par les rélations:

$$\overset{-}{Y}(x) = V_j \cdot \overset{+}{Y}(x). \tag{2}$$

---

*) En suivant la coupure $(a_j \infty)$ du point a_j à l'infini on a le bord positif du côté gauche.

Les deux problèmes fondamentaux de la théorie des matrices régulières sont:

A) **Le problème de Poincaré, concernant la détermination des matrices régulières et des systèmes correspondant des substitutions intégrales, les substitutions différentielles, ainsi que la configuration des points singuliers étant supposées données.**

B) **Le problème de Riemann, concernant la détermination des matrices regulières et des systémes correspondant des substitutions différentielles, les substitutions intégrales ainsi que la configuration des points singuliers étant suposées données.**

§ 2. Le groupe dérivé des substitutions intégrales V_j étant un groupe de monodromie du système d'équations (1), la résolution du problème (A) nous fournit évidemment la résolution du problème sur la détermination d'un groupe de monodromie d'un système donné (1). Ce problème a été traité dans toute sa généralité le première fois par Henri Poincaré dans son mémoire célèbre: „Sur les groupes d'équations linéaires" *).

L'éminent géomètre a établi, que les coefficients $v_{kl}^{(j)}$ sont les fonctions entières des coefficients $u_{kl}^{(j)}$, mais sans donner les expressions explicites de ces fonctions. Ses recherches, ainsi que celles de Mittag-Leffler **) concernent plutôt la détermination des invariants des groupes d'équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques (Poincaré), ou des fonctions analytiques uniformes, ne possédant qu'un nombre fini de points singuliers dans toutes portion finie du plan de la variable complexe (Mittag-Leffler). Les expressions analytiques des coefficients $v_{kl}^{(j)}$, mettant en évidence le caractère de leur dépendance des coefficients $u_{kl}^{(j)}$, ainsi que de la configuration des points singuliers a_j, manquaient encore. Ces expressions, ainsi que les expressions analogues pour les matrices régulières correspondant se trouvent établies dans le troisième chapitre de ce mémoire (***). Elles constituent la résolution algorithmique du problème régulier de Poincaré. Le deuxième chapitre présente un examem préliminaire des fonctions analytiques des substitutions linéaires, ce qui est indispensable pour fonder la théorie algorithmique des matrices régulières ****).

---

*) Acta Mathematica (1884) t. 4, p. 201; Œuvres; (1916), t. II; p. 306.

**) Acta Mathematica (1891), t. 15, p. 1.

***) Les résultats principaux, concernant la résolution algorithmique du problème régulier de Poincaré ont été énoncés dans notre Note: C. R. (1927) t. 185; p. 439. Voir aussì notre mémoire: „Théorie algorithmique des oorps de Riemann"; Recueil mathèmatique de Moscou; (1927); t. 34 fascic. 2; pp. 113—148.

****) Cette méthode de l'investigation fournit, outre cela, la résolution algorithmique du problème de Poincaré pour systèmes d'équations differentielles linéaires à coefficients rationnels arbitraires (Voir notre Note: C. R. (1928) t. 186, p. 349).

§ 3. Le problème (B) se reduit évidemment au problème bien connu de Riemann sur la construction de matrices régulières et d'équations linéaires correspondant, admettant un groupe de monodromie donné. Le fait d'existence des solutions du problème de Riemann a été etabli par M. M. Hilbert *), Plemelj **), Birkhoff ***), Garnier ****) et Schlesinger *****); d'ailleurs le cas général n'a été truité que par M. M. Plemelj et Birkhoff. Ces deux géomètres démontrent d'abord l'existence des solutions d'un problème altéré, en considérant un système des coupures, liant consécutivement les points singuliers par une courbe fermée et en supposant, que les coefficients des substitutions données sont les fonctions des points de cette courbe, admettant les dérivées continues A l'aide d'un certain système des fonctions non analytiques ils demontrent ensuite, que l'existence des solutions du problème altéré entraîne l'existence des solutions du problème propre de Riemann. Cette méthode ne peut donner ancun algorithme analytique pour resoudre le problème de Riemann, d'ailleurs elle ne nous apprend rien sur le caractère de la dépendance des matrices cherchées des substitutions et de la configuration des points singuliers donnèes. Outre cela, la méthode indiquée ne donne aucun renseignement sur la nature de l'indétermination d'une matrice regulière, satisfaisant aux conditions du problème.

En considérant le problème (B), comme un problème inverse par rapport au problème (A), nous établirons dans le mémoire suivant les expressions analytiques explicites de toutes les matrices régulières cherchées et des subtitutions différentielles correspondants, mettant complétement en évidence le caractère de leur dépendance des substitutions intégrales et de la configuration des points singuliers. Ces expressions donneront ainsi la résolution algorithmique du problème régulier de Riemann ******).

II.

§ 4. Les éléments donnés ainsi que les éléments cherchés des problèmes de Poincaré et de Riemann étant des substitutions linéaires du dégré fixe n, c'est la notion de la rélation fonctionnelle dans le do-

---

*) Gött. Nachr. (1905) S. 307: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" (1912). S. 81.

**) Monatshefte für Math. und Physik; (1908) Bd. 19; S. 211.

***) Proc. of the Amer. Academy of arts and sciences; (1913); t. 49, p. 521.

****) C. R. (1925); t. 181; p. 1046.

*****) Crelles Journ. (1905). Bd. 129, p. 287; Bd. 130, p. 26; Math. Ann. Bd. 63; p. 273; Acta Mathem. t. 31. „Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialceichungen auf funktionentheoretischer Grundlage" (1922). S. 301.

******) Dans le cas, où les substitutions intégrales se trouvent dans un certain voisinage de la substitution identique, les expressions analytiques, donnant la résolution algorithmique du problème de Riemann ont été établis dans notre Note: C. R. (1927) t. 185, p. 528, et dans notre mémoire déjè cité.

Les résultats principaux concernant le cas général ont été enoncés dans notre Note. C. R. (1927), t. 185, p. 1181.

maine des substitutions linéaires, qui fournit le fondement logique de l'analyse des problèmes considerés.

Chaque substitution linéaire

$$X = \| \{X\}_{kl} \|$$

sera traitée comme un système de n^2 „éléments" $\{X\}_{kl} (k, l = 1, 2, \ldots, n)$, qui sont des nombres complexes. La substitution, dont les éléments $|\{X\}_{kl}|$ sont respectivement les modules des éléments de la substitution X, sera désignée par $|X|$. A et B étant des substitutions aux éléments: $\{A\}_{kk} = a$; $\{A\}_{kl} = 0$ $(k \neq l)$; $\{B\}_{kk} = \{B\}_{kl} = b$, nous écrirons pour abréger: $A = a$; $B = \| b \|$ *). Les n^2 rèlations: $|\{X\}_{kl}| < |\{Y\}_{kl}|$ seront considérées comme équivalentes à une seule rélation $|X| < |Y|$. Les définitions usuelles des opérations rationnelles dans le domaine des substitutions linéaires du dégré n sont présentées par les formules:

$$\{X \pm Y\}_{kl} = \{X\}_{kl} \pm \{Y\}_{kl}; \quad \{X \cdot Y\}_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \{X\}_{ks} \cdot \{Y\}_{sl};$$

$$\left\{\frac{1}{X}\right\}_{kl} = \{X^{-1}\}_{kl} = \frac{D_{lk}(X)}{D(X)}; \quad k, l = 1, 2 \ldots n,$$

où, dans le dernier cas, le déterminant $D(X)$ de la substitution X est destinct de zéro et $D_{lk}(X)$ est le complément algébrique de $D(X)$.

Les n^2 séries: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \{X_\nu\}_{kl} = \{X\}_{kl}$ étant convergentes, nous dirons que la série des substitutions: $\sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu = X$ est aussi convergente et a pour somme la substitution X.

Désignons par α_0, $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} (j_1, j_2, \ldots j_\nu = 1, 2 \ldots m; \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ des constantes numériques, par $X_1, X_2 \ldots X_m$ des substitutions aux éléments variables, par $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$ des substitutions aux éléments fixes et par $\sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)}$ des sommes de m^ν termes, qu'on obtient en faisant parcourir indépendamment aux indices $j_1, j_2, \ldots j_\nu$ les valeurs $1, 2, \ldots m$. Les n^2 séries:

$$(3) \quad \{F(X_1, X_2, \ldots X_m)\}_{kl} =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)} \{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\}_{kl} \, \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$$

---

*) Pour la substitution identique nous conservons parfois la notation usuelle: I, de sorte que $\{I\}_{kk} = 1$; $\{I\}_{kl} = 0$; $(k \neq l)$.

sont ainsi des séries, ordonnées suivant les puissances des binomes: $\{X_j\}_{kl} - \{X_j^0\}_{kl}$; $(j=1.\ 2, \ldots m;\ k,\ l=1,\ 2, \ldots n)$. Si ces séries représentent les n^2 fonctions $\{F(X_1, X_2, \ldots X_m)\}_{kl}$ de mn^2 variables complexes $\{X_j\}_{kl}$, holomorphes dans un voisinage:

$$\sum_{j=1}^{m} \mid \{X_j\}_{kl} - \{X_j^0\}_{kl} \mid < \rho$$

du point $\{X_j^0\}_{kl}$ dans l'espace de mn^2 dimensions, nous dirons que la série des compositions:

(4) $F(X_1, X_2, \ldots X_m) =$

$$= \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\, \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$$

représente une fonction $F(X_1, X_2, \ldots X_m)$ de m substitutions $X_1, X_2 \ldots X_m$, holomorphe dans le voisinage

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{m} \mid X_j - X_j^0 \mid < \| \rho \|$$

du système des substitutions $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$. *) Si les fonctions (3) sont entières ou méromorphes par rapport aux variables $\{X_j\}_{kl}$ la fonction (4) sera dite réspectivement entière ou méromorphe. Donc, la notion d'une fonction holomorphe de m substitutions variables du dégré n se réduit à la notion d'un système de n^2 fonctions holomorphes de mn^2 variables numeriques, dont les développements en séries des puissances sont de la forme (3) **).

§ 5. Les coefficients $\alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$ de la série des compositions (4) sont évidemment des polynomes des coefficients $C_{\mu_{11}^{(1)} \ldots \mu_{nn}^{(1)} \ldots \mu_{11}^{(m)} \ldots \mu_{nn}^{(m)}}$ des developpements des fonctions $\{F(X_1, X_2 \ldots X_m)\}_{kl}$ en séries des puissances des $\{X_j\}_{kl} - \{X_j^0\}_{kl}$. En calculant ces polynomes on établit, que les égalités: $C_{\mu_{11}^{(1)} \ldots \mu_{nn}^{(1)} \ldots \mu_{11}^{(m)} \ldots \mu_{nn}^{(m)}} = 0$ pour toutes les valeurs des indices entraînent les égalités $\alpha_0 = \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0$ pour toutes les valeurs des indices. Il en resulte l'unicité de la représentation de la fonction $F(X_1 X_2 \ldots X_m)$, holomorphe dans un domaine (5), par le série des compositions (4).

*) Nous prenons le domaine de la convergence sous la forme spéciale (5), ce qui nous suffira pour la suite.

**) La notion d'une fonction analytique des substitutions linéaires peut être définie d'une façon beaucoup plus générale. Cette généralisation est, par exemple, indispensable, si l'on veut traiter l'opération du prolongement analytique. Elle se réduit au changement des coefficients numériques $\alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$ par des substitutions fixes, à la considération des substitutions iterées et à la généralisation correspondant de l'opération de la composition.

En désignant par $| \alpha^{(\nu)} |$ le plus grand des modules $| \alpha_{j_1 j_2 \dots j_\nu} |$ $(j_1, j_2 \dots j_\nu = 1, 2 \dots m)$ et en remarquant, que la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} n^{\nu-1} (\rho - \varepsilon)^\nu \; | \alpha^{(\nu)} |$, où ε est un nombre positif si petit que l'on veut, entraîne la convergence de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{(1.2\dots m)} | X_{j_1} - X_{j_1}^0 | \cdot | X_{j_2} - X_{j_2}^0 | \dots | X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0 | \cdot | \alpha_{j_1 j_2 \dots j_\nu} |,$$

pourvu que les substitutions $X_1 \cdot X_2 \dots X_m$ soient dans le domaine (5), on arrive à la conclusion suivante. Si la fonction $f(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu$ de la variable numérique ξ est holomorphe dans le cercle $| \xi | < \rho n$, la fonction des substitutions (4) est holomorphe dans le domaine (5). Dans le même domaine on a l'évaluation

$$(6) \qquad | F(X_1, X_1 \dots X_m) - \alpha_0 | <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{\infty} (| X_1 - X_1^0 | + | X_2 - X_2^0 | + \dots + | X_m - X_m^0 |)^\nu \cdot | \alpha^{(\nu)} |.$$

§ 6. Les propositions sur le calcul des séries des compositions sont analogues aux propositions correspondant sur les séries ordinaires des puissances, sauf quelques singularités algorithmiques concernant la détermination des coefficients. ce qui vient de l'incommutativité de l'opération de la composition. Ces propositions peuvent êtree énoncées comme il suit:

L e m m e I: Si la substitution.

$$Z - Z^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{(1.2\dots p)} (Y_{j_1} - Y_{j_1}^0) (Y_{j_2} - Y_{j_2}^0) \dots (Y_{j_\nu} - Y_{j_\nu}^0) \beta_{j_1 j_2 \dots j_\nu}$$

est une fonction des substitutions $Y_1, Y_2, \dots Y_p$, holomorphe dans un voisinage du système $Y_1^0, Y_2^0, \dots Y_p^0$, et si les substitutions

$$Y_j - Y_j^0 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \dots j_\nu}^{(1, 2, \dots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0) (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \dots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \alpha^{(j)}_{j_1, j_2, \dots j_\nu}; \; j = 1, 2 \dots p$$

sont à leur tour des fonctions des substitutions $X_1, X_2, \dots X_m$, holomorphe dans un voisinage du système $X_1^0, X_2^0 \dots X_m^0$, la substitution $Z - Z^0$ est une fonction

$$Z - Z^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \dots j_\nu}^{(1, 2, \dots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0) (X_{j_2} - X_{j_2}^0) \dots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \gamma_{j_1, j_2, \dots j_\nu}$$

des substitutions $X_1, X_2, \ldots X_m$, holomorphe dans un voisinage du système $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$, les coefficients $\gamma_{j, j_2 \ldots j_\nu}$ étant definis par les formules:

$$\gamma_{j_1} = \sum_{h_1=1}^{p} \alpha_{j_1}^{(h_1)} \beta_{h_1}$$

$$\gamma_{j_1 j_2, \ldots j_\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{h_1 h_2 . h_\mu}^{1, 2 \ldots, p} \sum_{1 \leqq \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \alpha_{j_1 \ldots j_{\varkappa_1}}^{(h_1)} \alpha_{j_{\varkappa_1+1} \ldots j_{\varkappa_2}}^{(h_2)} \ldots$$

$$\ldots \alpha_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1} \ldots j_\nu}^{(h\mu)} \beta_{h_1, h_2 \ldots h_\mu}, \tag{7}$$

où la dernière somme est étendue sur toutes les valeurs entières positives des indices $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\mu-1}$, satisfaisant à l'inégalité indiquée.

En particulier, si $Z = Y_1 \cdot Y_2$, on a:

$$\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \alpha_{j_1 \ldots j_\varkappa}^{(1)} \alpha_{j_\varkappa + 1 \ldots j_\nu}^{(2)}.$$

Si Z est une fonction entière des $Y_1, Y_2, \ldots Y_\rho$, et si ces dernières substitutions sont des fonctions entières des $X_1, X_2, \ldots X_m$, Z est de même entière comme fonction des $X_1, X_2, \ldots X_m$.

Lemme II: Si les m substitutions:

$$Y_j - Y_j^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots$$

$$\ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(j)}; \; j = 1, 2, \ldots m \tag{8}$$

sont des fonctions des substitutions $X_1, X_2, \ldots X_m$, holomorphes dans un voisinage du système $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$, et si le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_m^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \ldots, \alpha_m^{(m)}, \end{vmatrix} = \Delta$$

est distinct de zéro, le système d'équations (8) admet un système unique des solutions $X_1, X_2, \ldots X_m$, se réduisant à $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$ pour $Y_1 = Y_1^0, Y_2 = Y_2^0, \ldots Y_m = Y_m^0$, qui sont presentées par les fonctions:

$$X_j - X_j^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} (Y_{j_1} - Y_{j_1}^0)(Y_{j_2} - Y_{j_2}^0) \ldots$$

$$\ldots (Y_{j_\nu} - Y_{j_\nu}^0) \beta_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(j)}; \; j = 1, 2, \ldots m,$$

holomorphes dans un voisinage des système $Y_1^0, Y_2^0, \ldots Y_m^0$, les coefficients $\beta^{(j)}_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$ étant définis par les rélations de récurrence:

$$\beta^{(j)}_{j_1} = \frac{\Delta_{j_1 j}}{\Delta}$$

$$\beta^{(j)}_{j_1, j_2, \ldots j_\nu} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h=1}^{m} \sum_{h_1, h_2, \ldots h_\mu}^{(1, 2, \ldots m)} \sum_{1 \leq \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} \leq \nu} \beta^{(h_1)}_{j_1 \ldots j_{\varkappa_1}} \beta^{(h_2)}_{j_{\varkappa_1}+1 \ldots j_{\varkappa_2}} \cdots$$
$$\cdots \beta^{(h_\mu)}_{j_{\varkappa_{\mu-1}}+1 \ldots j_\nu} \alpha^{(h)}_{h_1, h_2, \ldots h_\mu} \Delta_{hj},$$

où Δ_{hj} est le complément algébrique de la h-ième ligne et de la j-ème colonne dans le déterminant Δ. La démonstration de ces deux lemmes est évidente: on forme les séries des compositions satisfaisant formellement aux conditions et on établit la convergence en se servant des propositions analogues de la théorie des fonctions de plusieures variables complexes.

§ 7. Le calcul des séries des puissances d'une seule substitution X est complétement analogue au calcul des séries des puissances d'une variable complexe ξ, cas l'incommutativité de la composition ne peut être patente dans ce cas. *). On démontre ainsi la proposition suivante: soit $G(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m)$ une fonction entiére des variables numériques $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$; si les m fonctions: $\varphi_j(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(j)}_\nu \xi^\nu$ $(j = 1, 2 \ldots m)$ de la variable ξ, holomorphes dans un voisinage du point $\xi = 0$, identifient la relation: $G(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots \varphi_m(\xi)) = 0$, les m fonctions: $\varphi_j(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(j)}_\nu X^\nu$ de la substitution X identifient la rélation analogue: $G(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)) = 0$. **)

---

*) Ces séries sont au fond un cas particulier des séries des puissances d'une quantité complexe formée avee plusieure unités linéairement independantes, qui ont été étudiées par M. Weyr. [Bulletin des Sc. math. (1887) 2-me série, t. II; p. 205]. Les séries des puissances d'une matrice du deuxième dégrè de la forme $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu$ ont été considérées par M. Schlesinger. („Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf functionentheoretischer Grundlage". 1922, p. 154). Cet auteur en fait quelques applications à l'étude d'un système d'équation différentielles linéaires dans un voisinage d'un point singülier.

**) En vertu du § 5 les fonctions $\varphi_j(X)$ sont holomorphes dans un voisinage de la substitution nulle. D'ailleurs, pour que la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu$ soit con-

Les fonctions élémentaires: e^X; t^X, $\lg X$, X^t, où t est un nombre, jouent un rôle important dans la suite. Les deux premières fonctions sont définies par les développements entièrs:

$$(10) \qquad e^X = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu ; \; t^X = e^{X\lg t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (X \lg t)^\nu .$$

Le logarithme: $Y = \lg X$ sera traité comme l'ensemble de toutes les substitutions satistaisant á l'èquation $e^Y = X$. Il résulte immédiatement de la proposition indiquée ci-dessus et du § 5, que la branche du logarithme, se réduisant à zéro pour $X = I$, est une fonction holomorphe

$$(11) \qquad \lg X = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (X - I)^\nu$$

dans le voisinage $| X - I | < \left\| \frac{1}{n} \right\|$ de la substitution identique. La fonction X^t se trouve définie par la rélation: $X^t = e^{t \lg X}$. La branche de cette fonction, se réduisant à I pour $X = I$ est une fonction holomorphe

$$X^t = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t(t-1) \; . \; . \; (t-\nu+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, \nu} (X - I)^\nu$$

dans le voisinage indiqué de la substitution identique.

§ 8. Les éléments et les nombres caractéristiques de la substitution X étant donnée, les éléments des substitutions e^X, t^X, $\lg X$, X^t se calculent à l'aide d'un nombre fini d'opération rationnelles, exponentielles et logarithmiques: Pour le faire voir, considérons une matrice régulière $Y_b(x)$ ne possedant qu'un seul point singulier a à distance finie et se réduisant à la matrice identique pour $x = b$. Soit U et V la substitution différentielle et la substitution intégrale de la matrice $Y_b(x)$. La substitution U étant donnée, la matrice $Y_b(x)$ satisfait au système

$$(12) \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{YU}{x-a} .$$

et les développements (10) du § 7 fournissent les représentations:

$$(13) \qquad Y_b(x) = \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^U ; \quad V = e^{2\pi i U} \; *)$$

---

vergente il faut et il suffit que les nombres caractéristiques de le substitution X soient á l'interieur du cercle de la convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu$. Cette proposition suit immédiatement d'un théorème de M. Weyr. (op. cit. p. 207)

*) Dans le développement

$$\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^U = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu \frac{x-a}{b-a} U^\nu$$

on prend les déterminations des logarithmes, se réduisant à zéro pour $x = b$.

Supposons que le déterminant caractéristique de la substitution U n'admet que les diviseurs élémentaires simples: $\sigma - \sigma_1$, $\sigma - \sigma_2, \ldots, \ldots, \sigma - \sigma_n$ et désignons par $[\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n]$ la substitution, dont tous les élèments sont nuls, sauf les éléments diagonaux, qui sont respectivement $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$. En tenant compte de la reprèsentation canonique:

$$U = S[\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n] S^{-1},$$

et en resolvant le système (12) on reçoit les représentations canoniques:

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^U = S\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\sigma_1}, \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\sigma_2}, \ldots, \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\sigma_n}\right] S^{-1}$$

$$e^{2\pi i U} = S\left[e^{2\pi i\sigma_1}, e^{2\pi i\sigma_2}, \ldots, e^{2\pi i\sigma_n}\right] S^{-1}.$$

En procédant d'une fason analogue, on dèmontre, que si le dèterminant caractéristique de la substitution U admet les diviseurs élémentaires:

$$(\sigma-\sigma_1)^{\rho_1}, (\sigma-\sigma_2)^{\rho_2}, \ldots, (\sigma-\sigma_s)^{\rho_s}; \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n,$$

les diviseurs élémentaires de la substitution $e^{2\pi i U}$ sont:

$$(\omega - e^{2\pi i\sigma_1})^{\rho_1}; (\omega - e^{2\pi i\sigma_2})^{\rho_2}, \ldots, (\omega - e^{2\pi i\sigma_s})^{\rho_s}.$$

On reçoit ainsi les représentations analogues des substitutions $\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^U$ et $e^{2\pi i U}$ dans la cas général.

Inversement, si la substitution donnée V admet les diviseurs èlémentaires:

$$(\omega-\omega_1)^{\rho_1}; (\omega-\omega_2)^{\rho_2}, \ldots, (\omega-\omega_s)^{\rho_s}; \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n,$$

les diviseurs élémentaires de toutes les déterminations de la substitution $\frac{1}{2\pi i} \lg V$ sont de la forme:

$$\left(\sigma - \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_1 - r_1\right)^{\rho_1}; \left(\sigma - \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_2 - r_2\right)^{\rho_2}; \ldots \left(\sigma - \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_s - r_s\right)^{\rho_s},$$

où par $\lg\omega_1$, $\lg\omega_2, \ldots, \lg\omega_s$ sont désignées les valeurs principales des logarithmes et $r_1, r_2, \ldots r_s$ sont des entiers arbitraires. Si les diviseurs élementaires de la substitution V sont simples, de sorte que:

$$V = T[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega\ ] T^{-1},$$

les représentations canoniques des substitution

$$\frac{1}{2\pi i}\lg V \text{ et } \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V} \quad \text{sont:}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\lg V = T\left[\frac{1}{2\pi i}\lg \omega_1 + r_1\,;\frac{1}{2\pi i}\lg \omega_2 + r_2,\ldots;\frac{1}{2\pi i}\lg \omega_n + r_n\right]T^{-1}$$

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V} = T\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg \omega_1 + r_1}, \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg \omega_2 + r_2}, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg \omega_n + r_n}\right]T^{-1}.$$

Dans le cas général on reçoit les représentations analogues.

Ces considérations mettent complètement en évidence le caractère de la multiformité du logarithme d'une substitution et donnent en même temps la résolution des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann dans le cas élémentaire d'un seul point singulier à distance finie. La résolution du problème de Poincaré est présentée par les formules (13) et celle du problème de Riemann — par les formules:

$$(14) \qquad U = \frac{1}{2\pi i}\lg V\,;\;\; Y_b(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V}.$$

Les expressions (14) représentent évidemment toutes les matrices regulières, admettant la substitution intégrale V en point a et se reduisant á I pour $x = b$ et toutes les substitutions différentielles correspondant, pourvu que l'on prenne toutes les déterminations du logarithme.

III.

§ 9. En abordant la résolution algorithmique du problème de Poincaré, nous introduisons le système des fonctions:

$$(15) \quad L_b(a_{j_1}\; a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \,|\, x);\; j_1, j_2, \ldots j_\nu = 1, 2 \ldots m\,;\;\; \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

définies par les rélations de recurrence:

$$(16) \qquad L_b(a_{j_1}|x) = \int_b^x \frac{dx}{x-a_{j_1}}\,;$$

$$L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}\, a_{j_\nu}|x) = \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}\,|\,x)}{x-a_{j_\nu}}\,dx,$$

où b est un point fixe à distance finie, distinct des points $a_1, a_2, \ldots a_m$. Nous avons nommé ces fonctions „hyperlogarithmes" de la coufiguration $a_1, a_2 \ldots a_m$ *). Chaque hyperlogarithme (15) peut être traité comme une fonction uniforme sur la surface universelle de la superposition: $\mathfrak{S}\,(a_1, a_2, a_m, \infty)$ aux points de la ramification $a_1, a_2, \ldots, a_m\ \infty$ du type logarithmique, les feuillets étant réunis le long des coupures (a_1, ∞), $(a_2 \infty) \ldots (a_m \infty)$ [§ 1]. En fixant le point b sur l'un des feuillets et en designant par σ la lougueur d'un chemin (bx) sur la surface $\mathfrak{S}\,(a_1, a_2 \ldots a_m, \infty)$, liant les points b et x et par δ — la distance minimale de ce chemin aux points $a_1, a_2, \ldots a_m$, on a les évaluations évidentes:

$$(17) \qquad |\, L_b\,(a_{j_1}\, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} \,|\, x)\,| < \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu .$$

On déduit aisément des rélations de récurrence (16), qu'à l'intérieur du cercle dont le centre est en point b et dont le rayon est le minimum de la distance de point b aux points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, l'hyperlogarithme (15) est développable suivant les puissances de $x - b$:

$$(18) \quad L_b\,(a_{j_1}\, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \,|\, x) =$$

$$= (-1)^\nu \sum_{s=\nu}^{\infty} (x-b)^s \sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu = s} \frac{1}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)\ldots(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu)} \times$$

$$\times \frac{1}{(a_{j_1} - b)^{\mu_1}\,(a_{j_2} - b)^{\mu_2} \ldots (a_{j_\nu} - b)^{\mu_\nu}}$$

la dernière somme étant étendue sur toutes les valeurs entiéres positives de indices $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$, satisfaisant à l'égalité indiqué. Le prolongement analytique de la série (18) se fait d'une manière particulièrement simple: soit (bx) un chemin fini arbitraire sur le surface $\mathfrak{S}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne traversant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$. On marque sur ce chemin quelques points intermédiaires $c_1, c_2, \ldots c_s$, afin que toutes les valeurs: $L_b\,(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} \,|\, c_1); L_{c_1}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} \,|\, c_2)$, $\ldots L_{c_s}\,(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} \,|\, x)$ se calculent á l'aide de la série (18), et on reçoit:

$$(19) \quad L_b\,(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} \,|\, x) =$$

$$= \sum_{0 \leq \varkappa_1 \leq \cdots \leq \varkappa_s \leq \nu} L_b\,(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}} \,|\, c_1)\, L_{c_1}(a_{j_{\varkappa_1+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_2}} \,|\, c_2) \ldots$$

$$\ldots L_{c_s}\,(a_{j_{\varkappa_s+1}} \ldots a_{j_\nu} \,|\, x),$$

*) C. R. t. 185. (1927) p. 439. Les fonctions de cette forme ont été mentionnées par Poincaré (op. cit. p. 312).

où l'on pose, que le facteur $L_{c_\tau}(a_{j_{\varkappa_\tau+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_{\tau+1}}} \mid c_{s+1})$ est ègal à l'unité, si $\varkappa_\tau + 1 > \varkappa_{\tau+1}$ *). Cette formule vient immédiatement des rélations (16).

Désignons par b_j le point superposé b sur la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots \ldots a_m, \infty)$, qu'on obtient en suivant dans le sens positif le chemin (a_j), croisant une seule fois la coupure $(a_j \infty)$ et ne croisant aucune autre coupure. Les valeurs d'hyperlogarithmes en points b_j, représentées par les intégrales:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} & L_b(a_{j_1} \mid b_j) = P_b^{(j)}(a_{j_1}) = \int_{(a_j)} \frac{dx}{x-a_{j_1}} \\ & L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} \mid b_j) = P_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu}) = \\ & \qquad = \int_{(a_j)} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x-a_{j_\nu}}\, dx \end{aligned}\right.$$

seront nommées „paramètres de la configuration $a_1, a_2 \ldots, a_m$" **). Il suit de la formule (19), que les valeurs d'hyperlogarithmes sur le bord positif et négatif de toute coupure $(a_j \infty)$ sont liées par les rélations:

$$(21)\quad L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \mid \overset{-}{x}) = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} P_b^{(j)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\varkappa}) L_b(a_{j_{\varkappa+1}}, \ldots, a_{j_\nu} \mid \overset{+}{x}).$$

Ces rélations mettent complétement en évidence le caractère de la ramifications de la hyperlogarithmes en points $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

§ 10. En se servant des fonctions introduites dans le paragraphe précédent, on démontre le théorème fondamental sur la représentation d'une matrice régulière normale ***) par la série des compositions des substitutions différentielles.

Théorème I. La matrice régulière normale en point b et admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, est une fonction entière des substitutions différentielles, représentée par le développement:

$$(22)\quad Y_b(x) = \Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1, U_2, \ldots, U_m & \\ a_1, a_2, \ldots, a_m & \end{array} x\right) =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} L_b\left(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \mid x\right),$$

*) Une convention analogue concerne encore quelques formules suivantes.

**) Les rélations de recurrence, définissant les paramètres de la configuration independamment d'hyperlogarithmes, seront données dans notre mémoire suivant.

***) Nous dirons, q'une matrice régulière est normale en point b, si elle se réduit à la matrice identique en ce point.

dont les coefficients sont les hyperlogarithmes de la configuration $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Ce développement est uniformement convergent par rapport à x et représente la matrice regulière dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour ancun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Démonstration. En vertu des évaluations (17) et des considérations de la fin du § 5, on conclut, que la série (22) représente une fonction entière des substitutions $U_1, U_2, \ldots, U_m$ et que la convergence est uniforme par rapport à x dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}$ $(a_1 a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En différentiant cette série membre à membre, conformémant aux rélations (16), on resoit:

$$\frac{dY_b(x)}{dx} =$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} U_j L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}, a_j \mid x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \mid x) \frac{U_j}{x - a_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{Y_b(x) \cdot U_j}{x - a_j}.$$

On voit de là, que la série (22) représente une matrice regulière admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots a_m$. Cette matrice est évidemment normale en point b.

Notre théorème I n'est au fond autre chose, que la résolution du système d'equations différentielles (1) à l'aide de la méthode des approximations successives. Grâce au calcul des substitutions nous avons réussi quand même de mettre le résultat sous forme définitive d'une série des compositions, cette forme étant très instructive et trés favorable pour les recherches ultérieures, car elle donne la représentation algorithmique des fonctions en question dans tout la domaine de leur existence et met complétement en évidence la nature de leur dépendance de la variable x, des substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ et de la configuration des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Il suit du théorème démontré une évaluation simple d'une matrice regulière normale, admettant les substitutions différentielles données. En vertu des formules (22), (17), (10) et (6) on a l'inégalité:

$$\left| \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right) - \mathrm{I} \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} (|U_1| + |U_2| + \cdots + |U_m|)^\nu \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu =$$

$$= e^{\frac{\sigma}{\delta}(|U_1| + |U_2| + \ldots + |U_m|)} - \mathrm{I},$$

d'où il vient:

$$(23)\qquad \left|\Phi_b\begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix}\middle| x\right) - \mathrm{I}\right| \leqq \frac{1}{n}\left\| e^{\frac{\sigma \cdot m \cdot n \cdot \rho}{\delta}} - 1 \right\|,$$

si

$$|U_j| \leqq \|\rho\| \quad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Une matrice régulière arbitraire, admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, est évidemment liée avec la matrice normale considerée par la rélation:

$$(24)\quad \Phi\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) = C \cdot \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots; a_m \end{matrix}\middle| x\right), \text{ où}$$

$$C = \Phi\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| b\right).$$

Il en résulte, que le théorème I nous donne la représentation de toute matrice regulière, définie par un systéme des substitutions différentielles et par sa valeur initiale en point arbitraire, distinct des points singuliers.

Ce théorème fournit, outre cela, le moyen convenable aux calculs numériques. Pour calculer la valeur $\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right)$, on marque sur le chemin (bx) les points intérmédiaires $c_1, c_2, \ldots, c_s$, afin que les coefficients hyperlogarithmiques des développements des matrices

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| c_1\right), \; \Phi_{c_1}\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| c_2\right) \ldots \Phi_{c_s}\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, U_m \end{matrix}\middle| x\right)$$

se calculent à l'aide des séries de la forme (18), et on pose:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| c_1\right) \cdot \Phi_{c_1}\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| c_2\right) \ldots \Phi_{c_s}\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right).$$

La formule (22) devient particulièrement simple si la groupe derivé des substitutions différentielles est commutatif. Un calcul simple montre, qu'on a alors:

$$(25)\qquad \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}.$$

Il s'ensuit, que dans ce cas les intégrales du système régulier d'équations différentielles linéaires sont représentables sous forme finie.

§ 11. Il suit de la définition même [§ 1; (2)], que la substitution intégrale en point a_j d'une matrice régulière normale en point b est présentée par la valeur de cette matrice en point superposé b_j de la surface $\mathfrak{S}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ [§ 9]. Donc, en posant dans le développement (22) $x = b_j$ et en tenant compte des rélations (20) on arrive au théorème suivant, sur la représentation, d'une substitution intégrale par la série des compositions des substitutions différentielles:

Théorème II. La substitution intégrale en point a_j d'une matrice régulière, normale en point b et admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots a_m$, est une fonction entière des substitutions différentielles, représentée par le développement:

$$(26) \qquad V_j = \Omega_b^{(j)} \begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2 \ldots, m)} U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_\nu} P_b^{(j)} (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}),$$

dont les coefficients sont les paramètres de la configuration $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

En vertu de la rélation (24) la substitution intégrale en point a_j d'une matrice régulière arbitraire $\Phi \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right)$, définie par un système des substitutions différentielles et par sa valeur initiale en point b: $\Phi \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| b \right) = C$, est représentable sous forme:

$$(26a) \qquad \Omega^{(j)} \begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} = C \, \Omega_b^{(j)} \begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Il suit de la rélation (25), que si le groupe dérivé des substitutions différentielles est commutatif, les substitutions intégrales sont:

$$(27) \qquad \Omega_b^{(j)} \begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} = e^{2\pi i U_j}.$$

§ 12. Pour achever l'exposition de la résolution algorithmique du problème de Poincaré il nous reste à étudier la nature des paramètres de la configuration $P_b^{(j)} (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu})$, traités comme fonctions des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et du point de la normalisation b.

A cet effet nous démontrerons qu'il existe une fonction:

$$\Theta_h \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right) = Z_h (x)$$

des substitutions $U_1, U_2, \ldots, U_m$, holomorphe par rapport à U_h dans un voisinage de la substitution nulle et entière par rapport à $U_1, \ldots, U_{h-1}, U_{h+1}, \ldots, U_m$, représentant une matrice regulière $Z_h(x)$, qui admet les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et qui est développable dans un voisinage du point $x = a_h$ en série de la forme:

$$(28) \qquad Z_h(x) = (x - a_h)^{U_h} \overline{Z}_h(x),$$

où

$$\overline{Z}_h(x) = I + \sum_{s=1}^{\infty} A_h^{(s)} (x - a_h)^s,$$

les matrices $A_h^{(s)}$ étant indépendantes de x. Nous nommerons la matrice $Z_h(x)$ „matrice régulière métacanonique", car, si la substitution S_h réduit la substitution différentielle U_h à la forme canonique: $S_h U_h S_h^{-1}$, la matrice intégrale canonique du système (1) en point a_h s'écrira évidemment sous forme:

$$S_h \cdot Z_h(x).$$

En substituant l'expression (28) dans le système (1), on reçoit:

$$\frac{(x-a_h)^{U_h}}{x-a_h} \cdot U_h \left[I + \sum_{s=1}^{\infty} A_h^{(s)} (x-a_h)^s \right] + (x-a_h)^{U_h} \sum_{s=1}^{\infty} s A_h^{(s)} (x-a_h)^{s-1} =$$

$$= (x-a_h)^{U_h} \left[I + \sum_{s=1}^{\infty} A_h^{(s)} (x-a_h)^s \right] \left[\frac{U_h}{x-a_h} - \sum_{j \neq h} \sum_{s=1}^{\infty} U_j \frac{(x-a_h)^{s-1}}{(a_j-a_h)^s} \right]$$

et les matrices $A_h^{(s)}$ se trouvent définies par les rélatlons de recurrence:

$$(29) \quad U_h A_h^{(s)} + s A_h^{(s)} - A_h^{(s)} U_h =$$

$$= - \sum_{j \neq h} \left[\frac{A_h^{(s-1)}}{a_j - a_h} + \frac{A_h^{(s-2)}}{(a_j-a_h)^2} + \ldots + \frac{A_h^{(1)}}{(a_j-a_h)^{s-1}} + \frac{I}{(a_j-a_h)^s} \right] U_j.$$

Afin de resoudre ces équations par rapport aux matrices $A_h^{(s)}$ nous remarquons, que l'équation de la forme:

$$(30) \qquad UA + sA - AU = K$$

peut être traité, comme un système de n^2 équations, linéaires par rapport aux élements $\{A\}_{kl}$ de la matrice A, le déterminant de ce système étant distinct de zéro, pourvu que les différences des nombres caractéristiques distincts de la substitution U ne soient pas entières, ce qui a toujours lieu, quand la substitution U se trouve dans un voisinage convenable de la substitution nulle. A cette dernière condition, l'équation (30) admet la solution unique, représentable par la série:

$$(31) \qquad A = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{\infty} U^{\alpha}\ KU^{\beta} \frac{(-1)^{\alpha}}{s^{\alpha+\beta+1}} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\ \beta!}.$$

En effet, il est aisé de voir, que cete série identifie formellement l'équation considerée. En supposant, d'ailleurs, que

$$|\,U\,| < \|\,u\,\| < \left\|\frac{1}{2n}\right\|; \quad |\,K\,| < \|\,k\,\|,$$

on a:

$$(32) \qquad |\,A\,| < \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{\infty} |\,U\,|^{\alpha}\,|\,K\,| \cdot |\,U\,|^{\beta} \frac{(\alpha+\beta)!}{s\,.\,\alpha!\ \beta!} < \left\|\frac{k}{s\,(1-2\,nu)}\right\|.$$

Donc, si la substitution U se trouve dans le voisinage indiqué de la substitution nulle, le série (31) est absolument convergente et représente la solution unique de l'équation (30).

Introduisons le système des fonctions:

$$\Delta_h^{(s)}\ (a_{j_1},\ a_{j_2},\ldots,\ a_{j_\nu});\ j_1,\ j_2,\ldots,\ j_\nu = 1,\ 2,\ldots,\ m;\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

définies par les rélations:

$$\Delta_h^{(s)}\ (a_h^{\lambda_0}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \lambda_0 = 0 \\ 0 \text{ pour } \lambda_0 > 0 \end{cases};$$

$$\Delta_h^{(s)}\ (a_h^{\lambda_0}\ a_{h_1}\ a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma}\ a_h^{\lambda_\sigma}) =$$

$$= \sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\sigma=s} \frac{\tau\ (\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1 \ldots,\ \mu_\sigma\ \lambda_\sigma)}{(a_{h_1}-a_h)^{\mu_1}\,(a_{h_2}-a_h)^{\mu_2} \ldots (a_{h_\sigma}-a_h)^{\mu_\sigma}}$$

pour $s \geqq \sigma$, et $\Delta_h^{(s)}\ (a_h^{\lambda_0}\ a_{h_1}\ a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma}\ a_h^{\lambda_\sigma}) = 0$ pour $s < \sigma$, où les indices $h_1,\ h_2,\ldots,\ h_\sigma$ sont distincts de l'indice h, les indices $\lambda_0,\ \lambda_1,\ldots,\ \lambda_\sigma$ — sont des nombres entiers non négatifs, la ligne:

$$\underbrace{a_h,\ a_h,\ldots,\ a_h}_{\lambda_0 \text{ fois}}\quad a_{h_1}\quad \underbrace{a_h,\ a_h,\ldots,\ a_h}_{\lambda_1 \text{ fois}}\quad a_{h_2}\ \ldots\ldots$$

est remplacée, pour abréger, par le symbole: $a_h^{\lambda_0}\, a_{h_1}\, a_h^{\lambda_1}\ a_{h_2} \ldots$ — la somme est étendue sur toutes les valeurs entières positives des indices $\mu_1,\ \mu_2,\ldots,\ \mu_\sigma$, satisfaisant à l'égalité indiquée, et les constantes numériques: $\tau\ (\lambda_0,\ \mu_1,\ \lambda_1,\ldots,\ \mu_\sigma,\ \lambda_\sigma)$ sont définies par la rélations de recurrence:

$$(33) \qquad \tau\ (\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1) = \frac{(-1)^{\lambda_0+1}(\lambda_0+\lambda_1)!}{\lambda_0!\ \lambda_1!} \frac{1}{\mu_1^{\lambda_0+\lambda_1+1}},$$

$$\tau\ (\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1 \ldots \mu_\sigma\ \lambda_\sigma) =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\lambda_0} \frac{(-1)^{\varkappa+1}(\varkappa+\lambda_\sigma)!}{\varkappa!\ \lambda_\sigma!} \frac{\tau\ (\lambda_0-\varkappa_1\ \mu_1\ \lambda_1,\ldots,\ \mu_{\sigma-1},\lambda_{\sigma-1})}{(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\sigma)^{\varkappa+\lambda_\sigma+1}}.$$

En se servant de la formule (31) on tire consécutivement des rélations (29) les expressions des matrices $A_h^{(s)}$ sous forme des séries des compositions:

$$A_h^{(s)} = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda_0,\ldots,\lambda_\sigma=0}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots h_\sigma \neq h} U_h^{\lambda_0} \; U_{h_1} U_h^{\lambda_1} \ldots U_{h_\sigma} U_h^{\lambda_\sigma} \times$$
$$\times \Delta_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} \; a_{h_1} \; a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma} \; a_h^{\lambda_\sigma}),$$

où la deuxième somme est étendue sur toutes les valeurs entières non négatives des indices $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$, et la troisième sur toutes les combinaisons des valeurs $1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, m$ des indices $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$. En posant:

$$| U_h | < \| u \| < \left\| \frac{1}{2n} \right\|; \quad | U_j | < \| u' \|; \quad | a_j - a_h | > \delta$$
$$(j = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, m); \quad \frac{n\,(m-1)\,u'}{1-2nu} = t$$

et en tenant compte de la formule (32), on déduit les inégalités:

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda_0,\ldots,\lambda_\sigma=0}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots,h_\sigma \neq h} | U_h |^{\lambda_0} \cdot | U_{h_1} | \cdot | U_h |^{\lambda_1} \cdots | U_{h_\sigma} | \cdot | U_h |^{\lambda_\sigma} \times$$
$$\times | \Delta_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} \, a_{h_1} \, a_h^{\lambda_1} \cdots a_{h_\sigma} \, a_h^{\lambda_\sigma}) | < \left\| \frac{(t+1)^{s-1}\, t}{s \delta^s} \right\|.$$

On en conclut, que la série:

$$1 + \sum_{s=1}^{\infty} | x - a_h |^s \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda_0,\ldots\lambda_\sigma=0}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots h_\sigma \neq h} | U_h |^{\lambda_0} | U_{h_1} | \cdot | U_h |^{\lambda_1} \cdots | U_{h_\sigma} | \times$$
$$\times | U_h |^{\lambda_\sigma} \cdot | \Delta_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} \, a_{h_1} \, a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma} \, a_h^{\lambda_\sigma}) |$$

et, par suite, les séries:

$$\overline{Z}_k (x) =$$
$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (x - a_h)^s \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda_0,\ldots,\lambda_\sigma=0}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots h_\sigma \neq h} U_h^{\lambda_0} \, U_{h_1} \, U_h^{\lambda_1} \cdots U_{h_\sigma} \, U_h^{\lambda_\sigma} \times$$
$$\times \Delta_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} \, a_{h_1} \, a_h^{\lambda_1} \cdots a_{h_\sigma} \, a_h^{\lambda_\sigma}).$$

sont convergentes, pourvu que l'on ait:

$$(34) \qquad | U_h | < \| u \| < \left\| \frac{1}{2n} \right\|; \quad | x - a_h | < \frac{\delta}{1+t}\,.$$

Ces conditions étant supposées remplies, le changement d'ordre des sommations est permis et on a:

$$(35)\quad \overline{Z}_h(x) = \overline{\Theta}_h \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \dots, U_m, \\ a_1, a_2, \dots, a_n, \end{matrix} \middle| \, x \right) =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_\nu}^{(1, 2, \dots, m)} U_{j_1} U_{j_2} \dots U_{j_\nu}, \overline{N}_h (a_{j_1} a_{j_2} \dots, a_{j_\nu} \mid x),$$

où

$$(36)\quad \overline{N}_h (a_{j_1} a_{j_2}, \dots a_{j_\nu} \mid x) = \sum_{s=0}^{\infty} (x - a_h)^s \, \Delta_h^{(s)} (a_{j_1} a_{j_2} \dots, a_{j_\nu}).$$

En différentiant les séries (36) on établit, que les fonctions $\overline{N}_h (a_{j_1} a_{j_2} \dots, a_{j_\nu} \mid x)$ satisfont aux relations de récurrence:

$$(37)\quad \overline{N}_h (a_{j_1} \mid x) = \int_{a_h}^{x} \frac{dx}{x - a_{j_1}}, \; si \; j_1 \neq h; \; \overline{N}_h (a_h \mid x) = 0$$

$$\overline{N}_h (a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} \mid x) =$$

$$= \int_{a_h}^{x} \frac{\overline{N}_h (a_{j_1}, \dots, a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} dx, \; si \; j_1 \neq h,$$

et

$$\overline{N}_h (a_h a_{j_2} \dots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} \mid x) =$$

$$= \int_{a_h}^{x} \left[\frac{\overline{N}_h (a_h \; a_{j_2} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} - \frac{\overline{N}_h (a_{j_2} \dots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} \mid x)}{x - a_h} \right] dx,$$

si $j_1 = h$. Les coefficients du développement (35) sont définis par les relations de récurrence (37) dans tout le domaine de leur existence sur la surface $\mathfrak{S}$ $(a_1, a_2, \dots, a_m \infty)$. Démontrons maintenant, que la matrice $\overline{Z}_h (x)$ est représentable par le développement (36) aussi dans tout le domaine de son existence par rapport à x et que la matrice métacanonique:

$$\Theta_h \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \dots, U_m \\ a_1, a_2, \dots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) = (x - a_h)^{U_h} \, \overline{\Theta}_h \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \dots, U_m \\ a_1, a_2, \dots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right)$$

peut être traitée comme une fonction des substitutions différentielles, holomorphe par rapport à U_h dans un voisinage de la substitution nulle et entière par rapport à $U_1, \dots U_{h-1}, U_{h+1}, \dots U_m$, dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}$ (a_1, a_2, a_m, ∞), ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En effet, si les points b et x se trouvent dans un voisinage convenable du point a_h, en vertu de la formule (24), on a les relations:

$$(x-a_h)^{U_h}\,\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)=$$

$$=(b-a_h)^{U_h}\,\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)\cdot\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)$$

et

$$\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)=$$

$$=\left(\frac{b-a_h}{x-a_h}\right)^{U_h}\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)\cdot\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, x\right). \tag{37a}$$

Il s'ensuit, que les fonctions $\overline{N}_h\,(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \,|\, x)$ sont des polynomes des fonctions $\overline{N}_h\,(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \,|\, b)$ et $L_b\,(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \,|\, x)$ et que la série (35), où les coefficients sont définis par les formules (37) est uniformement convergente par rapport à x dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des point $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Outre cela, en vertu de la convergence uniforme de cette série dans un voisinage du point a_h, qui entre dans la série de Taylor pour la matrice $\overline{Z}_h\,(x)$, la série (35) reste évidemment uniformement convergente dans chaque domaine finie de la surface $\mathfrak{S}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m\, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, \ldots a_{h-1}, a_{h+1}, \ldots a_m$ et appartenant aux feuillets, qui ont commun le point a_h, mentionné ci-dessus.

En considérant les relations de récurrence (29), comme les systèmes de n^2 équations, linéaires par rapport aux éléments $\{A_h^{(s)}\}_{kl}$ des matrices $A_h^{(s)}$ et en se servant de la formule (37a), on peut démontrer, que la matrice métacanonique $Z_h\,(x)$ existe encore, si U_h est une substitutions arbitraire, dont toutes les différences des nombres caractéristiques distincts ne sont pas des nombres entiers. Mais dans le cas, où la substitution U_h se trouve hors du voisinage de la substitutions nulle, la matrice $\overline{Z}_h\,(x)$ n'est pas développable en série des compositions de la forme (35). Pour considérer cette matrice comme une fonction des substitutions différentielles dans tout le domaine de son existence par rapport à ces substitutions, il faut introduire la généralisation de la notion d'une fonction analytique des substitutions, mentionnée dans la remarque au § 4. On peut démontrer ainsi, que la matrice $\overline{Z}_h\,(x)$ est une fonction méromorphe par rapport à la substitution U_h, les singularités de cette fonction correspondant aux valeurs de la substitution U_h, dont quelques différences des nombres caractéristiques distincts sont entières. Il en résulte la différence intrinsèque entre les matrices régulières normales et les matrices régulières métacanoniques, traitées comme fonctions des substitutions différentielles: les premières sont entières par rapport à toutes les substitutions différentielles, tandis que les secondes ne sont que méromorphes par rapport à l'une de ces substitutions.

§ 13. La matrice métacanonique inverse est de la forme:

$$Z_h(x)^{-1} = \bar{Z}_h(x)^{-1}(x-a_h)^{-U_h},$$

où

$$\bar{Z}_h(x)^{-1} = \mathrm{I} + \sum_{s=1}^{\infty} \overset{*}{A}{}_h^{(s)} (x-a_h)^s.$$

Cette matrice satisfait évidemment au système:

$$\frac{d\overset{*}{Y}}{dx} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x-a_j} \overset{*}{Y},$$

adjoint par rapport au système (1), et les matrices $\overset{*}{A}{}_h^{(s)}$, indépendantes de x, remplient les relations de récurrence:

$$U_h \overset{*}{A}{}_h^{(s)} + s\overset{*}{A}{}_h^{(s)} - \overset{*}{A}{}_h^{(s)} U_h =$$

$$= \sum_{j \neq h} U_j \left[\frac{\overset{*}{A}{}_h^{(s-1)}}{a_j-a_h} + \frac{\overset{*}{A}{}_h^{(s-2)}}{(a_j-a_h)^2} + \dots + \frac{\overset{*}{A}{}_h^{(1)}}{(a_j-a_h)^{s-1}} + \frac{\mathrm{I}}{(a_j-a_h)^s} \right].$$

Introduisons le système des fonctions:

$$\overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)}(a_{j_1}\ a_{j_2}\ \dots\ a_{j_\nu});\ j_1, j_2, \dots, j_\nu = 1, 2, \dots, m;\ \nu = 1, 2, 3, \dots$$

définies par les relations:

$$\overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)}(a_h^{\lambda_0}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \lambda_0 = 0; \\ 0 \text{ pour } \lambda_0 > 0; \end{cases}$$

$$\overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)}(a_h^{\lambda_0}\ a_{h_1}\ a_h^{\lambda_1}\ \dots\ a_{h_\sigma}\ a_h^{\lambda_\sigma}) =$$

$$= \sum_{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\sigma=s} \frac{\overset{*}{\tau}(\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1\ \dots,\ \mu_\sigma \lambda_\sigma)}{(a_{h_1}-a_h)^{\mu_1}(a_{h_2}-a_h)^{\mu_2}\dots(a_{h_\sigma}-a_h)^{\mu_\sigma}},$$

pour $s \geqq \sigma$, et $\overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} \; a_{h_1}, \; a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma} \, a_h^{\lambda_\sigma}) = 0$, pour $s < \sigma$, où les constantes numériques $\overset{*}{\tau} (\lambda_0, \mu_1, \lambda_1, \ldots, \mu_\sigma \lambda_\sigma)$ sont définies par les rélations de récurrence:

$$(38) \qquad \overset{*}{\tau} (\lambda_0 \mu_1 \lambda_1) = \frac{(-1)^{\lambda_0} \; (\lambda_0+\lambda_1)!}{\lambda_0! \; \lambda_1!} \; \frac{1}{\mu_1^{\lambda_0+\lambda_1+1}} \; ;$$

$$\overset{*}{\tau} (\lambda_0 \; \mu_1 \; \lambda_1 \ldots, \mu_\sigma \lambda_\sigma) =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\lambda_\sigma} \frac{(-1)^{\lambda_0} \; (\lambda_0+\varkappa)!}{\lambda_0! \; \varkappa!} \; \frac{\overset{*}{\tau} \; (\lambda_1 \; \mu_2 \, \lambda_2 \ldots \mu_\sigma \lambda_\sigma - \varkappa)}{(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\sigma)^{\lambda_0+\varkappa+1}} \, .$$

En se servant des mêmes raisonnements que dans le paragraphe précédent, on reçoit le développement:

$$(39) \quad \overline{Z}_h \; (x)^{-1} = \overline{\Theta}_h \begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, \; a_2, \ldots, \; a_m \end{pmatrix} \Big| \, x \Big)^{-1} =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,\, m)} U_{j_1} \; U_{j_2} \ldots \; U_{j_\nu} \; \overset{*}{\overline{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu} \,|\, x)$$

où

$$(40) \qquad \overset{*}{\overline{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu} \,|\, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \; (x - a_h)^s \; \overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)} \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu}),$$

ce développement étant valable aux conditions (34).

On établit ensuite, que les fonctions $\overset{*}{\overline{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu} \,|\, x)$ peuvent ètre définies par les relations de récurrence:

$$(41) \qquad \overset{*}{\overline{N}}_h \; (a_{j_1} \mid x) = -\int_{a_h}^{x} \frac{dx}{x - a_{j_1}} \, ; \quad \overset{*}{\overline{N}}_h \; (a_h \mid x) = 0$$

$$\overset{*}{\overline{N}}_h \, (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = -\int_{a_h}^{x} \frac{\overset{*}{\overline{N}}_h \, (a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu} \,|\, x)}{x - a_{j_1}} \, dx, \text{ si } j_\nu \neq h,$$

et

$$\overset{*}{\overline{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_{\nu-1}} \, a_h \mid x) =$$

$$= \int_{a_h}^{x} \left[-\frac{\overset{*}{\overline{N}}_h \, (a_{j_2} \ldots \; a_{j_{\nu-1}} \, a_h \mid x)}{x - a_{j_1}} + \frac{\overset{*}{\overline{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_h} \right] dx,$$

si $j_\nu = h$, et que la série (39) représente ainsi la matrice $\overline{Z}_h \; (x)$ dans tout le domaine de son existence par rapport à x.

Donc, la matrice métacanonique inverse:

$$\Theta_h\begin{pmatrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{pmatrix}\!\!\left|\ x\right)^{-1} = \overline{\Theta}_h\begin{pmatrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{pmatrix}\!\!\left|\ x\right)^{-1}(x-a_h)^{-U_h}$$

est aussi une fonction holomorphe dans un voisinage de la substitution nulle par rapport à U_h et entière par rapport à $U_1,\ldots, U_{h-1}, U_{h+1},\ldots U_m$ dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}$ $(a_1, a_2,\ldots, a_m, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, a_2,\ldots a_m$. En général, la matrice métacanonique inverse considérée est une fonction méromorphe par rapport à la substitution U_h, possédant les mêmes siugularités que la matrice correspondante directe.

La dependence de la matrice $\overline{\Theta}\left(\begin{matrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{matrix}\ \middle|\ x\right)^{-1}$ de la variable x est analogue à celle de la matrice $\overline{\Theta}\left(\begin{matrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{matrix}\ \middle|\ x\right)$.

§ 14. Supposons maintenant, que la substitution U_h se trouve dans un voisinage convenable de la substitution nulle. En vertu de la relation (24) on a alors la représentation:

$$(42)\qquad \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{matrix}\ \middle|\ x\right)=$$

$$=\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{matrix}\ \middle|\ b\right)^{-1}\left(\frac{x-a_h}{b-a_h}\right)^{U_h}\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{matrix}\ \middle|\ x\right).$$

En faisant $x=b_h$, on en conclut, que la substitution intégrale V_h en point a_h de la matrice régulière normale (42) peut être mise sous forme:

$$(43)\quad \Omega_b^{(h)}\begin{pmatrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{pmatrix}=$$

$$=\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{matrix}\ \middle|\ b\right)^{-1} e^{2\pi i U_h}\,\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2,\ldots, U_m\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\end{matrix}\ \middle|\ b\right) *).$$

*) Il suit de cette représentation, que les substitution V_h et $e^{2\pi i U_h}$ sont semblables, pourvu que U_h soit dans un voisinage de la substitution nulle. En tenant compte des considérations de la fin du § 12, on conclut, que ces substitutions restent encore semblables, si U_h est une substitution arbitraire, dont toutes les différences des nombres caractéristiques distincts ne sont pas des nombres entiers.

En substituant dans cette relation les développements (39) et (35) et en comparant le résultat au developpement (26) du théorème II, on reçoit les représentations des paramètres de la configuration:

$$(44)\quad P_b^{(h)}(\overset{\lambda_0}{a_h}\ a_{h_1}\ \overset{\lambda_1}{a_h}\ \ldots\ a_{h_\sigma}\overset{\lambda_\sigma}{a_h}) =$$

$$=\sum_{\varkappa=0}^{\sigma}\ \sum_{\alpha_\varkappa+\beta_\varkappa+\gamma_\varkappa=\lambda_\varkappa} \overset{*}{\overline{N}}_h(\overset{\lambda_0}{a_h}\ a_{h_1}\ \overset{\lambda_1}{a_h}\ \ldots\ a_{h_\varkappa}\overset{\alpha_\varkappa}{a_h}\mid b)\frac{(2\pi i)^{\beta_\varkappa}}{\beta_\varkappa!}\times$$

$$\times\overline{N}_h(\overset{\gamma_\varkappa}{a_h}\ a_{h_{\varkappa+1}}\ \overset{\lambda_{\varkappa+1}}{a_h}\ \ldots\ a_{h_\sigma}\ \overset{\lambda}{a_{h_\sigma}}\mid b),$$

la dernière somme étant étendue sur toutes les valeurs entières non négatives des indices $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa, \gamma_\varkappa$, satisfaisant à l'égalité indiquée. En remplaceant dans la formule (44) les fonctions $\overset{*}{\overline{N}}_h$ et $\overline{N}_h$ par leurs développements (40) et (36), on arrive à la conclusion suivante: chaque paramètre de la configuration $P_b^{(j)}(a_{j_1}\ a_{j_2}\ \ldots\ a_{j_\nu})$ est une fonction holomorphe de b dans un voisinage du point a_j, représentée par le développement:

$$(45)\qquad P_b^{(j)}(a_{j_1}\ a_{j_2}\ldots\ a_{j_\nu}) = \sum_{s=0}^{\infty}(b-a_j)^s\ p_j^{(s)}(a_{j_1}\ a_{j_2}\ldots\ a_{j_\nu}),$$

les coefficients $p_j^{(s)}(a_{j_1}\ a_{j_2}\ \ldots\ a_{j_\nu})$ étant des fonctions rationnelles de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, définies par les relations

$$p_h^{(0)}(\overset{\lambda_0}{a_h}) = \frac{(2\pi i)^{\lambda_0}}{\lambda_0!};\ p_h^{(s)}(\overset{\lambda_0}{a_h}) = 0 \text{ pour } s>0;$$

$$p_h^{(s)}(\overset{\lambda_0}{a_h}\ a_{h_1}\ \overset{\lambda_1}{a_h}\ \cdots\ a_{h_\sigma}\ \overset{\lambda_\sigma}{a_h}) = 0, \text{ pour } s<\sigma, \text{ et}$$

$$(46)\quad p_h^{(s)}(\overset{\lambda_0}{a_h}\ a_{h_1}\overset{\lambda_1}{a_h}\ \ldots\ a_{h_\sigma}\overset{\lambda_\sigma}{a_h}) =$$

$$=\sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\sigma=s}\frac{\theta(\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1\ldots\ \mu_\sigma\ \lambda_\sigma)}{(a_{h_1}-a_h)^{\mu_1}(a_{h_2}-a_h)^{\mu_2}\ldots(a_{h_\sigma}-a_h)^{\mu_\sigma}},$$

pour $s\geqq\sigma$, où $\theta(\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1\ \ldots\ \mu_\sigma\ \lambda_\sigma)$ sont des constantes numériques:

$$(47)\quad \theta(\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1\ \ldots\ \mu_\sigma\ \lambda_\sigma) =$$

$$=\sum_{\varkappa=0}^{\sigma}\ \sum_{\alpha_\varkappa+\beta_\varkappa+\gamma_\varkappa=\lambda_\varkappa}\overset{*}{\tau}(\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1\ldots\mu_\varkappa,\alpha_\varkappa)\frac{(2\pi i)^{\beta_\varkappa}}{\beta_\varkappa!}\ \tau(\gamma_\varkappa\mu_{\varkappa+1}\ \lambda_{\varkappa+1}\ldots\mu_\sigma\ \lambda_\sigma).\ ^{*)}$$

---

*) On pose: $\overset{*}{\tau}(\lambda_0) = \tau(\lambda_0) = 0$ pour $\lambda_0>0$ et $\overset{*}{\tau}(0) = \tau(0) = 1$.

Le système des coupures $(a_1\infty)$, $(a_2\infty)$, ..., $(a_m\infty)$ étant fixé, désignons par K_h le cercle, dont le centre est en point a_h et dont le rayon est le minimum de la distance du point a_h aux coupures $(a_1\infty)$, ..., $(a_{h-1}\infty)$, $(a_{h+1}\infty)$, ..., $(a_m\infty)$. La formule (45) nous fournit évidemment le moyen du calcul numérique des paramètres de la configuration dans le cas, où le point de la normalisation b se trouve à l'intérieur du cercle K_j. Dans, le cas contraire, le calcul se fait à l'aide d'hyperlogarithmes: on fixe un point c à l'intérieurs du cercle K_j et on pose:

$$P_b^{(j)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}) = \sum_{0\leqslant\varkappa\leqslant\lambda\leqslant\nu} L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}\mid c)\, P_c^{(j)}(a_{j_{\varkappa+1}}\ldots a_{j_\nu})\, L_c(a_{j_{\lambda+1}}\ldots a_{j_\nu}\mid b),$$

où le chemin (bc), definissant les valeurs d'hiperlogarithmes, appartient entièrement au même feuillet de la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, où se trouve le point b.

Les résultats, que nous venons à établir, donnent la résolution algorithmique complète du problème de Poincaré soit au point de vue de la théorie des fonctions, soit au point de vue des calculs numériques.

Алгоритмическое решение задач Poincaré и Riemann'a.

(*Статья первая:* **Задача Poincaré о построении группы монодромии данной системы линейных дифференциальных уравнений с регулярными интегралами**).

И. А. Лаппо-Данилевский.

Таблицу аналитических функций $Y(x)$, выполняющую систему дифференциальных уравнений $\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j}{x-a}$ и претерпевающую подстановки V_j, при обходе независимой переменной точек a_j, автор называет „регулярной матрицей, имеющей дифференциальные подстановки U_j и интегральные подстановки V_j". Основание теории регулярных матриц составляют задачи Poincaré и Riemann'a: первая заключается в построении $Y(x)$ и V_j по данным U_j и a_j, вторая — в построении $Y(x)$ и U_j по данным V_j и a_j. Аналитический аппарат алгоритмического решения указанных задач доставляется теорией аналитических функций от линейных подстановок. Дополняя обычные определения рациональных операций в области линейных подстановок определением предельного перехода, автор вводит понятие „голоморфной функции от подстановок", представляемой рядом композицией, и распространяет на ряды композиций некоторые положения обыкновенной теории степенных рядов. Обращаясь к решению задачи Poincaré, автор доказывает, что регулярная матрица, заданная независящими от дифференциальных подстановок начальными условиями, и соответствующие интегральные подстановки являются целыми функциями от дифференциальных подстановок, представимыми рядами композиций:

$$Y_b(x) = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} L_b (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$$

$$V_j = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_{j} \ldots U_{j_\nu} P_b^{(j)} (a_{j} a_{j} \ldots a_{j_\nu}),$$

где $Y_b(b) = \mathrm{I}$, $L_b (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ — суть „гиперлогарифмы конфигурации $a_1, a_2, \ldots, a_m$", определяемые последовательными интегрированиями в пределах от b до x, и $P_b^{(j)} (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})$ — „параметры конфигурации", определяемые контурными интегралами, взятыми по петлям, начинающимся и кончающимся в точке b и заключающим внутри себя соответствующие точки a_j. Далее, автор дает разложения гиперлогарифмов и параметров конфигурации по степеням соответственно $x - b$ и $b - a_j$ и устанавливает простые формулы для построения аналитических продолжений этих разложений. Таким образом, выясняется характер зависимости регулярной матрицы и интегральных подстановок не только от текущей переменной и дифференциальных подстановок, но и от конфигурации особых точек и точки нормализации, и приведенные выше формулы делаются вполне пригодными для вычислений. Кроме „нормальных" регулярных матриц $Y_b(x)$, автор рассматривает „метаканонические" регулярные матрицы

$$Z_j(x) = (x - a_j)^{U_j} \overline{Z}_j(x),$$

где $\overline{Z}_j(x)$ голоморфна относительно x в окрестности точки $x = a_j$ и $\overline{Z}_j(a_j) = \mathrm{I}$. Метаканонические регулярные матрицы $Z_j(x)$ оказываются целыми функциями относительно дифференциальных подстановок $U_1, \ldots, U_{j-1}, U_{j+1}, \ldots, U_m$ и мероморфными относительно U_j.

Résolution algorithmique des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann.

(*Mémoire deuxième:* **Problème de Riemann, concernant la construction d'un système régulier d'équations différentielles linéaires, admettant un groupe de monodromie donné).**

Par M. *J. A. Lappo-Danilevski* (Léningrad).

IV. Fonctions fondamentales des substitutions différentielles.

§ 15 *). En vertu du théorème I [§ 10], la résolution algorithmique du problème de Riemann [§ 1] se réduit à la construction des substitutions différentielles U_j d'une matrice régulière $Y(x)$, admettant les substitutions intégrales données V_j en points réspectivement a_j $(j = 1, 2, \ldots m)$. Conformement au théorème II [§ 11] le problème sur la construction des substitutions U_j est équivalent au problème de l'inversion du systéme de m fonctions entières:

$$(49) \qquad V_j = I + 2\pi i\, U_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} P_b^{(j)} (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}).$$

Le déterminant Δ du lemme II [§ 6] étant égal à $(2\pi i)^m$, on fait l'inversion des fonctions (49) dans un voisinage des substitutions $V_1 = V_2 = \ldots = V_m = I$. D'aprés le lemme indiquéon obtient immédiatement les développements des substitutions U_j suivant les compositions des substitutions $V_1 - I$, $V_2 - I, \ldots V_m - I$, les coefficients de ces développements étant des polynomes des paramètres de la configuration: $P_b^{(j)} (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})$.

La methode mentionnée ci-dessus **) est caractérisée par deux restrinctions essentielles:

1°. Les développements obtenus représentent le système des substitutions différentielles d'une matrice régulière normale, admettant les

---

*) Pour abrégér les citations nous continuons la numération des paragraphes et des formules bu mémoire précédent (pp. 94—120).

**) Cette methode est éxposée en detail dans notre mémoire: „Théorie algorithmique des corps de Riemann" (Récueil mathématique de Moscou, t. 34, fascic. 2, pp. 114—148; 1927).

substitutions intégrales V_j en points a_j, tandis qu'il existe une infinité des matrices regulières normales, jouissant de la même propriété.

2°. Ces développements ne sont valables que pour les systèmes des substitutions intégrales V_j, situées dans un certain voisinage du système des substitutions identiques.

La résolution algorithmique générale du problème régulier de Riemann exige une étude plus approfondie des relations, liant les matrices intégrales et les groupes de monodromie des systhèmes réguliers d'équations différentielles linéaires aux coefficients de ces systèmes. Une telle étude sera esquissée dans les chapitres suivantes.

§ 16. Nous avons à étudier quelques fonctions des substitutions différentielles qui jouent le rôle important dans la théorie des matrices régulières. En abordant cette étude nous devons compléter la théorie des matrices métacanoniques [§§ 12—13] par la considération d'une matrice métacanonique en point à l'infini.

A l'aide des methodes parfaitement analogues à celles, dont nous nous avons servi dans les paragraphes cités, on démontre sans peine que si les différences des nombres caractéristiques distincts de la substitution

$$U_\infty = -(U_1 + U_2 + \ldots + U_m) \tag{50}$$

ne sont pas entières, il existe une matrice régulière admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots a_m$ et représentable sous forme:

$$\Theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{U_\infty} \overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right),$$

où la matrice

$$\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right)$$

reste holomorphe par rapport à x dans un voisinage du point $x = \infty$ et se réduit à I en ce point. Les matrices

$$\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) \text{ et } \overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right)^{-1}$$

sont les fonctions méromorphes des substitutions différentielles dont les singularités sont produites par les valeurs de la substitution U_∞ aux différences entières des nombres caractéristiques distincts. Les substitutions différentielles étant données dans un voisinage des substitutions nulles, les matrices considerées sont représentables sous forme des séries des compositions:

$$\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} \overline{N}_\infty (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$$

$$\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right)^{-1} = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} \overset{*}{\overline{N}}_\infty (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x),$$

où les coefficients se trouvent déterminés par les relations de récurrence:

$$\overline{N}_\infty(a_{j_1}\,|\,x)=\int\limits_\infty^x\left(\frac{1}{x-a_{j_1}}-\frac{1}{x}\right)dx;\ \overset{*}{\overline{N}}_\infty(a_{j_1}\,|\,x)=\int\limits_\infty^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-a_{j_1}}\right)dx$$

$$\overline{N}_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\mid x)=\int\limits_\infty^x\left[\frac{\overline{N}_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}\mid x)}{x-a_{j_\nu}}-\frac{\overline{N}_\infty(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\mid x)}{x}\right]dx$$

$$\overset{*}{\overline{N}}_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\mid x)=\int\limits_\infty^x\left[\frac{\overset{*}{\overline{N}}_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}\mid x)}{x}-\frac{\overset{*}{\overline{N}}_\infty(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\mid x)}{x-a_{j_1}}\right]dx.$$

La substitution U_∞ définie par la relation (50) sera nommée „substitution différentielle en point ∞“ d'une matrice régulière, admettant les substitutions différentielles $U_1,\ldots U_m$ en points $a_1,\ldots a_m$, et la matrice $\Theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$ — „matrice métacanoniqne en point ∞“ aux substitutions différentielles indiquées. En se servant de la formule (24) [§ 10], on reçoit la représentation d'une matrice régulière normale.

(51) $$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=$$
$$=\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)^{U_\infty}\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

qui est complétement analogue aux représentations (42) du § 14. Si la variable x décrit un circuit, entournant le point ∞ et croisant les coupures $(a_1\infty),\ldots,(a_m\infty)$ [§ 1], les points singuliers étant numerotés dans un ordre convenable, la matrice regulière (51) subit „une substitution intégrale en point ∞“:

(52) $$V_\infty=(V_1,\ V_2,\ldots,\ V_m)^{-1},$$

où $V_1,\ V_2,\ldots,\ V_m$ sont les substitutions intégrales de cette matrice en points $a_1,\ a_2,\ldots a_m$. En vertu de la relation (52), la substitution intégrale en point ∞ est une fonction entière des substitutions différentielles, qui peut être représentée d'après l'égalité (51) sous forme:

$$V_\infty=\Omega_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\right)=\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)^{-1}e^{2\pi iU_\infty}\,\overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)$$

§ 17. Soit $Y(x)$ une matrice régulière aux substitutions differentielles $U_1,\ U_2,\ldots\ U_m,\ U_\infty$ en points réspectivement $a_1,\ a_2,\ldots\ a_m,\ \infty$. Supposons que les différences des nombres caractéristiques distincts de ces substitutions ne sont par entières. Il existe évidemment un système des substitutions $C_1, \ldots C_m, C_\infty$, independant de x, telles que

$$Y(x) = C_j \Theta_j \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right), \ j = 1 \ldots m, \ \infty.$$

Les substitutions intégrales de la matrice considerée en points a_j sont alors:

$$V_j = C_j \, e^{2\pi i U_j} C_j^{-1}.$$

Il suit de la définition même des matrices métacanoniques [§ 12], que les déterminations particulières des logarithmes des substitutions intégrales:

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j = C_j \, U_j \, C^{-1} \tag{53}$$

jouissent de la propriété suivante: la matrice $Y(x)$ admet les représentations

$$Y(x) = (x - a_j)^{W_j} \, \overline{Y}_j(x); \ j = 1, 2, \ldots m \tag{54}$$

$$Y(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty} \overline{Y}_\infty(x);$$

où les matrices

$$\overline{Y}_j(x) = C_j^{-1} \, \overline{\Theta}_j \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right); \ j = 1, \ldots m, \ \infty,$$

ainsi que les matrices inverses restent holomorphes en voisinage du point a_j ou resp. ∞. A cause de cette propriété les substitutions W_j, seront nommées „substitutions exposantes" de la matrice $Y(x)$ en points a_j ou resp. ∞.

Les substitutions exposantes sont d'ailleurs complètement caractérisées par la propriété indiquée. Supposons en effet, qu'outre la substitution W_j il existe encore une substitution W'_j, telle que la matrice

$$(x - a_j)^{-W'_j} \, Y(x) = \overline{Y}'_j(x),$$

ainsi que la matrice inverse restent holomorphes dans un voisinage du point a_j. Les matrices

$$\begin{aligned} (x - a_j)^{-W_j} (x - a_j)^{W'_j} &= \overline{Y}_j(x) \, \overline{Y}'_j(x)^{-1} \text{ et} \\ (x - a_j)^{-W'_j} (x - a_j)^{W_j} &= \overline{Y}'_j(x) \, \overline{Y}_j(x)^{-1}. \end{aligned} \tag{55}$$

sont alors aussi holomorphes dans le voisinage mentionné. Supposons pour simplifier l'écriture que les diviseurs élémentaires de la substitution V_j sont simples, de sorte que

$$V_j = T.[\omega_1 \ldots \omega_n] \, T^{-1}.$$

L'uniformité des matrices $\overline{Y}_j(x)$ et $\overline{Y}'_j(x)$ en voisinage du point a_j exige que l'on ait:

$$e^{2\pi i W_j} = e^{2\pi i W'_j} = V_j.$$

Donc, on a les représentations [§ 8]:

$$W_j = T.\left[\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r_1, \ldots \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r_n\right] T^{-1}$$

$$W'_j = T.\left[\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r'_1, \ldots \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r'_n\right] T^{-1},$$

où $\lg\omega_1, \ldots \lg\omega_n$ sont les valeurs principales des logarithmes et $r_1, \ldots r_n$, $r'_1 \ldots r'_n$ sont des nombres entiers. Les relations (55) s'écriront sous forme:

$$[(x-a_j)^{-r_1+r'_1}, \ldots, (x-a_j)^{-r_n+r'_n}] = T^{-1}\overline{Y}_j(x)\,\overline{Y}'_j(x)^{-1}\,T$$

$$[(x-a_j)^{-r'_1+r_1}, \ldots, (x-a_j)^{-r'_n+r_n}] = T^{-1}\,\overline{Y}'_j(x)\,\overline{Y}_j(x)^{-1}\,T$$

La holomorphie des matrices du coté droit en voisinage du point a_j entraîne évidemment les relations:

$$r_1 = r'_1,\ r_n = r'_n;\ W_j = W'_j.$$

Si quelques différences des nombres caractéristiques distincts de la substitution différentielle U_j en point a_j sont entières la matrice régulière $Y(x)$ n'admet pas de substitution exposante en ce point. Soit, en effet, W_j une telle substitution de sorte qu'on ait la représentation (54). En remplaceant la matrice $\overline{Y}_j(x)$ par son développement de Taylor pour le voisinage du point a_j, en substituant l'expression (54) dans le système (1) [§ 1] et en comparant les coefficients d'après la puissance $(x-a_j)^{-1}$, on aurait alors:

$$W_j = \overline{Y}_j(a_j)\ U_j\ \overline{Y}_j(a_j)^{-1}. \tag{56}$$

Il en résulte, que la matrice $\overline{Y}_j(a_j)^{-1}\ Y(x)$ serait une matrice métacanonique en point a_j, ce qui est impossible en vertu de la supposition concernant les nombres caractéristiques de la substitution U_j [§ 12].

Il suit de la relation (53), que les substitutions exposantes des matrices régulières normales $\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)$ sont:

$$W_j = \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1} U_j\ \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1,\ldots,U_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle|\, b\right). \tag{57}$$

Ces substitutions sont évidemment des fonctions méromorphes des substitutions différentielles, dont les singularités sont produites par les valeurs des substitutions U_j aux différences entières des nombres caractéristiques distincts.

§ 18. Il resulte des relations (43) [§ 14] et (57) que les substitutions intégrales ainsi que les substitutions exposantes d'une matrice regulière normale $\Phi_b\begin{pmatrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} x \Big)$ sont des fonctions analytiques du point de la normalisation b. En écrivant ces relations sous forme

$$V_j = \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} e^{2\pi i U_j}\,\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)$$

$$W_j = \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} U_j\,\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)$$

et en remarquant que les matrices métacanoniques et les matrices inverses satisfont aux systèmes:

$$\frac{d}{db}\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right) = \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h}{b-a_h}$$

$$\frac{d}{db}\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} = -\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h}{b-a_h}\Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}$$

on reçoit:

$$(58)\qquad \frac{dV_j}{db} = \sum_{h=1}^{m}\frac{V_j\,U_h - U_h\,V_j}{b-a_h}\;;\quad \frac{dW_j}{db} = \sum_{h=1}^{m}\frac{W_j\,U_h - U_h\,W_j}{b-a_h}$$

$$(j = 1,\ 2,\ldots,m,\ \infty).$$

Il vient en outre des relations (43) et (57)

$$(59)\qquad V_j = e^{2\pi i U_j}\,;\quad W_j = V_j$$

pour $b = a_j$. Donc, les substitutions intégrales ainsi que les substitutions exposantes, traitées comme fonctions du point de la normalisation sont des matrices intégrales du système d'équations différentielles linéaires (58), satisfaisant aux conditions initiales (59).

Les substitutions considérées sont les fonctions analytiques des substitutions différentielles

$$(60)\qquad V_j = \Omega_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} = I +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} U_{j_1},\ U_{j_2},\ldots,U_{j_\nu}\ P_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2},\ldots,a_{j_\nu})$$

$$(61)\qquad W_j = \Xi_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1,\ldots,U_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} = I +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} U_{j_1},\ U_{j_2}\ldots,\ U_{j_\nu}\ Q_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2},\ldots a_{j_\nu})$$

dont les premières sont entières [§ 11] et les secondes, étant, en général méromorphes, sont holomorphes dans un voisinage des substitutions nulles [§ 17]. En substituant les séries (60) et (61) dans les systèmes (58), en comparant les coefficients d'après les mêmes compositions des substitutions différentielles et en tenant compte des conditions initiales (59), on arrive aux relations de récurrence: pour les paramètres de la configuration $P_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu})$ et $Q_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu})$:

$$
(62)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c}
P_b^{(j)}(a_j^\nu) = \dfrac{(2\pi i)^\nu}{\nu!};\ P_b^{(j)}(a_{j_1}) = 0, \text{ si } j_1 \neq j \\
P_b^{(j)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}) = \\
= \displaystyle\int_{a_j}^{b} \left[\frac{P_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}})}{b - a_{j_\nu}} - \frac{P_b^{(j)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})}{b - a_{j_1}}\right] db
\end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, m \\
\text{si l'un au moins des indices } j_1, j_2 \ldots, j_\nu \text{ est distinct de } j; \\
\qquad P_b^{(\infty)}(a_{j_1}) = -2\pi i \\
\qquad P_b^{(\infty)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = \dfrac{(-2\pi i)^\nu}{\nu!} + \\
\qquad + \displaystyle\int_{\infty}^{b} \left[\frac{P_b^{(\infty)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}})}{b - a_{j_\nu}} - \frac{P_b^{(\infty)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})}{b - a_{j_1}}\right] db;
\end{array}\right.
$$

$$
(63)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c}
Q_b^{(j)}(a_j) = 1;\quad Q_b^{(j)}(a_{j_1}) = 0, \text{ si } j_1 \neq j; \\
Q_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = \\
= \displaystyle\int_{a_j}^{b} \left[\frac{Q_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}})}{b - a_{j_\nu}} - \frac{Q_b^{(j)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})}{b - a_{j_1}}\right] db
\end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, m \\
\qquad Q_b^{(\infty)}(a_{j_1}) = -1 \\
\qquad Q_b^{(\infty)}(a_{j_1} \ldots, a_{j_\nu}) = \\
\qquad = \displaystyle\int_{\infty}^{b} \left[\frac{Q_b^{(\infty)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}})}{b - a_{j_\nu}} - \frac{Q_b^{(\infty)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})}{b - a_{j_1}}\right] db.
\end{array}\right.
$$

L'avantage des relations de récurrence obtenues est évidente: elles déterminent consécutivement les paramètres

$$P_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) \text{ et } Q_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu})$$

independamment de toutes les autres fonctions spéciales considérées.

Dans le cas, où le groupe, produit par les substitutions différentielles, est commutatif, on a:

$$\Omega_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} = e^{2\pi i U_j};\quad \Xi_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} = U_j.$$

La différence du caractére des substitutions intégrales et des substitutions exposantes, traitées comme fonctions des substitutions différentielles, vient exclusivement des conditions initiales (59) et peut être expliqueé par une remarque suivante.

Le substitutions V_j et W_j étant des fonctions holomorphes de b dans un voisinage d'un point a_j sur la surface universelle $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, les systèmes (58) peuvent être identifiés par les séries de Taylor:

$$V_j = e^{2\pi i U_j} + \sum_{r=1}^{\infty} A_r \,(b - a_j)^r$$

$$W_j = U_j + \sum_{r=1}^{\infty} B_r \,(b - a_j)^r,$$

où les matrices A_r et B_r sont independantes de b. En substituant ces séries dans les systèmes (58), ou reçoit les relations de récurrence pour les coefficients A_r et B_r, analogues aux relations de récurrence (29) du § 12:

$$U_j A_1 + A_1 - A_1 U_j = - e^{2\pi i U_j} \sum_{h \neq j} \frac{U_h}{a_h - a_j} + \sum_{h \neq j} \frac{U_h}{a_h - a_j} e^{2\pi i U_j}$$

. . . .

$$U_j B_1 + B_1 - B_1 U_j = - U_j \sum_{h \neq j} \frac{U_h}{a_h - a_j} + \sum_{h \neq j} \frac{U_h}{a_h - a_j} U_j$$

. . . .

Supposons pour simplifier l'écriture, que les diviseurs élémentaires de la substitution U_j sont simples, de sorte que

$$U_j = S\,[\sigma_1 \ldots \sigma_n]\, S^{-1}.$$

Les rélations de recurrence écrites ci-dessus donnent alors:

$$\left.\begin{array}{l} \{\overline{A}_1\}_{kl} = - \dfrac{e^{2\pi i \sigma_k} - e^{2\pi i \sigma_l}}{\sigma_k - \sigma_l + 1} \displaystyle\sum_{h \neq j} \frac{\{\overline{U}_h\}_{kl}}{a_h - a_j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \{\overline{B}_1\}_{kl} = - \dfrac{\sigma_k - \sigma_l}{\sigma_k - \sigma_l + 1} \displaystyle\sum_{h \neq j} \frac{\{\overline{U}_h\}_{kl}}{a_h - a_j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} k,l = 1, 2 \ldots n,$$

où $\qquad \overline{A}_1 = S^{-1} A_1 S; \ldots \overline{B}_1 = S^{-1} B_1 S, \ldots \overline{U}_h = S\, U_h\, S^{-1}.$

On voit de là, que les matrices $A_1, \ldots$ restent toujours finies, quelque soit la substitutions U_j, tandis que les matrices $B_1 \ldots$ deviennent infinies, si l'une des différences des nombres caractéristiques $\sigma_k - \sigma_l$ est égale á un nombre entier, non nul.

V. Fonctions fondamentales des substitutions exposantes dans un voisinage de la substitution nulle.

§ 19. Les substitutions exposantes d'une matrice régulière normale étant des logarithmes des substitutions intégrales, la résolution du problème de Riemann [§ 1, (B)] sera évidemment fournie par le résolution du problème suivant.

C) **Etant donné un système des substitutions** $W_1, W_2, \ldots W_m$ **et une configuration des points** a_1, a_2, a_m **à distance finie, construire une matrice régulière** $Y(x)$, **admettant les substitutions exposantes** $W_1, W_2, \ldots W_m$ **en points singuliers respectivement** a_1, a_2, a_m, **et les substitutions différentielles** $U_1, U_2, \ldots U_m$, **de cette matrice.**

Nous abordons l'étude de ce problème par la considération du cas, où les substitutions exposantes se trouvent dans un voisinage de la substitutions nulle. En vertu du lemme II [§ 6] le système d'équations (61):

$$W_j = U_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} Q_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})$$

[§ 18] admet alors un systéme des solutions, représentées par les fonctions holomorphes des substitutions W_1 $W_2 \ldots W_m$ dans un voisinage des substitutions nulles:

$$(64) \quad U_j = \mathrm{H}_b^{(j)}\begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} W_{j_1} W_{j_2} \ldots W_{j_\nu} R_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu}),$$

où les coefficients $R_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})$ sont définies par les relations de récurrence:

$$(65) \qquad R_b^{(j)}(a_j) = 1; \quad R_b^{(j)}(a_{j_1}) = 0 \text{ si } j_1 \neq j$$

$$R_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) =$$

$$= -\sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} R_b^{(h_1)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}}) R_b^{(h_2)}(a_{j_{\varkappa_1+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_2}}) \ldots$$

$$\ldots R_b^{(h_\mu)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}} \ldots a_{j_\nu}) \; Q_b^{(j)}(a_{h_1} a_{h_2} \ldots a_{h_\mu}).$$

La matrice régulière normale:

$$(66) \quad \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right) =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2\ldots,m)} U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_\nu} L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} | x),$$

dont les substitutions différentielles $U_1, \ldots, U_m$ sont définies par les séries (64) admet évidemment les substitution exposantes $W_1, W_2, \ldots, W_m$ et les substitutions intégrales $e^{2\pi i W_1}, e^{2\pi i W_2}, \ldots, e^{2\pi i W_m}$ en points réspectivement $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En ordonnant d'après le lemme I [§ 6] le développement (66) suivant les compositions des substitutions exposantes, on conclut, que la matrice régulière normale $\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ est une fonction holomorphe des substitutions exposantes dans un voisinage des substitutions nulles:

$$
(67) \qquad \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) = I +
$$

$$
+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots m)} W_{j_1}, W_{j_2}, \ldots, W_{j_\nu} K_b(a_{j_1}, a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x),
$$

où les coefficients $K_b(a_{j_2}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \mid x)$ sont les combinaisons linéaires d'hyperlogarithmes:

$$
(68) \qquad K_b(a_{j_1} \mid x) = L_b(a_{j_1} \mid x);
$$

$$
K_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} \mid x) =
$$

$$
= \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{h_1, h_2, \ldots h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)} \sum_{1 \leq \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} R_b^{(h_1)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{\varkappa_1}}) \, R_b^{(h_2)}(a_{j_{\varkappa_1+1}}, \ldots, a_{j_{\varkappa_2}}) \ldots
$$

$$
\ldots R_b^{(h_\mu)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}, \ldots, a_{j_\nu}) \, L_b(a_{h_1}, \ldots a_{h_\mu} \mid x).
$$

Les séries (67) ont évidemment le même caractère de la convergence par rapport à x, que les séries (66): elles sont uniformement convergentes dans tout domaine fini de la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, a_2, \ldots a_m$. Les substitutions exposantes $W_1, \ldots, W_m$ se trouvant dans un voisinage des substitutions nulles, les substitutions différentielles $U_1, \ldots, U_m$ définies par les relations (64) ainsi que la substitution différentielle $U_\infty = -(U_1 + \ldots + U_m)$ jouissent de la même propriété. Par conséquent, conformement aux relations (57) [§ 17] la matrice régulière normale (67) admet la substitution exposante en point à l'infini:

$$
W_\infty = \overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} U_\infty \overline{\Theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| b\right)
$$

qui est ainsi bien définie par les substitution $W_1, W_2, \ldots, W_m$.

Il suit, immédiatement du développement (67) que les deux matrices régulières normales en point b et c sont liées par la relation:

$$
(69) \quad \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \Psi_c\left(\begin{matrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| c\right)
$$

En tenant compte de cette égalité on conclut, que les substitutions différentielles des deux matrices considérées sont liées par les relations:

$$(70)\quad \mathrm{H}_b^{(j)}\begin{pmatrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} =$$

$$= \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| c\right)^{-1} \mathrm{H}_c^{(j)}\begin{pmatrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| c\right).$$

Les matrices:

$$(71)\quad \begin{cases} \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b),\ldots,U_m(b) \\ a_1,\ \ldots,\ a_m \end{matrix}\middle| b\right) = \overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right) \\ \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b),\ldots,U_m(b) \\ a_1,\ \ldots,\ a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} = \overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} \end{cases}$$

où

$$U_j(b) = \mathrm{H}_b^{(j)}\begin{pmatrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix}, \ ^{*)}$$

sont évidemment les fonctions holomorphes des substitutions exposantes dans un voisinage de la substitution nulle:

$$(72)\quad \overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right) = \mathrm{I} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,j_2,\ldots j_\nu}^{(1,2,\ldots m)} W_{j_1}, W_{j_2},\ldots,W_{j_\nu}\ \overline{M}_j\,(a_{j_1}, a_{j_2},\ldots,a_{j_\nu}\,|\,b)$$

$$(73)\quad \overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} = \mathrm{I} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} W_{j_1}, W_{j_2},\ldots,W_{j_\nu}\ \overset{*}{\overline{M}}_j\,(a_{j_1}, a_{j_2},\ldots a_{j_\nu}\,|\,b),$$

les coefficients étant définis par les relations:

$$(74)\qquad \overline{M}_j\,(a_{j_1}\,|\,b) = \overline{N}_j\,(a_{j_1}\,|\,b);\ \overset{*}{\overline{M}}_j\,(a_{j_1}\,|\,b) = \overset{*}{\overline{N}}_j\,(a_{j_1}\,|\,b)$$

$$M_j\,(a_{j_1},\ldots,a_{j_\nu}\,|\,b) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{h_1,h_2,\ldots,h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)} \sum_{1\leq\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} R_b^{(h_1)}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}})\, R_b^{(h_2)}(a_{j_{\varkappa_1+1}}\ldots a_{j_{\varkappa_2}})\ldots$$

$$R_b^{(h_\mu)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu})\ \overline{N}_j\,(a_{h_1}, a_{h_2}\ldots a_{h_\mu}\,|\,b)$$

$$\overset{*}{\overline{M}}_j\,(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{h_1,h_2\ldots h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)} \sum_{1\leq\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} R_b^{(h_1)}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}})\, R_b^{(h_2)}(a_{j_{\varkappa_1+1}}\ldots a_{j_{\varkappa_2}})\ldots$$

$$\ldots R_j^{(h_\mu)}(a_{j_{\mu-1}+1}\ldots a_{j_\nu})\ \overset{*}{\overline{N}}_b\,(a_{h_1}, a_{h_2}\ldots a_{h_\mu}\,|\,b).$$

---

*) Les fonctions $\overline{\vartheta}_j$ se trouvent ainsi bien définies par les relations (71).

En appliquant la relation (57) du § 17 à la matrice régulière normale $\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| x\right)$, on a:

$$W_j = \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1,\ \ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1} U_j\,(b)\,\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1\ \ \ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right).$$

Donc, en vertu des relations (71) les substitutions différentielles de la matrice régulière normale considerée peuvent être mises sous forme

$$U_j = \overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right) W_j\ \overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1} \tag{75}$$

Il vient de la formule (42) [§ 14] que

$$\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| x\right) = \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1\ \ ,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{Uj(b)}\cdot \tag{76}$$

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1,\ \ \ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)\cdot\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1,\ \ \ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\times$$

$$\times\,\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1,\ \ \ldots,a_m\end{matrix}\middle| x\right)=$$

$$=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1\ \ ,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| x\right)$$

En substituant les expressions (76) dans la relation (69) on reçoit:

$$(b-a)^{-W_j}\,\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1,\ \ ,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| x\right)=$$

$$=(c-a_j)^{-W_j}\,\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| c\right)^{-1}\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(c),\ldots,U_m(c)\\ a_1\ \ \ ,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| x\right)\cdot$$

$$\left(\frac{c-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1\ \ \ ,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| c\right).$$

En faisant $x=a_j$, en se souvenant des relations:

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1\ \ \ ,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| a_j\right)=\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1\ \ \ ,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1}=I$$

[§ 12] et en remplaceant c par x, on trouve

$$\begin{aligned}\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1\ \ \ ,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| x\right)&=\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}\times\\ &\times\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| x\right)\cdot\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1,\ldots,W_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{77}$$

En substituant cette dernière expression dans la relation (76), on arrive à la représentation d'une matrice régulière, normale sous forme

$$(78)\quad \Psi_b\begin{pmatrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix}\!\left|\,x\right) = $$
$$= \overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\vartheta_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}.$$

D'une façon analogue on reçoit la représentation:

$$\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right) = \overline{\vartheta}_\infty\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{W_\infty}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}.$$

La matrice

$$(79)\qquad \vartheta_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right) = \overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right)(x-a_j)^{W_j},$$

qui ne diffère de la matrice régulière normale $\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right)$ que par un facteur constant du côté droit: $\vartheta_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}$, est évidemment de même une matrice régulière aux substitutions exposantes $W_1,\ldots W_m$ en points $a_1,\ldots a_m$. En écrivant la matrice régulière considerée sous forme:

$$\vartheta_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right) = (x-a_j)^{W_j}\,\overline{\overline{\vartheta}}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right),$$

où

$$(80)\quad \overline{\overline{\vartheta}}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right) = (x-a_j)^{-W_j}\,\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right).(x-a_j)^{W_j},$$

conformément à la relation (77) on a:

$$\overline{\overline{\vartheta}}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right) = (b-a_j)^{-W_j}\,\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}\times$$
$$\times\,\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b),\ldots,U_m(b) \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right).\,\vartheta_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, b\right)(b-a_j)^{W_j}.$$

Cette dernière matrice reste évidemment holomorphe dans un voisinage du point $x = a_j$ et se reduit à I en ce point. Donc, la matrice $\vartheta_j\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right)$, définie par la relation (79) est une matrice métacanonique par rapport au point a_j, admettant les substitutions exposantes $W_1\ldots W_m$ en points $a_1\ldots a_m$. En effet, il suit de la formule (56) [§ 17] que la substitution différentielle de cette matrice en point a_j est precisement W_j.

En comparant les considérations de ce paragraphe aux résultats des paragraphes 12—14 et 17 on arrive à la conclusion suivante: les matrices regulières considerées peuvent être traitées, en général, soit comme fonctions de leures substitutions différentielles, soit comme fonctions de leures substitutions exposantes. Ces deux points de vu nous amènent d'ailleurs aux relations analogues. Cela revient au fait, que les matrices régulières normalisées en points arbitraires sont, en général, aussi bien définies par leures substitutions différentielles que par leures substitutions exposantes: dans le premier cas l'indétermination se réduit à un facteur constant du côté gauche [§ 10; (24)] et dans le deuxième—au même facteur du côté droit [(69)].

§ 20. Pour achever l'étude des fonctions fondementales des substitutions exposantes dans un voisinage de la substitution nulle, nous avons encore á établir les relations de récurrence pour les coefficients des développements (64) et (67) qui seront beaucoup plus simples et plus instructives que les relations (65) et (68) et qui détermineront ces coefficients independamment de toutes les autres fonctions spéciales considerées.

Les substitutions différentielles $U_j(b)$ d'une matrice régulière normale $\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ peuvent être traitées, comme fonctions analytiques du point de la normalisation b:

$$(81) \qquad U_j(b) = \Psi_c\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right) U_j(c)\, \Psi_c\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1},$$

où c est un pointe fixé, ce qui suit immédiatement de la relation (70) [§ 20]. Les matrices régulières du côté droit de la relation (81) satisfont aux systèmes:

$$\frac{d}{db}\Psi_c\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right) = \Psi_c\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h(c)}{b-a_h}$$

$$\frac{d}{db}\Psi_c\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} = -\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h(c)}{b-a_h}\Psi_c\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}.$$

Donc, en différentiant les relations (81) par rapport à b on trouve:

$$(82) \qquad \frac{dU_j}{db} = \sum_{h \neq j}\frac{U_h U_j - U_j U_h}{b-a_h} \quad j = 1, 2 \ldots m.$$

Outre cela, il suit des relations (75) et (80) [§ 19] que les fonctions $(b-a_j)^{-W_j}\, U_j(b)\ (b-a_j)^{W_j}$ restent holomorphes par rapport à b dans un voisinage du point a_j et que

$$(83) \qquad [(b-a_j)^{-W_j}\, U_j(b)\,(b-a_j)^{W_j}]_{b\to a} = W_j.$$

Donc, **les substitutions différentielles, traitées comme fonctions du point de la normalisation sont les matrices intégrales du système d'équations différentielles** (82) **satisfaisant aux conditions initiales** (83). Bien que le système (82) est non linéaire, il admet les points singuliers fixes: $a_1, a_2, \ldots a_m \infty$. En effet, on vérifie par la différentiation, que les matrices intégrales de ce système: $U_1, U_2, \ldots U_m$, se réduisant aux matrices constantes $C_1, C_2 \ldots C_m$ en point $b = c$, sont **les fonctions entières** de ces dernières matrices:

$$(84) \qquad U_j = \Phi_c\begin{pmatrix} C_1, \ldots, C_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} b \Big) \, C_j \, \Phi_c \begin{pmatrix} C_1, \ldots, C_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} b \Big)^{-1}$$

Les intégrales du système (82) aux conditions initiales (83) sont évidemment fournies par les relations (57) [§ 17]. La construction des expressions explicites des matrices intégrales $U_1, U_2 \ldots U_m$, satisfaisant aux conditions initiales (86), à l'aide d'un choix convenable des matrices constantes $C_1, C_2, \ldots C_m$ de l'intégrale générale (84) se réduit à la résolution d'un système d'équations de la forme (57). En effet, le point c étant supposé fixé, en remarquant, qu'en vertu de la formule (42) [§ 14], on a:

$$\left[\Phi_c\left(\begin{matrix} C_1, \ldots, C_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| b\right) \cdot \left(\frac{b - a_j}{c - a_j}\right)^{-C_j}\right]_{b \to a_j} = \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} C_1 \ldots C_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| c\right)^{-1},$$

on conclut, que les conditions (83) déterminent les matrices constantes $C_1 \ldots C_m$ par le système d'équations

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} C_1, \ldots, C_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| c\right)^{-1} C_j \, \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} C_1, \ldots, C_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| c\right) = W_j.$$

En substituant dans le système (82) les séries des compositions:

$$U_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2 \ldots, m)} W_{j_1} W_{j_2 \ldots} W_{j_\nu} R_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2 \ldots} a_{j_\nu}),$$

en comparant les coefficients d'après les mêmes compositions des substitutions exposantes et en tenant compte des conditions initiales (83), on reçoit les relations cherchées de récurrence pour les paramètres $R_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})$:

$$R_b^{(j)}(a_j) = 1; \quad R_b^{(j)}(a_{j_1}) = 0, \text{ si } j_1 \neq j$$

$$(85) \qquad R_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2 \ldots} a_{j_\nu}) =$$

$$= \int_{a_j}^{b} \sum_{h \neq j} \frac{db}{b - a_h} \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} [R_b^{(h)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa}) \, R_b^{(j)}(a_{j_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}) -$$

$$- R_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa}) \, R_b^{(h)} a_{j_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu})].$$

§ 21. En passant aux coefficients du développement (67), nous considérons la caractère de la ramifications des fonctions $K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)$ en points $a_1, a_2\dots a_m$. En vertu de l'égalité,

$$\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-\\x\end{matrix}\right)-\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\begin{matrix}+\\x\end{matrix}\right)=$$

$$=(e^{2\pi i W_j}-1)\,\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\begin{matrix}+\\x\end{matrix}\right),$$

qui a lieu au bords de chaque coupure $(a_j\infty)$ $(j=1,\dots m)$, les valeurs des fonctions $K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)$ aux bords de la coupure $(a_j\infty)$ sont liées par les relations:

$$(86)\qquad K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{-}{x})-K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{+}{x})=0$$

$$K_b(a_j^\lambda\, a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{-}{x})-K_b(a_j^\lambda\, a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{+}{x})=$$

$$=\sum_{\varkappa=1}^{\lambda}\frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!}K_b(a_j^{\lambda-\varkappa}\, a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{+}{x})$$

où $j_1\neq j$

Envisageons le système des fonctions:

$$K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}\,|\,x');\; j_1,\dots j_\nu=1,\;2\dots m_j\;\nu=1,\;2,\;3,\dots$$

définies par les relations de récurrence:

$$(87)\quad\begin{cases} K'(a'_j\,|\,x)=-\displaystyle\int_{a'_j}^{0}\frac{d\xi}{\xi-x'}\\[2ex] K'(a'^{\lambda}_j\, a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}\,|\,x')=-\displaystyle\int_{a'_j}^{0}\sum_{\varkappa=1}^{\lambda}\frac{(2\pi i)^{\varkappa-1}}{\varkappa!}K'(a'^{\lambda-\varkappa}_j\, a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}\,|\,\xi)\frac{d\xi}{\xi-x'}\end{cases}$$

oú $j\neq j_1$ et les intégrales sont prises suivant les bords positifs des coupures $(a'_j 0)$ dans le plans de la variable complexe x'. En vertu d'un théorème bien connu de Sokchotski sur les valeurs limites de l'intégrale de Cauchy, les valeurs des fonctions $K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}\,|\,x')$ aux bords positifs et négatifs de toute coupure $(a'_j, 0)$ sont liées par les relations, completement analogues aux relations (86). En posant

$$(88)\qquad a'_j=\frac{1}{a_j-b};\quad x'=\frac{1}{x-b},$$

on a l'identité:

$$K'(a'_j\,|\,x')=K_b(a_j\,|\,x).$$

En supposant que les identités

$$K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}\,|\,x') = K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x) \tag{89}$$

ont lieu pour toutes les valeurs de l'indice $\nu < \mu$, on conclut, que les fonctions:

$$K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\mu}\,|\,x) - K'(a'_{j}\dots a'_{j_\mu}\,|\,x)$$

sont uniformes dans tous le plans de la variable complexe x. En remarquant que ces fonctions ne peuvent admettre que des singularités du type logarithmique et qu'elles se réduisent au zéro pour $x = b$, on reçoit l'identité

$$K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\mu}\,|\,x) = K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\mu}\,|\,x).$$

Donc, les identités (89) subsistent pour toutes les valeurs de l'indice μ et les coefficient du développement (67) se trouvent définis par les relations de récurrence (87) et les transformations bilinéaires (88).

§ 22. En résumant les résultats des §§ 19 — 21 on reçoit le théorème suivant:

Théorème III. On peut construire une matrice régulière normale en point b, admettant les substitutions exposantes $W_1, \dots, W_m$ en points $a_1, \dots a_m$ et admettaut outre cela une substitution exposante à l'infini. Cette matrice, ainsi que ses substitutions différentielles, sont des fonctions holomorphes des substitutions exposantes en voisinage des substitutions nulles:

$$\Psi_b\begin{pmatrix} W_1, \dots, W_m \\ a_1, \dots, a_m \end{pmatrix} x \Bigg) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{(1,2,\dots m)} W_{j_1}, W_{j_2}, \dots, W_{j_\nu} K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}\,|\,x')$$

$$\mathrm{H}_b^{(j)}\begin{pmatrix} W_1, \dots, W_m \\ a_1, \dots, a_m \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \dots j_\nu}^{(1,2,\dots m)} W_{j_1}, W_{j_2}, \dots, W_{j_\nu} R_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}),$$

où

$$x' = \frac{1}{x-b} \quad \text{et} \quad a'_j = \frac{1}{a_j - b}$$

et les coefficients

$$K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}\,|\,x') \quad \text{et} \quad R_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu})$$

sont définis par les relations de récurrence (87) [§ 21] et (85) [§ 20].

Dans le cas particulier, où le groupe produit par les substitutions exposantes et commutatif, on a:

$$\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$$

$$\mathrm{H}|^{(j)}\left(\begin{matrix} W_1,\ldots,W_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\right) = W_j$$

Les formules du théorème III nous donnent évidemment la résolution algorithmique du problème, (C) [§ 19], dans le cas, où les substitutions exposantes se trouvent dans un voisinage de la substitutions nulle.

VI. Fonctions fondamentales des substitutions exposantes dans tous le domaine de leure existence.

§ 23. La résolution du problème (C) [§ 19] dans le cas général, independante du procédé du prolongement analytique des séries du théorème III, sera fournit par une methode des approximations successives qui nous donnera les expressions analytiques explicites des substitutions cherchées à l'aide des fonctions:

$$(90) \qquad \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} X_1,\ldots,X_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| x\right) \text{ et } \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} X_1,\ldots,X_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| x\right)^{-1}$$

déjà connues. Nous avons indiqué que ces fonctions sont des fonctions méromorphes des substitutions $X_1,\ldots,X_m$ dont les singularités correspondent aux valeurs de la substitutions X_j aux différenees entières des nombres caractéristiques distincts. Pour tous les autres systèmes des substitutions $X_1,\ldots,X_m$ les fonctions (90) comme nous l'avons vu dans le § 12 sont définies par les expressions suivantes:

1°. le point a_j étant fixé sur la surface universelle $\mathfrak{S}(a_1,\ldots,a_m,\infty)$, pour toute les valeurs de la variable x sur $\mathfrak{S}$, satisfaisant aux inégalités:

$$(91) \qquad |x-a_j| < |a_h-a_j|\ ; \quad h = 1,\ldots, j-1, j+1,\ldots, m,$$

par rapport au point a_j indiqué ci-dessus, on a les développements de Taylor:

$$(92) \quad \begin{cases} \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} X_1,\ldots,X_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} A_j^{(r)}\left(\begin{matrix} X_1,\ldots,X_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\right)(x-a_j)^r \\ \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} X_1,\ldots,X_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle| x\right)^{-1} = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \overset{*}{A}{}_j^{(r)}\left(\begin{matrix} X_1,\ldots,X_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\right)(x-a_j)^r, \end{cases}$$

où les coefficients sont les fonctions rationnelles des substitutions $X_1,\ldots,X_m$ *) et des points $a_1\ldots,a_m$, définies par les relations de récurrence:

$$(93)\begin{cases} A_j^{(0)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix} = \overset{*}{A}{}_j^{(0)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix} = 1 \\ X_j A_j^{(r)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix} + rA_j^{(r)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix} - A_j^{(r)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix} X_j = \\ \qquad = -\sum_{h\neq j}\sum_{\rho=0}^{r-1} A_j^{(\rho)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix} X_h \dfrac{1}{(a_h-a_j)^{r-\rho}} \end{cases}$$

$$X_j \overset{*}{A}{}_j^{(r)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a,\ldots,a_m\end{pmatrix} + r\overset{*}{A}{}_j^{(r)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix} - \overset{*}{A}{}_j^{(r)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix} X_j =$$

$$= \sum_{h\neq j}\sum_{\rho=0}^{r-1} X_h \overset{*}{A}{}_j^{(\rho)}\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix}\frac{1}{(a_h-a_j)^{r-\rho}}$$

2°. Si x est un point distinct des points $a_1,\ldots,a_m$ et se trouvant hors du domaine (91), on fixe un point arbitraire c à l'intérieur de ce domaine et on pose:

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c}X_1,\ldots,X_m & x\\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right) = \left(\frac{c-a_j}{x-a_j}\right)^{X} \overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c}X_1,\ldots,X_m & c\\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)\Phi_c\left(\begin{array}{c|c}X_1,\ldots,X_m & x\\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)$$

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c}X_1,\ldots,X_m & x\\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)^{-1} = \Phi_c\left(\begin{array}{c|c}X_1,\ldots,X_m & x\\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)^{-1}\overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c}X_1,\ldots,X_m & c\\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)^{-1}\left(\frac{c-a}{x-a}\right)^{-X_j}.$$

Si l'on veut continuer les calculs à l'aide des séries de Taylor on fixe les points intermédiaires $c_0,\ c_1,\ldots,c_{\lambda-1},\ c_\lambda = x$ sur le chemin $(a_j\ x)$ sur $\mathfrak{S}$ et ou se serve des formules:

$$(94)\begin{cases} \overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c}X_1\ldots X_m & x\\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right) = \\ \qquad = \left(\dfrac{c_0-a_j}{x-a_j}\right)^{X_j}\overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c}X_1\ldots X_m & c_0\\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)\prod_{\varkappa=1}^{\lambda}\Phi_{c_{\varkappa-1}}\left(\begin{array}{c|c}X_1\ldots X_m & c_\varkappa\\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right) \\ \overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c}X_1\ldots X_m & x\\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right) = \\ \quad = \prod_{\varkappa=\lambda}^{1}\Phi_{c_{\varkappa-1}}\left(\begin{array}{c|c}X_1\ldots X_m & c_\varkappa\\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)^{-1}\overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c}X_1\ldots X_m & c\\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)^{-1}\left(\dfrac{c_0-a_j}{x-a_j}\right)^{-X_j}, \end{cases}$$

*) Nous dirons que la fonction $F(X_1,\ldots X_m)$ est rationnelle par rapport aux substitutions $X_1,\ldots,X_m$, si les éléments $\{F(X_1,\ldots,X_m)\}_{kl}$ sont des fonctions rationnelles des éléments $\{X_j\}_{\varkappa\lambda}$.

où

$$\Phi_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| c_\varkappa\right)=\sum_{r=0}^{\infty}(c_\varkappa-c_{\varkappa-1})^r B^{(r)}_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\right)$$

$$\Phi_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| c_\varkappa\right)=\sum_{r=0}^{\infty}(c_\varkappa-c_{\varkappa-1})^r \overset{*}{B}{}^{(r)}_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\right)$$

$$\left(\frac{c_0-a_j}{x-a_j}\right)^{X_j}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}X_j^r \lg^r\frac{c_0-a_j}{x-a_j}$$

et les coefficients $B^{(r)}_{c_\varkappa-1}$ et $\overset{*}{B}{}^{(r)}_{c_\varkappa-1}$ sont les fonctions rationnelles des substitutions $X_1\ldots X_m$ et des points $a_1\ldots a_m$, $c_{\varkappa-1}$ définies par les relations de récurrence:

$$(95)\quad\left\{\begin{aligned}
&B^{(0)}_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1\ldots X_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\right)=\overset{*}{B}{}^{(0)}_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1\ldots X_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\right)=1\\
&B^{(r)}_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1\ldots X_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\right)=\\
&\qquad=-\frac{1}{r}\sum_{\rho=0}^{r-1}\sum_{h=1}^{m}B^{(\rho)}_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1\ldots X_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\right)X_h\frac{1}{(a_h-c_{\varkappa-1})^{r-\rho}}\\
&\overset{*}{B}{}^{(r)}_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1\ldots X_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\right)=\\
&\qquad=\frac{1}{r}\sum_{\rho=0}^{r-1}\sum_{h=1}^{m}X_h\overset{*}{B}_{c_\varkappa-1}\left(\begin{matrix}X_1\ldots X_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\right)\frac{1}{(a_h-c_{\varkappa-1})^{r-\rho}}.
\end{aligned}\right.$$

Le théorème fondamental, qui donne la résolution générale du problème (C) [§ 19] peut être énoncé, comme il suit:

Théorème IV. On peut construire les substitutions différentielles $U_1,\ldots U_m$ d'une matrice régulière normale $\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$ qui sont des fonctions analytiques uniformes des substitutions exposantes $W_1,\ldots,W_m$, dont les singularités correspondent aux valeurs des substitutions $W_1,\ldots,W_m$ aux différences entières des nombres caractéristiques distincts. Pour tous les autres systèmes des substitutions exposantes les fonctions considerées sont représentables par les expressions:

$$(96)\qquad U_i=\lim_{s\to\infty}\overset{s}{U}_j=W_j+\sum_{s=0}^{\infty}[\overset{s+1}{U}_j-\overset{s}{U}_j],$$

où

$$
(97)\quad \left\{\begin{array}{l}
\overset{0}{U}_j = W_j \\
\overset{1}{U}_j = \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} \overset{0}{U}_1, \ldots, \overset{0}{U}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} b \Big) W_j \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} \overset{0}{U}_1, \ldots, \overset{0}{U}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} b \Big)^{-1} \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
\overset{s+1}{U}_j = \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} \overset{s}{U}_1, \ldots, \overset{s}{U}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} b \Big) W_j \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} \overset{s}{U}_1, \ldots, \overset{s}{U}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} b \Big)^{-1}; \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{array}\right.
$$

Il est presque évident, que les substitutions cherchées $U_1, \ldots U_m$ n'existent pas, si quelques différences des nombres caractéristiques distincts d'une ou de plusieures substitutions du système $W_1, \ldots, W_m$ sont entières. Soit, en effet, W_j une telle substitution. Les différences des nombres caractéristiques distincts de la substitution correspondante U_j doivent être non entières,, car dans le cas contraire la matrice régulière normale

$$\Phi_b \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right)$$

n'admettait pas de substitution exposante en point a_j [§ 17]. On peut former alors les matrices

$$\overline{\Theta}_j \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| b \right) \text{ et } \overline{\Theta}_j \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| b \right)^{-1}$$

et la substitution U_j, en vertu de la relation (57) [§ 17], serait semblable à la substitution W_j, ce qui se réduit à une contradiction.

Etant donné un système des substitutions $W_1, \ldots, W_m$ aux différences non entières des nombres caractéristiques distincts, toutes lés substitutions: $\overset{s}{U}_j$ $(s = 1, 2 \ldots)$ sont semblables à la substitution W_j et chaque substitution $\overset{s}{U}_j$ se trouve ainsi bien définie à l'aide des fonctions (90). Si les limites

$$(98)\qquad \lim_{s \to \infty} \overset{s}{U}_j$$

existent, la substitution U_j est de même semblable à la substitution W_j et la relation (97) donne les équations:

$$U_j = \overline{\Theta}_j \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| b \right) W_j \overline{\Theta}_j \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| b \right)^{-1},$$

qui sont équivalentes aux équations (57) [§ 17]. Donc, la représentation (96) sera vérifiée, si nous démontrerons l'existence des limites (98). Avant d'aborder cette démonstration, nous examinerons le caractère des approximations successives du théorème IV dans le cas déjà connu, où les substitutions exposantes se trouvent dans un voisinage de la substitution nulle. On a alors les développements:

$$\overline{\Theta}_j\begin{pmatrix} \overset{s-1}{U_1}\dots\overset{s-1}{U_m} \\ a_1\dots a_m \end{pmatrix}\Big| b\Big) = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \dots j_\nu}^{(1,2,\dots m)} W_{j_1} W_{j_2}\dots W_{j_\nu} \overset{s}{\overline{M}}_j (a_{j_1}\dots a_{j_\nu} \mid b),$$

$$\overline{\Theta}_j\begin{pmatrix} \overset{s-1}{U_1}\dots\overset{s-1}{U_m} \\ a_1\dots a_m \end{pmatrix}\Big| b\Big)^{-1} = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \dots j_\nu}^{(1,2,\dots m)} W_{j_1} W_{j_2}\dots W_{j_\nu} \overset{* s}{\overline{M}}_j a_{j_1}\dots a_{j_\nu} \mid b).$$

$$\overset{s}{U}_j = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \dots j_\nu}^{(1,2,\dots m)} W_{j_1} W_{j_2}\dots W_{j_\nu} \overset{s}{R}{}_b^{(j)} (a_{j_1}\dots a_{j_\nu}), \tag{99}$$

où les coefficients sont définis par les relations de récurrence:

$$\overset{s}{R}{}_b^{(j)}(a_j) = 1;\ \overset{s}{R}{}_b^{(j)}(a_{j_1}) = 0 \text{ si } j_1 \neq j,$$

$$\overset{1}{\overline{M}}_j (a_{j_1}\dots a_{j_\nu} \mid b) = \overline{N}_j (a_j\dots a_{j_\nu} \mid b);$$

$$\overset{*1}{\overline{M}}_j (a_j\dots a_{j_\nu} \mid b) = \overset{*}{\overline{N}}_j (a_j\dots a_{j_\nu} \mid b);$$

$$\overset{1}{R}{}_b^{(j)} (a_{j_1}\dots a_{j_\nu}) =$$

$$= \sum_{1\leqq \varkappa \leqq \nu} \overset{1}{\overline{M}}_j (a_{j_1}\dots a_{j_{\varkappa-1}} \mid b)\, E_j(a_{j_\varkappa})\, \overset{*1}{\overline{M}}_j (a_{j_{\varkappa+1}}\dots a_{j_\nu} \mid b);$$

. . . .

$$(100)\ \left\{\begin{aligned}
&\overset{s+1}{\overline{M}}_j (a_{j_1}\dots a_{j_\nu} \mid b) = \\
&= \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{h_1 h_2 \dots h_\mu}^{(1,2,\dots m)} \sum_{1\leqq \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \overset{s}{R}{}_b^{(h_1)} (a_{j_1}\dots a_{j_{\varkappa_1}})\, \overset{s}{R}{}_b^{(h_2)} (a_{j_{\varkappa_1+1}}\dots a_{j_{\varkappa_2}})\dots \\
&\qquad \dots \overset{s}{R}{}_b^{(h_\mu)} (a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\dots a_{j_\nu})\, \overline{N}_j (a_{h_1} a_{h_2}\dots a_{h_\mu} \mid b); \\
&\overset{*s+1}{\overline{M}}_j (a_j\dots a_{j_\nu} \mid b) = \\
&= \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{h_1 h_2 \dots h_\mu}^{(1,2,\dots m)} \sum_{1\leqq \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \overset{s}{R}{}_b^{(h_1)} (a_{j_1} a\dots{}_{j_{\varkappa_1}})\, \overset{s}{R}{}_b^{(h_2)} (a_{j_{\varkappa_1+1}}\dots a_{j_{\varkappa_2}})\dots \\
&\qquad \dots \overset{s}{R}{}_b^{(h_\mu)} (a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\dots a_{j_\nu})\, \overset{*}{\overline{N}}_j (a_{h_1} a_{h_2}\dots a_{h_\mu} \mid b); \\
&\overset{s+1}{R}{}_b^{(j)} (a_{j_1}\dots a_{j_\nu}) = \sum_{1\leqq \varkappa \leqq \nu} \overset{s+1}{\overline{M}}_j (a_{j_1}\dots a_{j_{\varkappa-1}} \mid b)\, E_j(a_{j_\varkappa})\, \overset{* s+1}{\overline{M}}_j (a_{j_{\varkappa+1}}\dots a_{j_\nu} \mid b),
\end{aligned}\right.$$

où

$$E_j(a_j) = 1; \; E_j(a_{j_1}) = 0 \text{ si } j_1 \neq j$$

Il suit de ces formules, que

$$\overset{1}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \mid b) = \overset{2}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \mid b) = \ldots = \overline{M}_j(a_{j_1} \mid b)$$

$$\overset{*1}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \mid b) = \overset{*2}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \mid b) = \ldots = \overset{*}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \mid b)$$

$$\overset{1}{R}{}_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \mid b) = \overset{2}{R}{}_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2}) = \ldots = R_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2}).$$

En supposant, que les formules:

$$(101) \quad \begin{cases} \overset{s}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}) = \overset{*s+1}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}) = \ldots = \overline{M}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}) \\ \overset{*s}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}) = \overset{*s+1}{\overline{M}}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}) = \ldots = \overline{M}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_s}) \end{cases}$$

et, par suite, les formules:

$$\overset{s}{R}{}_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{s+1}}) = \overset{s+1}{R}{}_b^{(j)}(a_j \ldots a_{j_{s+1}}) = \ldots = R_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{s+1}}),$$

où

$$\overline{M}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b), \; \overset{*}{\overline{M}}_j(a_j \ldots a_{j_\nu} \mid) \text{ et } R_b^{(j)}(a_j \ldots a_{j_\nu})$$

sont les coefficient des développements (72), (73) et (64) [§ 19], ont lieu pour toutes les valeurs de l'indice $s \leq \sigma$, et en tenant compte des relations de récurrence (100) on voit, que ces formules subsistent encore pour $s = \sigma + 1$. Donc, les formules (101) sont valables pour toutes les valeurs de l'ndice s. En comparant les développement (100) et (64) [§ 19], on conclut, que les termes contenant les compositions de $1, 2, \ldots s+1$ substitutions du développement de la s-ième approximation $\overset{s}{U}_j$, suivant les substitutions exposantes, sont identiques aux termes correspondant du développement de la substitution cherchée U_j, de sorte que

$$U_j - \overset{s}{U}_j = \sum_{\nu = s+2}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)} W_{j_1} W_{j_2} \ldots W_{j_\nu} [R_b^{(j)}(a_j \ldots a_{j_\nu}) - \overset{s}{R}{}_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu})].$$

§ 24. En passant à la démonstration de l'existence des limites (98) [§ 23], nous supposerons d'abord, que la configuration des points singuliers $a_1, a_2, \ldots a_m$ jouit de la propriété suivante: il existe un domaine sur la surface universelle $\mathfrak{S}(a_1 \ldots a_m, \infty)$, dont tous les points intérieurs b satisfont aux inégalités:

$$(102) \qquad |b - a_i| < |a_h - a_j| \; ; \; j = 1, 2, \ldots m$$
$$h = 1, \ldots j-1, j+1 \ldots m.$$

Considérons les matrices:

$$(103)\quad \left\{\begin{aligned}
&\overset{0}{T}_j = \mathrm{I};\ \overset{0}{\overline{U}}_j = W_j\\
&\overset{1}{T}_j = \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}\overset{0}{\overline{U}}_1,\dots,\overset{0}{\overline{U}}_m\\ a_1,\dots,a_m\end{matrix}\,\middle|\, b_j\right)\\
&\overset{1}{\overline{U}}_j = \overset{1}{T}_j\, W_j\, \overset{1}{T}{}_j^{-1}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\overset{s+1}{T}_j = \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}\overset{s}{\overline{U}}_1,\dots,\overset{s}{\overline{U}}_m\\ a_1,\dots,a_m\end{matrix}\,\middle|\, b_j\right)\\
&\overset{s+1}{\overline{U}}_j = \overset{s+1}{T}_j\, W_j\, \overset{s+1}{T}{}_i^{-1}\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.$$

Toutes ces matrices sont des fonctions holomorphes des paramètres $b_1, b_2, \dots b_m$ à l'intérieur du domaine

$$(104)\quad |\, b_j - a_j \,| < |\, a_h - a_j \,|\,;\ h = 1, \dots j-1, j+1 \dots m \qquad j = 1, 2, \dots m$$

de l'éspace complexe à m dimensions, pourvu que les différences des nombres caractéristiques distincts des substitutions $W_1, \dots W_m$ ne soient pas entières. En effet, la proposition étant vraie pour $s = 1$, supposons qu'elle *a* lieu pour $s = \sigma$.

En tenant compte des formules (103) on trouve:

$$(105)\quad \left\{\begin{aligned}
&\overset{\sigma+1}{T}_j = \overset{\sigma}{T}_j\,\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}\overset{\sigma}{T}{}_j^{-1}\,\overset{\sigma}{\overline{U}}_1\,\overset{\sigma}{T}_j, \dots, W_j, \dots, \overset{\sigma}{T}{}_j^{-1}\,\overset{\sigma}{\overline{U}}_m\,\overset{\sigma}{T}_j\\ a_1 \quad, \dots, \quad a_j, \dots, \quad a_m\end{matrix}\,\middle|\, b_j\right)\overset{\sigma}{T}{}_j^{-1}\\
&\overset{\sigma+1}{T}{}_j^{-1} = \overset{\sigma}{T}_j\,\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}\overset{\sigma}{T}{}_j^{-1}\,\overset{\sigma}{\overline{U}}_1\,\overset{\sigma}{T}_j, \dots, W_j, \dots, \overset{\sigma}{T}{}_j^{-1}\,\overset{\sigma}{\overline{U}}_m\,\overset{\sigma}{T}_j\\ a_1 \quad, \dots, \quad a_j, \dots, \quad a_m\end{matrix}\,\middle|\, b_j\right)^{-1}\overset{\sigma}{T}{}_j^{-1}\text{*)}.
\end{aligned}\right.$$

---

*) En remarquant, que la matrice $\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}X_1\dots X_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$ représente la matrice intégrale du système

$$\frac{d\overline{\Theta}_j}{dx} = \sum_{h=1}^{m}\frac{\overline{\Theta}_j X_h}{x-a_h} - \frac{X_j\,\overline{\Theta}_h}{x-a_j}$$

se réduisant à I pour $x = a_j$, on *a* la relation

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}X_1\dots X_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = A\,\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}A^{-1}X_1A_1\dots A^{-1}X_mA\\ a_1 \quad \dots \quad a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)A^{-1},$$

où A est une substitution arbitraire, indépendante de x.

Les matrices $\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b_j\right)$, $\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b_j\right)^{-1}$ étant des fonctions entières par rapport aux substitutions $X_1,\ldots X_{j-1}, X_{j+1},\ldots X_m$ [§ 12], il résulte des relations (105) que les matrices $\overset{\sigma+1}{T}_j$, $\overset{\sigma+1}{T}_j{}^{-1}$ $\overset{\sigma+1}{U}_i$ sont encore holomorphes par rapport aux paramètres $b_1,\ldots b_m$ à l'intérieur du domaine (104).

Donc, á l'intérieur du domaine indiqué on a les développements de la forme:

$$\overset{s}{T}_j = \sum_{r_1,\ldots r_m=0}^{\infty} \overset{s}{D}_j[r_1,\ldots,r_m]\cdot(b_1-a_1)^{r_1}\ldots b_m-a_m)^{r_m} \tag{106}$$

$$\overset{s}{T}_j{}^{-1} = \sum_{r_1,\ldots,r_m=0}^{\infty} \overset{*s}{D}_j[r_1,\ldots,r_m]\cdot(b_1-a_1)^{r_1}\ldots(b_m-a_m)^{r_m} \tag{107}$$

$$\overset{s}{\overline{U}}_j = \sum_{r_1,\ldots,r_m=0}^{\infty} \overset{s}{E}_j[r_1,\ldots,r_m]\cdot(b_1-a_1)^{r_1}\ldots(b_m-a_m)^{r_m}, \tag{108}$$

où

$$\overset{s}{D}_j[r_1,\ldots,r_m];\ \overset{*s}{D}_j\ [r_1,\ldots,r_m],\ \overset{s}{E}_j\ [a_1,\ldots,r_m]$$

sont les matrices ne dependant que des substitutions $W_1,\ldots W_m$ et des points $a_1\ldots a_m$.

En vertu de la condition concernant les points $a_1,\ldots a_m$, mentionnée ci-dessus, les développements (106), (107) et (108) représentent les matrices réspectivement

$$\overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix}\overset{s-1}{U_1},\ldots,\overset{s-1}{U_m}\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right),\ \overline{\Theta}\left(\begin{matrix}\overset{s-1}{U_1},\ldots,\overset{s-1}{U_m}\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle| b\right),\ \overset{s}{U}_j,$$

si l'on pose

$$b_1 = b_2 = \cdot = b_m = b,$$

pourvu que le point b soit à l'intérieur du domaine (102).

Conformement aux formules (103) on a:

$$(109) \qquad \overset{s}{D}_j\,[0,\ldots,0] = \overset{*s}{D}_j\,[0,\ldots,0] = I;\ \overset{s}{E}_j\,[0,\ldots,0] = W_j,$$

$s = 0,\ 1,\ 2,\ldots$

$$\overset{0}{E}_j\,[r_1,\ldots,r_m] = 0 \text{ si } r_1 + \ldots + r_m > 0.$$

Dans le cas général, le calcul des coefficients des séries (106)—(108) se fait à l'aide des formules (93), [§ 23] et (103). Il suit de ces formules, que

$$\overset{s+1}{T}_j = \sum_{r=0}^{\infty} A_j^{(r)} \begin{pmatrix} \overset{s}{\overline{U}}_1,\ldots,\overset{s}{\overline{U}}_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} (b_j - a_j)^r$$

$$\overset{s+1}{T}{}_j^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \overset{*}{A}{}_j^{(r)} \begin{pmatrix} \overset{s}{\overline{U}}_1,\ldots,\overset{s}{\overline{U}}_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} (b_j - a_j)^r.$$

Les matrices $A_j^{(r)} \begin{pmatrix} \overset{s}{\overline{U}}_1,\ldots,\overset{s}{\overline{U}}_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix}$ et $\overset{*}{A}{}_j^{(r)} \begin{pmatrix} \overset{s}{\overline{U}}_1,\ldots,\overset{s}{\overline{U}}_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix}$ sont évidemment les fonctions des paramètres $b_1,\ldots,b_m$, holomorphes à l'intérieur du domaine (104):

$$A_j^{(r)} \begin{pmatrix} \overset{s}{\overline{U}}_1,\ldots,\overset{s}{\overline{U}}_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} = \sum_{r_1,\ldots r_m=0}^{\infty} \overset{s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m]\,(b_1 - a_1)^{r_1}\ldots(b_m - a_m)^{r_m}$$

$$\overset{*}{A}{}_j^{(r)} \begin{pmatrix} \overset{s}{\overline{U}}_1,\ldots,\overset{s}{\overline{U}}_m \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix} = \sum_{r_1,\ldots r_m=0}^{\infty} \overset{*s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m]\,(b_1 - a_1)^{r_1}\ldots(b_m - a_m)^{r_m}$$

et on a:

$$(110) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overset{s}{D}_j\,[r_1,\ldots,r_j,\ldots,r_m] &= \sum_{\rho=0}^{r_j} \overset{s}{C}{}_j^{(\rho)}\,[r_1,\ldots,r_j - \rho,\ldots,r_m] \\ \overset{*r}{D}_j\,[r_1,\ldots,r_j,\ldots,r_m] &= \sum_{\rho=0}^{r_j} \overset{*s}{C}{}_j^{(\rho)}\,[r_1,\ldots,r_j - \rho,\ldots,r_m]. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant dans les relations de récurrence (93) les substitutions $X_1,\ldots X_m$ par les séries (108) et en comparant les coefficients d'après les mêmes puissances des binomes $b_1 - a_1, \dots b_m - a_m$, on reçoit les relations:

$$\overset{s+1}{C}{}_j^{(0)}\,[r_1,\dots,r_m] = \overset{*s+1}{C}{}_j^{(0)}\,[r_1,\dots,r_m] = \begin{cases} \mathrm{I} \text{ pour } r_1 = \dots = r_m = 0 \\ 0 \text{ en tous autres cas} \end{cases}$$

$$W_j \overset{s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\dots,r_m] + r\,\overset{s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\dots,r_m] - \overset{s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\dots,r_m]\,W_j =$$

$$(111) \quad = - \sum_{\substack{\rho_1 \leq r_1 \dots \rho_m \leq r_m \\ \rho_1+\dots+\rho_m \geq 1}} (\overset{s}{E}_j[\rho_1,\dots,\rho_m]\,\overset{s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1-\rho_1,\dots,r_m-\rho_m] -$$

$$- \overset{s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1-\rho_1,\dots,r_m-\rho_m]\,\overset{s}{E}_j\,[\rho_1,\dots,\rho_m]) -$$

$$- \sum_{h =/= j} \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{\rho_1=0}^{r_1} \dots \sum_{\rho_m=0}^{r_m} \overset{s+1}{C}{}_j^{(\rho)}\,[\rho_1,\dots,\rho_m] \times$$

$$\times \overset{s}{E}_h\,[r_1-\rho_1,\dots,r_m-\rho_m]\,\frac{\mathrm{I}}{(a_h-a_j)^{r-\rho}};$$

$$W_j \overset{*s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\dots,r_m] + r\,\overset{*s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\dots,r_m] - \overset{*s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\dots,r_m]\,W_j =$$

$$= - \sum_{\substack{\rho_1 \leq r_1,\dots \rho_m \leq r_m \\ \rho_1+\dots+\rho_m \geq 1}} (\overset{s}{E}_j\,[\rho_1,\dots,\rho_m]\,\overset{*s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1-\rho_1,\dots,r_m-\rho_m] -$$

$$- \overset{*s+1}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1-\rho_1,\dots,r_m-\rho_m]\,\overset{s}{E}_j\,[\rho_1,\dots,\rho_m]) +$$

$$+ \sum_{h = /= j} \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{\rho_1=0}^{r_1} \dots \sum_{\rho_m=0}^{r_m} \overset{s}{E}_h\,[r_1-\rho_1,\dots,r_m-\rho_m] \times$$

$$\times \overset{*s+1}{C}{}_j^{(\rho)}\,[\rho_1,\dots,\rho_m]\,\frac{\mathrm{I}}{(a_h-a)^{r-\rho}}.$$

Enfin, les formules (103) donnent:

$$(112) \quad \overset{s}{E}_j\,[r_1,\dots,r_m] = \sum_{\rho_1=0}^{r_1} \dots \sum_{\rho_m=0}^{r_m} \overset{s}{D}_j\,[\rho_1,\dots,\rho_m]\,W_j \overset{*s}{D}\,[r_1-\rho_1,\dots,r_m-\rho_m].$$

Les formules (109), (110), (111) et (112) nous fournissent les relations de récurrences qui déterminent consécutivement tous les coefficients

$$\overset{s}{E}_j\,[r,\dots,r_m],\ \overset{s}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\dots,r_m],\ D_j\,[r_1,\dots,r_m], \overset{*s}{D}\,[r_1,\dots,r_m],$$

comme fonctions rationnelles des substitutions $W_1, \dots, W_m$ et des points $a_1, \dots, a_m$, pourvu que les différences des nombres caractéristiques distincts de ces substitutions ne soient pas entières.

Il suit des relations (111) que

$$\overset{1}{C}{}_j^{(r)}[0,\dots,0]=\overset{2}{C}{}_j^{(r)}[0,\dots,0]=\dots=C_j^{(r)}[0,\dots,0]$$

$$\overset{*1}{C}{}_j^{(r)}[0,\dots,0]=\overset{*2}{C}{}_j^{(r)}[0,\dots,0]=\dots=\overset{*}{C}{}_j^{(r)}[0,\dots,0].$$

Par suite, en vertu des formules (110) et (112),

$$\underset{r_1+\dots+r_m=1}{\overset{1}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\underset{r_1+\dots+r_m=1}{\overset{2}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\dots=\underset{r_1+\dots+r_m=1}{D_j[r_1,\dots,r_m]}$$

$$\underset{r_1+\dots+r_m=1}{\overset{*1}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\underset{r_1+\dots+r_m=1}{\overset{*2}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\dots=\underset{r_1+\dots+r_m=1}{\overset{*}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}$$

$$\underset{r_1+\dots+r_m=1}{\overset{1}{E}{}_j[r_1\dots r_m]}=\underset{r_1+\dots+r_m=1}{\overset{2}{E}{}_j[r_1\dots r_m]}=\dots=\underset{r_1+\dots+r_m=1}{\overset{*}{E}{}_j[r_1,\dots,r_m]}.$$

Supposons, que les formules:

$$(113)\left\{\begin{array}{l}
\underset{r_1+\dots+r_m=s-1}{\overset{s}{C}{}_j^{(r)}[r_1,\dots,r_m]}=\underset{r_1+\dots+r_m=s-1}{\overset{s+1}{C}{}_j^{(r)}[r_1,\dots,r_m]}=\dots=\underset{r_1+\dots+r_m=s-1}{C_j^{(r)}[r_1,\dots,r_m]}\\
\underset{r_1+\dots+r_{1m}=s-1}{\overset{*s}{C}{}_j^{(r)}[r_1,\dots,r_m]}=\underset{r_1+\dots+r_m=s-1}{\overset{*s+1}{C}{}_j^{(r)}[r_1,\dots,r_m]}=\dots=\underset{r_1+\dots+r_m=s-1}{\overset{*}{C}{}_j^{(r)}[r_1,\dots,r_m]}\\
\qquad\qquad(r=0,\ 1,\ 2\dots)\\
\underset{r_1+\dots+r_m=s}{\overset{s}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\underset{r_1+\dots+r_m=s}{\overset{s+1}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\dots=\underset{r_1+\dots+r_m=s}{\overset{s}{D}{}_j[r,\dots,r_m]}\\
\underset{r_1+\dots+r_m=s}{\overset{*s}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\underset{r_1+\dots+r_m=s}{\overset{*s+1}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\dots=\underset{r_1+\dots+r_m=s}{\overset{*}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m]}\\
\underset{r_1+\dots+r_m=s}{\overset{s}{E}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\underset{r_1+\dots+r_m=s}{\overset{s+1}{E}{}_j[r_1,\dots,r_m]}=\dots=\underset{r_1+\dots+r_m=s}{E_j[r_1\dots r_m]}
\end{array}\right.$$

ont lieu pour les valeurs de l'indice $s=1,\ 2,\dots,\sigma$.

En vertu des rélations (111), (110) et (112) on conclut alors, que ces formules subsistent encore pour $s=\sigma+1$. Donc, les formules (113) sont valables pour toutes valeurs des indices $s=1,\ 2,\ 3,\dots$ et déterminent ainsi les matrices

$$D_j[r_1,\dots,r_m],\ \overset{*}{D}{}_j[r_1,\dots,r_m],\ C_j^{(r)}[r_1,\dots,r_m],\ \overset{*}{C}{}_j^{(r)}[r_1,\dots,r_m],\ E_j[r_1,\dots,r_m].$$

Si l'on pose:

$$E_j\,[0,\ldots,0] = W_j$$

$$C_j^{(0)}\,[r_1,\ldots,r_m] = \overset{*}{C}{}_j^{(0)}\,[r_1\ldots,r_m] = \begin{cases} 1 \text{ pour } r_1 = \ldots = r_m = 0 \\ 0 \text{ en tous autres cas,} \end{cases}$$

les matrices:

$$E_j\,[r_1\ldots,r_m],\ C_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m],\ \overset{*}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m],$$

$$D_j\,[r_1,\ldots,r_m],\ \overset{*}{D}_j\,[r_1,\ldots,r_m]$$

se trouvent déterminées par les relations de récurrence:

$$(114)\quad W_j C_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m] + r\,C_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m] - C_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m]\ W_j =$$

$$= - \sum_{\substack{\rho_1 \leqq r_1 \ldots \rho_m \leqq r_m \\ \rho_1+\ldots+\rho_m \geqq 1}} \Big(E_j\,[\rho_1,\ldots,\rho_m]\ C_j^{(r)}\,[r_1-\rho_1,\ldots,r_m-\rho_m] -$$

$$- C_j^{(r)}\,[r_1-\rho_1,\ldots,r_m-\rho_m]\ E_j\,[\rho_1,\ldots,\rho_m]\Big) -$$

$$- \sum_{h=|=j} \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{\rho_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{\rho_m=0}^{r_m} C_j^{(\rho)}\,[\rho_1,\ldots,\rho_m]\ E_h\,[r-\rho_1,\ldots,r_m-\rho_m]\ \frac{1}{(a_h-a_j)^{r-\rho}};$$

$$W_j \overset{*}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m] + r\,\overset{*}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m] - \overset{*}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1,\ldots,r_m]\ W_j =$$

$$= - \sum_{\substack{\rho_1 \leqq r_1,\ \rho_m \leqq r_m \\ \rho_1+\ldots+\rho_m \geqq 1}} \Big(E_j\,[\rho_1,\ldots,\rho_m]\ \overset{*}{C}{}_j^{(r)}[r_1-\rho_1,\ldots,r_m-\rho_m] -$$

$$- \overset{*}{C}{}_j^{(r)}\,[r_1-\rho_1,\ldots,r_m-\rho_m]\ E_j\,[\rho_1,\ldots,\rho_m]\Big) +$$

$$+ \sum_{h=|=j} \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{\rho_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{m=0}^{r_m} E_h\,[r-\rho_1,\ldots,r_m-\rho_m]\ \overset{*}{C}{}_j^{(\rho)}[\rho_1,\ldots,\rho_m]\ \frac{1}{(a_h-a_j)^{r-\rho}};$$

$$D_j\,[r_1,\ldots,r_j,\ldots,r_m] = \sum_{\rho=0}^{r_j} C_j^{(\rho)}\,[r_1,\ldots,r_j-\rho,\ldots,r_m]$$

$$\overset{*}{D}_j\,[r_1,\ldots,r_j,\ldots,r_m] = \sum_{\rho=0}^{r_j} \overset{*}{C}{}_j^{(\rho)}\,[r_1,\ldots r^j-\rho,\ldots,r_m]$$

$$E_j\,[r_1,\ldots,r_m] = \sum_{\rho_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{\rho_m=0}^{r_m} D_j\,[\rho_1,\ldots,\rho_m]\ W_j\ \overset{*}{D}_j\,[r_1-\rho_1,\ r_m-\rho_m]$$

Les coefficients $D_j[r_1,\ldots,r_m]$ et $\overset{*}{D}_j[r_1,\ldots,r_m]$ sont ainsi bien définies, comme fonctions rationnelles des substitutions $W_1,\ldots,W_m$ et des points $a_1,\ldots,a_m$, pourvu que les différences des nombres caractéristiques distincts de ces substitutions ne soient pas entières. En faisant les évaluations de ces coefficients, on conclut, que les séries:

$$T_j=\sum_{r_1,\ldots,r_m=0}^{\infty} D_j[r_1,\ldots,r_m]\ (b_1-a_1)^{r_1}\ldots(b_m-a_m)^{r_m}$$

$$T_j^{-1}=\sum_{r_1,\ldots,r_m=0}^{\infty} \overset{*}{D}_j[r_1,\ldots,r_m]\ (b_1-a_1)^{r_1}\ldots(b_m-a_m)^{r_m}$$

représentent les fonctions holomorphes des paramètres b_1, b_2, b_m dans le domaine (104). Des mêmes évaluations on déduit que les différences:

$$T_j-\overset{s}{T}_j=$$

$$=\sum_{r_1+\ldots+r_m=s+1}^{\infty}\left\{D_j[r_1,\ldots,r_m]-\overset{s}{D}_j[r_1,\ldots,r_m]\right\}(b_1-a_1)^{r_1}\ldots(b_m-a_m)^{r_m}$$

$$T_j^{-1}-\overset{s}{T}{}_j^{-1}=$$

$$=\sum_{r_1+\ldots+r_m=s+1}^{\infty}\left\{\overset{*}{D}_j[r,\ldots,r_m]-\overset{*s}{D}_j[r,\ldots,r_m]\right\}(b_1-a_1)^{r_1}\ldots(b_m-a_m)^{r_m}$$

tendent vers zéro, quand s augmente indéfiniment. Cela démontre le théorème IV dans le cas, où la configuration des points singuliers satisfait à la condition mentionnée au commencement de ce paragraphe. Les relations de récurrence (114) donnent évidemment, en outre, la méthode simple du calcul numérique des substitutions cherchées.

En passant au cas général d'une configuration arbitraire des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$, nous fixons les points arbitraires $b_1, b_2, \ldots, b_m$, distincts des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, et nous marquons sur les chemins $(a_j\, b_j)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ les points intermédiaires $\overset{0}{c}_j, \ldots, \overset{\lambda-1}{c}_j$, $\overset{\lambda}{c}_j=b_j$, afin que les matrices

$$\Theta_j\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix}b_j\Bigg),\ \Theta_j\begin{pmatrix}X_1,\ldots,X_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{pmatrix}b_j\Bigg)^{-1}$$

se calculent à l'aide des formules (94). Comme dans le cas précédent, on reçoit les développements des matrices (103):

$$(115)\left\{\begin{aligned}
\overset{s}{T}_j &= \sum_{\substack{r_1+\dots+r_m+\\ +\overset{0}{r}_1+\dots+\overset{\lambda}{r}_m=0}}^{\infty} \overset{s}{D}_j[r_1,\dots,r_m,\overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m,\dots,\overset{\lambda}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m]\times\\
&\qquad\times \lg^{r_1}\frac{\overset{0}{c}_1-a_1}{\overset{\lambda}{c}_1-a_1}\dots\lg^{r_m}\frac{\overset{0}{c}_m-a_m}{\overset{\lambda}{c}_m-a_m}\times\\
&\times(\overset{0}{c}_1-a_1)^{\overset{0}{r}_1}\dots(\overset{0}{c}_m-a_m)^{\overset{0}{r}_m}\dots(\overset{\lambda}{c}_1-\overset{\lambda-1}{c}_1)^{\overset{\lambda}{r}_1}\dots(\overset{\lambda}{c}_m-\overset{\lambda-1}{c}_m)^{\overset{\lambda}{r}_m},\\
\overset{s}{T}{}_j^{-1} &= \sum_{\substack{r_1+\dots+r_m+\\ +\overset{0}{r}_1+\dots+\overset{\lambda}{r}_m=0}}^{\infty} \overset{*s}{D}_j[r_1,\dots,r_m,\overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m,\dots,\overset{\lambda_1}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m]\times\\
&\qquad\times \lg^{r_1}\frac{\overset{0}{c}_1-a_1}{\overset{\lambda}{c}_1-a_1}\dots\lg^{r_m}\frac{\overset{0}{c}_m-a_m}{\overset{\lambda}{c}_m-a_m}\times\\
&\times(\overset{0}{c}_1-a_1)^{\overset{0}{r}_1}\dots(\overset{0}{c}_m-a_m)^{\overset{0}{r}_m}\dots(\overset{\lambda}{c}_1-\overset{\lambda-1}{c}_1)^{\overset{\lambda}{r}_1}\dots(\overset{\lambda}{c}_m-\overset{\lambda-1}{c}_m)^{\overset{\lambda}{r}_m},
\end{aligned}\right.$$

où les coefficients sont déterminés comme fonctions rationnelles des substitutions $W_1,\dots, W_m$ et des points $a_1\dots a_m$, $\overset{0}{c}_1\dots\overset{0}{c}_m,\dots,\overset{\lambda-1}{c}_1\dots\overset{\lambda-1}{c}_m$ pour toutes les valeurs de ces substitutions aux différences non entières des nombres caractéristiques distincts. On obtient aisement les relations de récurrence correspondant, en se servant des formules (93), (95) et (103). Les développements (115) sont convergentes aux conditions:

$$(116)\left\{\begin{aligned}
&|\overset{0}{c}_j-a_j|<|a_h-a_j|;\quad h=1\dots j-1,\ j+1,\dots,m\\
&|\overset{1}{c}_j-\overset{0}{c}_j|<|\overset{0}{c}_j-a_h|;\quad h=1,\ 2,\dots,m\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&|\overset{\lambda}{c}_j-\overset{\lambda-1}{c}_j|<|\overset{\lambda-1}{c}_j-a_h|;\quad h=1,\ 2,\dots,m.
\end{aligned}\right.$$

Les coefficients satisfont aux relations:

$$\begin{aligned}
&\overset{s}{D}_j[r_1,\dots,r_m,\ \overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m,\ \overset{\lambda}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m]=\\
&\qquad\qquad=\overset{s+1}{D}_j[r_1,\dots,r_m,\ \overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m,\ \overset{\lambda}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m]=\\
&\qquad=\dots=D_j[r_1,\dots,r_m,\ \overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m,\ \overset{\lambda}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m]\times\\
&\times\overset{*s}{D}_j[r_1,\dots,r_m,\ \overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m,\ \overset{\lambda}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m]=\\
&\qquad\qquad=\overset{*s+1}{D}_j[r_1,\dots,r_m,\overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m.\ \overset{\lambda}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m]=\\
&\qquad=\dots=\overset{*}{D}_j[r_1,\dots,r_m,\ \overset{0}{r}_1,\dots,r_m,\ \overset{\lambda}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m]
\end{aligned}$$

si $\quad r_1+\dots+r_m+\overset{0}{r}_1+\dots+\overset{0}{r}_m+\dots+\overset{\lambda}{r}_1+\dots+\overset{\lambda}{r}_m=s.$

En faisant les évaluations de ces coefficients on démontre la convergence des séries

$$T_j = \sum_{\substack{r_1+\dots+r_m+\\+\overset{0}{r}_1+\dots+\overset{\lambda}{r}_m=0}}^{\infty} D_j\,[r_1,\dots,r_m,\ \overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m,\ \overset{\lambda}{r}_1,\dots,\overset{\lambda}{r}_m] \times$$

$$\times \lg^{r_1} \frac{\overset{0}{c}_1-a_1}{\overset{\lambda}{c}_1-a_1} \dots \lg^{r_m} \frac{\overset{0}{c}_m-a_m}{\overset{\lambda}{c}_m-a_m} \times$$

$$\times (\overset{0}{c}_1-a_1)^{\overset{0}{r}_1} \dots (\overset{0}{c}_m-a_m)^{\overset{0}{r}_m} \dots (\overset{\lambda}{c}_1-\overset{\lambda-1}{c}_1)^{\overset{\lambda}{r}_1} \dots (\overset{\lambda}{c}_m-\overset{\lambda-1}{c}_m)^{\overset{\lambda}{r}_m}.$$

$$\overset{*}{T}_j = \sum_{\substack{r_1+\dots+r_m+\\+\overset{0}{r}_1+\dots+\overset{\lambda}{r}_m=0}}^{\infty} \overset{*}{D}_j\,[r_1,\dots,r_m,\ \overset{0}{r}_1,\dots,\overset{0}{r}_m,\ \overset{\lambda}{r}_0,\dots,\overset{\lambda}{r}_m] \times$$

$$\times \lg^{r_1} \frac{\overset{0}{c}_1-a_1}{\overset{\lambda}{c}_1-a_1} \dots \lg^{r_m} \frac{\overset{0}{c}_m-a_m}{\overset{\lambda}{c}_m-a_n} \times$$

$$\times (\overset{0}{c}_1-a_1)^{\overset{0}{r}_1} \dots (\overset{0}{c}_m-a_m)^{\overset{0}{r}_m} \dots (\overset{\lambda}{c}_1-\overset{\lambda-1}{c}_1)^{\overset{\lambda}{r}_1} \dots (\overset{\lambda}{c}_m-\overset{\lambda-1}{c}_m)^{\overset{\lambda}{r}_m}$$

aux conditions (116) et on établit que les différences:

$$T_j - \overset{s}{T}_j \text{ et } T_j^{-1} - \overset{s}{T}_j^{-1}$$

tendent vers zéro, quand s augmente indéfiniment.

En posant $b_1 = b_2 = \dots = b_m = b$, où b est un point arbitraire distinct des points $a_1, a_1, \dots, a_m$, on achève la déménstration du théorème IV.

§ 25. En se servant du théorème IV, on reçoit aisement le théorème V, concernant les matrices regulières normales et métacanoniques:

Théorème V. On peut construire les matrices régulières metacanoniques et normales qui sont les fonctions analytiques uniformes des substitutions exposantes, dont les singularités correspondent aux valeurs de ces substitutions aux différences entières des nombres caractéristiques distincts. Pour tous les autres systèmes des substitutions exposantes

$W_1, \ldots, W_m$ les fonctions considerées sont représentables sous forme:

$$(117) \quad \vartheta_j \begin{pmatrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| \, x \Big) = \lim_{s \to \infty} \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} \overset{s}{U}_1, \ldots, \overset{s}{U}_m \\ a_1 \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| \, x \Big) \quad (x - a_j)^{W_j}$$

$$(118) \quad \Psi_b \begin{pmatrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| \, x \Big) =$$

$$= \lim_{s \to \infty} \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} \overset{s}{U}_1, \ldots, \overset{s}{U}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| \, x \Big) \left(\frac{x - a_j}{b - a_j} \right)^{W_j} \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} \overset{s}{U}_1, \ldots, \overset{s}{U}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| \, b \Big)^{-1},$$

où les substitutions $\overset{s}{U}_j$ sont définies par les relations (97).

La démonstration est immediate. En passant à la limite dans les relations

$$\overset{s}{T}_j = \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} \overset{s-1}{U}_1, \ldots, \overset{s-1}{U}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| \, b \Big);$$

on reçoit:

$$T_j = \overline{\Theta}_j \begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| \, b \Big).$$

Les substitutions $U_1, \ldots, U_m$ étant, d'après le théorème IV, les substitutions différentielles d'une matrice regulière, normale en point b aux substitutions exposantes $W_1, \ldots, W_m$ en points $a_1, \ldots, a_m$, on a en vertu des relations (71) [§ 19]:

$$T_j = \overline{\vartheta} \begin{pmatrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \Big| \, b \Big).$$

Donc, conformement aux relations (79) et (78) on a les representations (117) et (118).

Les séries des compositions du théorème III sont évidemment les développements des fonctions des théorèmes IV et V dans un voisinage de la substitution nulle.

§ 26. Les substitutions intégrales $V_1, V_2, \ldots, V_i$ aux déterminants distincts de zéro, étant données arbitrairement, en passant du problème classique de Riemann (B) [§ 1] au problème (C) [§ 19], on peut toujours choisir les déterminations des logarithmes

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j$$

d'une telle façon, que les différences des nombres caractéristiques distincts des substitutions exposantes W_j ne soient pas entières. Toutes ces déterminations des logarithmes des substitutions intégrales donneront à l'aide de l'algorithme des théorèmes IV et V les solutions du problème classique de Riemann qui seront ainsi représentées comme fonctions analytiques uniformes des logarithmes des substitutions intégrales.

Алгоритмическое решение задач Poincaré и Riemann'a.

(*Статья вторая:* **Задача Riemann'a о построении регулярной системы линейных дифференциальных уравнений с данной группой монодромии).**

И. А. Лаппо-Данилевский.

Автор вводит понятие о показательных подставках

$$(*)\ldots \quad W_j = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j \quad (j = 1, 2, \ldots m)$$

регулярной матрицы $Y(x)$, где V_j — интегральные подстановки. Значения логарифмов при заданных дифференциальных подстановках определяются существованием представлений

$$Y(x) = (x - a_j)^{W_j}\, \overline{Y}_j(x),$$

где $\overline{Y}_j(x)$ и $\overline{Y}_j(x)^{-1}$ — матрицы голоморфные вблизи $x = a_j$. Классическая задача Riemann'a приводится к задаче о построении регулярной матрицы $Y(x)$ и ее дифференциальных подстановок U_j по заданным показательным подстановкам W_j. Автор дает решение последней задачи в виде однозначных аналитических функций от W_j, единственные особенности которых суть значения W_j с целыми разностями различных характеристических чисел. Последнее ограничение не влияет на общность решения классической задачи Riemann'a, так как при заданных V_j всегда можно выбрать подходящие значения логарифмов в формуле (*).

Sur la théorie des polynomes orthogonaux à une variable complexe.

Par *V. J. Smirnoff*.

§ 1. Soit Γ un contour simple fermé et rectifiable. Les polynomes orthogonaux correspondant:

$$P_n(x);\ (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

sont définis d'une façon unique par les deux proprietés suivantes:

1°. $P_n(x)$ est un polynome du dégré n, dont le coefficient de x^n est un nombre réel positif;

2°. Les conditions de l'orthogonalité et de la normalité sont satisfaites, c'est-à-dire:

$$\frac{1}{l}\int\limits_{\Gamma} P_n(x)\,\overline{P_m(x)}\,d\sigma=\varepsilon_{n,m};\ (\varepsilon_{n,m}=0 \text{ pour } n\neq m;\ \varepsilon_{nn}=1),$$

où l est la longueur du contour Γ, $d\sigma$ — l'élement de cette longueur et par $\bar{a}$ nous désignons le nombre complèxe, conjugué au nombre a.

La théorie des polynomes orthogonaux a été étudiée par M. Szegö dans son mémoire: „Ueber orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören" (Math. Zeitschr. Bd. 9; Heft $^3/_4$; 1921; p 227). Les citations suivantes de ce mémoire seront abregées par (Szegö, I). Dans le mémoire mentionné M. Szegö établit les proprietés fondamentales des polynomes orthogonaux, les théorèmes concernant les développements suivant ces polynomes et leur connexion au problème de la représentation conforme. Le but du mémoire présent et d'indiquer une methode nouvelle, qui fournit assez simplement les théorèmes des développements, les hypothèses concernant les fonctions développables et le contour Γ, étant plus générales que celles du mémoire de M. Szegö.

§ 2. Considérons d'abord le cas, où la courbe, donnant les polynomes orthogonaux est une circonférence C, dont le centre est en point $z=0$ et dont le rayon est égal à l'unité. Dans ce cas les polynomes orthogonaux sont de la forme:

$$1,\ z,\ z^2,\ldots,z^m,\ldots$$

Журн. Ленингр. Физ.-Мат. О-ва, т. II, в. 1 (1928).

Si une fonction $f(z)$, regulière à l'intérieur de la circonférence C admet presque partout sur C les valeurs limites $f(e^{i\theta})$ et s'exprime par ces valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Cauchy:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{z'=e^{i\theta}}\frac{f(e^{i\theta})}{z'-z}\,dz';\quad(|z|<1)$$

— la série de Maclaurin:

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s z^s;\quad(|z|<1)$$

présente en même temps la série de Fourier; c'est-à-dire:

$$(2)\qquad \alpha_s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{-si\theta}\,d\theta;\ (s=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Nous dirons que la fonction $f(z)$ appartient à la classe (H), si elle est regulière à l'intérieur de C, si elle admet presque partout sur C, suivant les chemins non tangents, les valeurs limites $f(e^{i\theta})$ et s'exprime par ces valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Cauchy, $|f(e^{i\theta})|^2$ étant une fonction sommable. On démontre aisement le théorème suivant:

Théorème I. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(z)$ appartienne à la classe (H) est présentée par la convergence de la série $\sum_{s=0}^{\infty}|\alpha_s|^2$. Cette condition étant satisfaite, on a la formule de la fermeture

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^2\,d\theta=\sum_{s=0}^{\infty}|\alpha_s|^2.$$

Les résultats de ce théorème sont connus, mais nous allons en donner la démonstration pour éviter l'encombrement de l'exposition par des citations trop nombreuses. Démontrons d'abord, que la condition du théorème est nécessaire. En introduisant les notations:
$f(z)=u(re^{i\theta})+iv(re^{i\theta})$; $(0\leq r<1)$; $f(e^{i\theta})=u(e^{i\theta})+iv(e^{i\theta})$, considérons les coefficients de Fourier pour les fonctions $u(e^{i\theta})$ et $v(e^{i\theta})$:

$$(4)\qquad \begin{aligned} a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(e^{i\theta})\,d\theta;\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(e^{i\theta})\operatorname{Cos}n\theta d\theta;\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(e^{i\theta})\operatorname{Sin}n\theta d\theta;\ c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}v(e^{i\theta})\,d\theta;\\ c_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}v(e^{i\theta})\operatorname{Cos}n\theta d\theta;\ d_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}v(e^{i\theta})\operatorname{Sin}n\theta d\theta.\end{aligned}$$

On sait, que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2}{2}$$

est convergente; d'un autre côté, en vertu des rélations (2), on a:

$$(5) \qquad \alpha_0 = a_0 + ic_0; \; \alpha_n = \frac{1}{2} [a_n + c_n + i(d_n - b_n)]; \; n = 1, 2, \ldots$$

d'où suit immediatement la convergence de la série $\sum_{s=0}^{\infty} | \alpha_s |^2$.

Réciproquement, si, à condition d'existence de la rélation (1), cette dernière série est convergente, les intégrales

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(re^{i\theta}) |^2 d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} | \alpha_s |^2 r^{2s} \quad (0 \leqq r < 1)$$

sont uniformement bornées pour toutes valeurs de r, satisfaisant à l'inégalité indiquée. De là suivent, comme il est bien connu, toutes les propriétés, caracterisant la classe des fonctions (H), ainsi que la formule (3). *).

R e m a r q u e I. Il resulte, entre autres, du théorème démontré que si $f(z)$, appartient à la classe (H) et $\chi(z)$, est une fonction bornée, regulière à l'intérieur de C, le produit $f(z) . \chi(z)$ appartient de même à la classe (H).

R e m a r q u e II. Si les deux fonctions

$$f_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s z^s \text{ et } f_2(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s z^s$$

appartiennent à la classe (H), on démontre aisement, en considérant la fonction $f_1(z) + \lambda f_2(z)$, la formule généralisée de la fermeture:

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} f_1(z) \overline{f_2(z)} \, d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \overline{\gamma}_s .$$

§ 3. Nous allons considérer dans ce paragraphe quelques propriétés de la fonction qui fait la représentation conforme du cercle K ($|z| < 1$) sur un domaine à un seul feuillet B, limité par un contour simple fermé et rectifiable L. Ces propriétés seront essentielles pour la suite. Soit $x = \varphi(z)$ la fonction mentionnée et $z = \gamma(x)$ la fonction inverse;

*) V. p. ex „S z e g o": „Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion; Math. Ann. Bd. 84; Heft 3/4; pp. 232—244, specialement pp. 232—233. Nous abrégerons les citations de ce mémoire par: (Szego", II).

soit d'ailleurs $x=a$ une valeur correspondant au point $z=0$. Nous allons indiquer quelques propriétés connues de la fonction $\varphi(z)$. *). Cette fonction est continue jusqu'au contour C du cercle K et ses valeurs sur C forment une fonction absolument continue. Suivant les chemins non tangents, la fonction $\varphi'(z)$ admet presque partout les valeurs limites $\varphi'(e^{i\theta})$ qui coïncident avec les valeurs de la derivée de la fonction absolument continue indiquée ci-dessus, cette derivée étant prise le long de la circonférence C. La conservation des angles, caracterisant la représentation conforme, subsiste non seulement en points intérieurs de B et de K, mais, de même, presque partout en points des contours Γ et C. Outre cela, il suit immédiatement d'une formule de la page 89 du mémoire cité de Privaloff, que la fonction $z\varphi'(z)$ s'exprime par ses valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Poisson. Or, $w(z)$ étant une fonction regulière à l'intérieur du cercle K, admettant presque partout sur C, suivant les chemins non tangents, les valeurs limites et s'exprimant par ces valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Poisson, elle s'exprime de même à l'aide de l'intégrale de Cauchy et réciproquement; d'ailleurs, pour qu'il soit ainsi il faut et il suffit que les intégrales

$$\int_0^{2\pi} |w(re^{\theta i})|\, d\theta \tag{8}$$

soient bornées uniformement pour $|r|<1$ **). Donc les intégrales

$$r\int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta, \tag{9}$$

représentant les longueurs des images circulaires dans le domaine B, c'est-à-dire, les longueurs des lignes, Γ_r, qui correspondent dans la représentation conforme aux circonférences $|z|=r$, sont de même bornées.

Ces dernières intégrales étant bornées, il en resulte que la fonction $\sqrt{\varphi'(z)}$, regulière dans l'intérieur du cercle K, appartient à la classe (H). Remarquons en outre que l'intégrale

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta$$

donne la longueur du segment de la courbe Γ, correspondant à l'arc $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ de la circonférence C.

---

*) Privaloff. „Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques" Journal de d'Ecole Polytechnique, 2-me Série; Cahier 24 1924; pp. 77—112 specialement pp. 78—87.

**) Nous trouvons une partie de cette proposition dans le mémoire de M. Riesz: „Ueber die randwerte einer analytischen Funktion" Math. Zeitschr. Bd. 18; Heft. ½; pp. 87—95, spécialement p. 94. Quand aux résultats définitifs, ils nous ont été aimablement communiqués par M. G. Fichtenholz.

Si une fonction $\pi(x)$ est regulière à l'intérieur du domaine B et admet presque partout sur Γ, suivant les chemins non tangents, les valeurs limites $\pi(\xi)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\pi(x)$ s'exprime par $\pi(\xi)$ à l'aide de l'intégrale de Cauchy est présentée par l'existence des égalités *):

$$\int_{\Gamma} \pi(\xi)\, \xi^n\, d\xi = 0; \; (n=0, 1, 2\ldots).$$

Nous allons démontrer maintenant, que pour que $\pi(x)$ admette presque partout sur Γ les valeurs limites et s'exprime par ces valeurs à l'aide de l'intégrale de Cauchy il faut et il suffit, que les intégrales

$$\int_{\Gamma_r} |\pi(x)|\, d\sigma \tag{10}$$

soient uniformement bornées pour toutes les valeurs de $r < 1$. A cet égard nous introduisons la fonction $w(z) = \pi[\varphi(z)]$, régulière l'intérieur du cercle K. Les intégrales (10) étant uniformement bornées, les intégrales:

$$\int_0^{2\pi} |\, w(re^{i\theta}) \cdot \varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta$$

jouissent de la même propriété et, par conséquent, le produit $w(z)\varphi'(z)$ admet presque partout les valeurs limites et s'exprime par ces valeurs à l'aide de l'intégrale de Cauchy.

Il s'ensuit que:

$$\int_{|z|=1} w(z)\, \varphi'(z\; z^n\, dz = 0 \; (n=0, 1, 2,\ldots). \tag{11}$$

Démontrons que les conditions:

$$\int_{\Gamma} \pi(\xi)\, \xi^n\, d\xi = 0 \; (n=0, 1, 2\ldots) \tag{12}$$

sont remplies. En effet, $\xi^n = [\varphi(z)]^n$ étant une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle K et continue jusqu' à la circonférence C, elle est développable en série suivant les polynomes de la variable z, cette série etant uniformement convergente sur la circonférence C **). Donc, en remplaçant dans les conditions (12) ξ^n par le développement uniformement convergent indiqué et en passant de la variable ξ à la variable z, on obtient immédiatement, en vertu des rélations (11), les conditions (12). Réciproquement, si l'on sait que les valeurs limites $\pi(\xi)$ existent et que les conditions (12) sont satisfaites, on en déduit aisement que les conditions (11) sont remplies de même. En effet, en développant la fonction $z^n = [\gamma(x)]^n$ en série, suivant les polynomes de la variable x,

---

*) V. le mémoire cité de M. Privaloff, p. 106.

**) Walsh: „Ueber die Entwickelung einer analytischen Funktion nach Polynomen" Math. Ann. Bd. 96; Heft 3/4; 1926; pp. 430—436, spécialement p. 430.

uniformement convergente sur le contour Γ, nous démontrerons d'une façon analogue, que les conditions (12) entrainent les conditions (11). Remarquons d'ailleurs, qu'en passant de la variable ξ à la variable z et inversement, nous pouvons remplacer $d\xi$ par $\varphi'(z)\,dz$ sous le signe de l'intégrale, car les valeurs limites $\varphi'(z)$ coincident presque partout avec la dérivée de la fonction absolument continue, qui fait la représentation de la circonférence C sur le contour Γ. Donc, en supposant que $\pi(x)$ admet les valeurs limites et qu'elle s'exprime par ces valeurs à l'aide de l'intégrale de Cauchy, nous avons établi que la fonction $w(z)\,\varphi'(z)$ jouit des mêmes propriétés, d'où il suit, que les intégrales:

$$\int_0^{2\pi} \left| w(re^{i\theta})\, \varphi'(re^{i\theta}) \right| d\theta$$

où, ce qui revient au même, les intégrales (10) sont uniformement bornées.

Par conséquent, pour que $\pi(x)$ admette les valeurs limites presque partout sur le contour Γ et pour qu'elle s'expime par ces valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Cauchy il faut et il suffit que les intégrales (10) soient uniformement bornées.

§ 4. Soient $P_n(x)$ les polynomes orthogonaux sur la courbe Γ, ainsi que

$$\frac{1}{l}\int_\Gamma P_n(\xi)\,\overline{P_m(\xi)}\,d\sigma = \varepsilon_{m,n} \quad (\varepsilon_{m,n}=0 \text{ pour } n\neq m;\ \varepsilon_{nn}=1)$$

où l est la longueur de la courbe Γ et $d\sigma$ désigne l'élement de l'arc de cette courbe. Formons les fonctions regulières à l'intérieur du cercle K:

$$R_n(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\, P_n[\varphi(z)]\, \sqrt{\varphi'(z)} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots). \tag{13}$$

Il est aisé de voir que toutes ces fonctions appartiennent à la classe (H) et que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_n(z)\,\overline{R_m(z)}\,d\theta = \varepsilon_{m,n}.\ (z=e^{\theta i}). \tag{14}$$

En introduisant les notations

$$R_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^{(n)} z^s \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{15}$$

on obtient des rélations (14) les conditions de l'orthogonalité et de la normalité pour le tableau des coefficients $\alpha_s^{(n)}$:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s^{(n)}\,\overline{\alpha}_s^{(m)} = \varepsilon_{n,m}. \tag{16}$$

Les fonctions (13) forment un système orthogonal et normal sur la circonférence C. Examinons la question concernant la fermeture de ce système. Si une fonction sur le plan de la variable x est continue dans un domaine B et regulière à l'intérieur de ce domaine elle peut être mise dans le domaine fermé indiqué sous forme d'un polynome au dégré arbitraire de l'exactitude près *). Il s'ensuit immédiatement que dans le cas d'un système des polynomes $P_n(x)$ on a l'équation de la fermeture pour une fonction arbitraire $\pi(x)$, continue dans un domaine fermé B et regulière à l'intérieur de ce domaine, c'est-à-dire

$$\frac{1}{l}\int_{\Gamma} |\pi(\xi)|^2 d\sigma = \sum_{s=0}^{\infty} |c_s|^2, \tag{17}$$

où

$$c_s = \frac{1}{l}\int_{\Gamma} \pi(\xi) \sqrt{P_s(\xi)}\, d\sigma.$$

En passant au plan de la variable z, considérons la fonction:

$$V(z) = \pi[\varphi(z)] \sqrt{\varphi'(z)}.$$

Ses coefficients de F o u r i e r par rapport au système de fonctions (13) sont presentés par les formules:

$$k_s = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} V(z)\, \overline{R_s(z)}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \pi[\varphi(z)] \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\, P_s[\varphi(z)]\, |\varphi'(z)|\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi l}}\int_{\Gamma} \pi(\xi)\, \overline{P_s(\xi)}\, d\sigma = \sqrt{\frac{l}{2\pi}}\, c_s.$$

Hors cela, on a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} |V(z)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} |\pi[\varphi(z)]|^2 |\varphi'(z)|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} |\pi(\xi)|^2 d\sigma,$$

et l'équation (17) donne immédiatement la formule de la fermeture:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} |V(z)|^2 d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} |k_s|^2.$$

Donc dans le cas du système des fonctions (13) l'équation de la fermeture subsiste pour toutes les fonctions de la forme: $\mu(z)\sqrt{\varphi(z)}$, où $\mu(z)$ est continue dans le cercle fermé K et regulière à l'intérieur de ce cercle.

Supposons maintenant, que certaines fonctions $\lambda_s(e^{i\theta})$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfont à l'équation de la fermeture pour le système (13), que les fonctions $\lambda(e^{i\theta})$ et $|\lambda(e^{i\theta})|^2$ sont sommables et que

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^{2\pi} |\lambda(e^{i\theta}) - \lambda_s(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0. \tag{18}$$

*) W a l s h; op. cit; § 3.

En désignant par $\lambda_s^{(n)}$ les coefficients de Fourier de la fonction $\lambda_s(e^{i\theta})$ et par $\lambda^{(n)}$ les mêmes coefficients de la fonction $\lambda(e^{i\theta})$, en vertu de l'inégalité evidente:

$$|\alpha+\beta|^2 \leqq 2\,(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

nous recevons:

$$\int_0^{2\pi}\Big|\lambda(e^{i\theta})-\sum_{k=1}^{m}\lambda_s^{(k)}R_k(e^{i\theta})\Big|^2 d\theta \leqq 2\int_0^{2\pi}\Big|\lambda_s(e^{i\theta})-\sum_{k=1}^{m}\lambda_s^{(k)}R_k(e^{i\theta})\Big|^2 d\theta+$$

$$+2\int_0^{2\pi}|\lambda(e^{i\theta})-\lambda_s(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Cette dernière inégalité, conjointement à la condition (18) et à la supposition, que $\lambda_s(e^{i\theta})$ satisfont à l'équation de la fermeture, montrent, que la fonction $\lambda(e^{i\theta})$ doit aussi satisfaire à l'équation de la fermeture. Démontrons maintenant qu'aux certaines conditions complementaires les fonctions

$$(19) \qquad z^m \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

satisfont à l'équation de la fermeture pour le système (13). On voit aisément qu'il suffit de démontrer l'existence d'une telle suite des polynomes: $\chi_n(z)$ que

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{|z|=1}|1-\chi_n(z)\sqrt{\varphi'(z)}|^2\,d\theta=0.$$

En effet, l'égalité (20) est équivalente à l'égalité:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|z|=1}|z^m-z^m\chi_n(z)\sqrt{\varphi'(z)}|^2\,d\theta=0\cdot(m=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Donc, les fonctions $z^m\chi_n(z)\sqrt{\varphi'(z)}$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$ satisfaisant à l'équation de la fermeture, la fonction z^m lui satisfait aussi.

Pour construire les polynomes $\chi_n(z)$, satisfaisant à la condition (20), nous considérons les polynomes $p_n(z)$ orthogonaux et normaux sur la circonférence C par rapport à une certaine fonction non négative $w(\theta)$. Ces polynomes sont définis par la condition, que $p_n(z)$ est un polynome du dégré n à coefficients positifs d'après z^n, et que:

$$(21) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\theta)\,p_n(e^{\theta i})\,p_m(e^{\theta i})\,d\theta=\varepsilon_{m,n}.$$

La théorie de ces polynomes a été etudiée par M. Szegö dans son mémoire „Beiträge zur theorie der Toeplitzschen Formen“ [Math. Zeitschrift, Bd. 6; Heft 3/4 1920; p. 176 und Bd. 9; Heft 3/4 1921; p. 175]. Quelques résultats de ces derniers mémoires seront importants pour la suite et nous en abrégérons les citations par: (Szegö III).

Posons:

$$w(\theta) = |K(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

où

$$K(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\sqrt{\varphi'(z)}.$$

La fonction $K(z)$ appartenant à la classe (H), on a $w(\theta) > 0$ presque partout et $\lg w(\theta)$ est la fonction sommable (Szegö II, p. 223). Formons les coefficients de Fourier pour la fonction:

$$H(\theta) = \frac{1}{K(e^{i\theta})}$$

par rapport aux polynomes $p_n(z)$:

$$d_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\theta)\, H(\theta)\, \overline{p_s(e^{i\theta})}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} \overline{K(e^{\theta i})}\; \overline{p_s(e^{\theta i})}\, d\theta,$$

ou

$$\overline{d_s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{K(z)\, p_s(z)}{z}\, dz.$$

En remarquant que les fonctions $K(z)\; p_s(z)$ appartiennent à la classe (H) et, en particulier, qu'elles sont représentables par ses intégrales de Cauchy nous recevons définitivement:

$$d_s = \overline{K(0)}\; \overline{p_s(0)}. \tag{22}$$

En vertu du § 14 (Szegö III), en posant

$$\chi_n(z) = \sum_{s=0}^{n} d_s\, p_s(z),$$

nous aurons:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\theta)\left|\frac{1}{K(e^{i\theta})} - \chi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = 1 - \sum_{s=0}^{n} |d_s|^2.$$

Donc, la formule (20) est équivalente à l'égalité:

$$\sum_{s=0}^{\infty} |d_s|^2 = 1,$$

où, en conséquence de la rélation (22), à l'égalité:

$$\sum_{s=0}^{\infty} |p_s(0)|^2 = \frac{1}{|K(0)|^2}. \tag{23}$$

Pour démontrer cette dernière égalité, nous allons nous servir du théorème XXX (Szegö III). Il en résulte, que

$$(24) \qquad \sum_{s=0}^{\infty} | p_s(0) |^2 = \frac{1}{| D(0) |^2},$$

où $D(z)$ est la fonction de la classe (H), définie par l'égalité:

$$D(z) = e^{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \lg w(\psi) \frac{1+ze^{-i\psi}}{1-ze^{-i\psi}} d\psi}.$$

(Szegö II, p. 241). Les deux fonctions $| D(z) |^2$ et $| K(z) |^2$ ont presque partout les mêmes valeurs limites $w(\theta)$, suivant les chemins non tangents. Or, on sait, que la fonction $D(z)$ est la plus grande en module pour tous les points du cercle K parmi toutes les fonctions de la classe (H), dont les carrés des modules admettent presque partout les valeurs limites $w(\theta)$.

Donc, on a:

$$(25) \qquad | K(z) | \leqq | D(z) | \qquad (| z | < 1);$$

d'ailleurs l'égalité ne peut avoir lieu, que dans le cas, où $K(z)$ est égale à $D(z)$ à un multiplicateur constant près, dont le module est l'unité. L'égalité (23) sera demontrée, si nous établissons, que c'est précisément le cas de l'égalité, qui a lieu dans la formule (25), c'est-à-dire, que la fonction $\lg | K(z) |^2$ est représentable par la partie reéle de l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg w(\psi) \frac{1+ze^{-i\psi}}{1-ze^{-i\psi}} d\psi$$

où par i'intégrale de Poisson

$$\lg | K(re^{i\theta}) |^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg | K(e^{i\psi}) |^2 \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\theta)+r^2} d\psi.$$

En se souvenant de la définition de $K(z)$, on voit, que tout celà se reduit à la proposition, que la fonction $\lg | \varphi'(z) |$, harmonique a 'intérieur du cercle K, s'exprime par ses valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Poisson

$$(26) \qquad \lg | \varphi'(re^{i\theta}) | =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg | \varphi'(e^{i\psi}) | \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\theta)+r^2} d\psi; \quad (0 \leqq r < 1).$$

Donc, le condition (26) étant remplie, les fonctions z^m $(m=0, 1, 2...)$ satisfont a l'équation de fermeture pour le système des fonctions (13).

Or, en vertu de la formule (7), les coefficients de Fourier pour ces fonctions, sont:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(z)=1} z^m\,\overline{R_k(z)}\,d\theta = \overline{\alpha}_m^{(k)}$$

et l'équation de la fermeture sera de la forme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\,\alpha_m^{(k)}\,|^2 = 1 \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Ces équations et les équations (16) montrent, que le tableau des coefficients $\alpha_n^{(k)}$ présente un tableau des coefficients d'une transformation orthogonale complète. Par conséquent la condition, que le système (13) soit complet par rapport aux fonctions z^m ($m=0$, 1, 2...) est équivalente à le conditions que la tableau des coefficients des developpements des fonctions $R_s(z)$ ($s=0$, 1, 2...) en series de Maclaurin présente un tableau d'une transformation orthogonale complète. Cette dernière condition étant remplie, il est aisé de voir, que toute fonctioin $\sigma(z)$, appartenant á la classe (H), satisfait á l'équation de la fermeture pour le système (13).

En effet, soit

$$\sigma(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sigma^s z_s.$$

La fonction $\sigma(z)$ appartenant à la classe (H), on a

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |\,\sigma(z)\,|^2\,d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} |\,\sigma_s\,|^2.$$

En remarquant, que les coefficients de Fourier de la fonction $\sigma(z)$ sont:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} \sigma(z)\,\overline{R_k(z)}\,d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s\,\overline{\alpha_s^{(k)}} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

et que le tableau $\alpha_s^{(k)}$ fournit la transformation orthogonale complète, on reçoit immédiatement l'équation de la fermeture:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big|\sum_{s=0}^{\infty}\sigma_s\,\overline{\alpha}_s^{(k)}\Big|^2 = \sum_{s=0}^{\infty}|\,\sigma_s\,|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|\,\sigma(z)\,|^2\,d\theta.$$

Des considérations de ce paragraphe il résulte le théorème suivant:

Théorème II. Si la formule (26) a lieu, les coefficients des développements des fonctions (13) en séries de Maclaurin forme un tableau d'une transformation orthogonale complète et toute fonction de la classe (H) satisfait à l'équation de la fermeture pour le système des fonctions (13).

§ 5. En supposant que la condition (26) est satisfaite, nous allons démontrer dans ce paragraphe la formule de la fermeture et le théorème sur le développement dans le domaine B. Soit $f(x)$ une fonction regulière à l'intérieur du domaine B et telle, que les intégrales:

$$\int_{\Gamma_r} |f(x)|^2 \, d\sigma, \quad (r<1), \tag{27}$$

Γ_r étant des images circulaires, restent bornées. Envisageons les fonctions:

$$F(z)=f[\varphi(z)] \text{ et } \tau(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\, F(z)\sqrt{\varphi'(z)}.$$

Les chemins non tangents aux points du contour Γ sont presque partout équivalents aux chemins non tangents aux points de la circonférence C (voir § 3) et la condition que les intégrales (26) soient bornées est équivalente à la même condition concernant les intégrales:

$$\int_{|z|=r} |\tau(z)|^2 \, d\theta; \quad (r<1),$$

d'où il suit, que la fonction

$$\tau(z)=\sum_{s=0}^{\infty} \delta_s z^s$$

appartient à la classe (H). Considérons les coefficients de Fourier

$$c_n=\frac{1}{l}\int_{\Gamma} f(\xi)\overline{P_n(\xi)}\, d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \tau(z)\,\overline{R_n(z)}\, d\theta=\sum_{s=0}^{\infty} \delta_s \overline{\alpha}_s^{(n)}.$$

Les coefficients $\alpha_s^{(n)}$ formant une transformation orthogonale compléte. on a la rélation:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2=\sum_{s=0}^{\infty} |\delta_s|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} |\tau(z)|^2 \, d\theta=\frac{1}{l}\int_{\Gamma} |f(\xi)|^2 \, d\sigma,$$

qui présente précisement l'équation de la fermeture pour la fonction $f(x)$ par rapport aux polynomes $P_n(x)$. Donc, on resoit le théorème:

Théorème III. Si la fonction $f(x)$ est regulière à l'intérieur du domaine B, les intégrales (27) restent bornées et la rélation (26) a lieu, la fonction $f(x)$ satisfait à l'équation de la fermeture pour les polynomes $P_n(x)$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème sur le développement d'une fonction $f(x)$, satisfaisant aux conditions du théorème III. Formons un segment de la série de Fourier pour la fonction $\tau(z)$ par rapport au système des fonctions (13):

$$S_n(z)=\sum_{s=0}^{n} c_s R_s(z).$$

En remarquant, que les fonctions $\tau(z)$ et $R_s(z)$ appartiennent à la classe (H), nous aurons:

$$\tau(z) - S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z'|=1} \frac{\tau(z') - S_n(z')}{z' - z} dz', \quad (|z| < 1)$$

d'où il vient conformement à l'inégalité de Schwarz:

$$|\tau(z) - S_n(z)|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{|z'|=1} |\tau(z') - S_n(z')|^2 d\theta \cdot \int\limits_{|z'|=1} \frac{d\theta}{|z' - z|^2}.$$

La fonction $\tau(z)$ satisfaisant à l'équation de la fermeture pour le système (13), on a la rélation:

$$\tau(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\, F(z) \sqrt{\varphi'(z)} = \lim_{n \to \infty} S_n(z),$$

d'ailleurs $S_n(z)$ tend vers la limite $\tau(z)$ uniformement par rapport à z dans chaque domaine se trouvant avec son contour à l'intérieur du cercle K. En supprimant la facteur $\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\, \sqrt{\varphi'(z)}$ et en revenant à la variable x on resoit la théorème sur la développement de la fonction $f(x)$:

Théorème IV. A condition de l'existence de la rélation (26), une fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions du théorème III est développable en série de Fourier suivant les polynomes $P_n(x)$, cette série étant uniformement convergente dans chaque domaine, qui se trouve avec son contour à l'intérieur du domaine B.

Considérons maintenant une série arbitraire

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n P_n(x), \tag{28}$$

la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2$$

étant supposée convergente. Formons la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n R_n(z) \tag{29}$$

En tenant compte des propriétés du tableau des coefficients $\alpha_m^{(k)}$, nous pouvons affirmer, que la série (29) représente une fonction $\rho(z)$ regulière à l'intérieur du cercle K

$$\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n R_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n \; (|z| < 1), \tag{30}$$

et qu'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n|^2,$$

d'où il suit, que $\rho(z)$ appartient à la classe (H). Inversement, étant donnée une fonction $\rho(z)$ de la classe (H), les coefficients δ_n sont connues et $\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n|^2$ est convergente. En égalant dans la formule (30) les coefficients d'après les même puissances de z, nous recevons un système infini d'équation linéaires, qui dèterminent d'une façon unique les coefficients d_n, $\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2$ étant aussi convergente. La fonction $\rho(z)$ appartenant à la classe (H), la fonction

$$F(z) = \frac{\rho(z)}{\sqrt{\frac{2\pi}{l}} \sqrt{\varphi'(z)}} \tag{31}$$

fournit sur le plan de la variable x la fonction $f(x) = F[\gamma(x)]$, qui satisfait à tous les conditions du théorème III, et réciproquement, une telle fonction $f(x)$ ètant donnée, la formule (31) définit la fonction $\rho(z)$ de la classe (H). Par suite chaque fonction $f(x)$, qui satisfait à toutes les conditions du théorème III, est developpable d'une façon unique en série de la forme (28), la somme $\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2$ étant convergente. Cette serie unique est précisement la série de Fourier de la fonction $f(x)$. Nous recevons ainsi le théorème:

Théorème V. Si la rélation (26) a lieu, chaque fonction $f(x)$ satisfaisant à toutes les conditions du théorème III est développable d'une façon unique dans la domaine B en série de la forme (28), la somme des carrés des modules des coefficients étant convergente. Inversement, chaque sèrie de cette forme est la série de Fourier pour une fonction $f(x)$ jouissant des propriétés indiquées.

En conclusion de ce paragraphe nous allons démontrer une formule établie par M. Szegö pour le cas d'un contour analytique. Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{l}{2\pi} \overline{\sqrt{\gamma'(a)}} \sqrt{\gamma'(x)}.$$

Elle jouit évidemment de toutes les propriétés indiquées dans le théorème III. Le calcul élementaire montre que ses coefficients de Fourier sont:

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{\Gamma} f(\xi) \overline{P_n(\xi)} \, d\sigma = \overline{P_n(a)}.$$

En effet, en tenant compte de la rélation évidente:

$$\gamma'(x) \varphi'(z) = 1$$

et en remarquant qù à la valeur $z = o$ correspond la valeur $x = a$, nous recevons:

$$\overline{c}_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{\overline{\varphi'(o)}}} \int\limits_{|z|=1} \frac{P_n[\varphi(z)]\,|\,\varphi'(z)\,|}{\sqrt{\overline{\varphi'(z)}}}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\sqrt{\overline{\varphi'(o)}}} \int\limits_{|z|=1} \frac{P_n[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}}{z}\,dz.$$

Or, le produit $P_n[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}$ étant représentable, comme nous l'avons vu, par son intégrale de Cauchy, il s'ensuit que

$$\overline{c_n} = \frac{1}{\sqrt{\overline{\varphi'(o)}}} P_n[\varphi(o)]\sqrt{\varphi'(o)} = \overline{P_n(a)}.$$

Nous obtenons ainsi, conformement au théorème III, le developpement de la fonction (31) en série de Fourier:

$$\frac{l}{2\pi}\sqrt{\overline{\gamma'(a)}}\ \sqrt{\gamma'(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P_n(a)}\,P_n(x). \tag{32}$$

C'est précisement la formule, que nous avons à établir. Nous avons verifié cette dernière formule ainsi que le théorème prècédent, en supposant que le contour Γ est rectifiable et que la rélation (26) est satisfaite pour ce contour.

§ 6. Dans le cas, où le contour Γ est une courbe analytique la fonction harmonique $\lg|\varphi'(z)|$ est analytique dans le cercle fermé K est la formule (26) subsiste certainement. Nous démontrous dans ce paragraphe le théorème de développement pour le cas d'un contour analytique aux conditions plus générales que celles, que nous venons d'énoncer. Soit $f(x)$ une fonction regulière à l'intérieur d'un domaine B, possédant presque partout sur Γ les valeurs limites intégrables $f(\xi)$ et s'exprimant par ces valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Cauchy:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \quad [x \text{ à l'intérieur du } B].$$

En tenant compte du § 3 nous pouvons affirmer, que les intégrales:

$$\int\limits_{|z|=r} |\,f[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)\,|\,d\theta; \quad [r < 1]$$

sont uniformement bornées. Hors cela, dans le cas actuel $\varphi'(z)$ est une fonction regulière et différente de zéro jusqu à la circonférence C. Donc, il existe deux nombres positif M et m, satisfaisant à la condition:

$$o < m < |\varphi'(z)| < M$$

dans tous le cercle K. Il s'ensuit, que les intégrales:

$$\int\limits_{|z|=r} |\,f[\varphi(z)]\,|\,d\theta \text{ et } \int\limits_{|z|=r} |\,f[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}\,|\,d\theta.$$

sont de même uniformement bornées et que dans le cercle K les fonctions $f[\varphi(z)]$ et $f[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)}$, s'expriment de même par ces valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Cauchy.

Considérons maintenant le segment de la série de Fourier pour la fonction $f(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x); \; a_k = \frac{1}{l} \int_{\Gamma} f(\xi) \overline{P_k(\xi)} \, d\sigma,$$

ou

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{\Gamma} f(\xi) K_n(\xi, x) \, d\sigma = \frac{1}{l} \int_{\Gamma} f(\xi) \overline{K_n(x, \xi)} \, d\sigma,$$

et

$$K_n(x, \xi) = \sum_{k=0}^{n} \overline{P_k(x)} P_k(\xi).$$

Or, on sait (Szegö I) que si x est fixé à l'intérieur de B et ξ représente un point variable sur Γ, la fonction $K_n(x, \xi)$ tend uniformement par rapport à ξ vers $\frac{l}{2\pi} \overline{\sqrt{\gamma'(x)}} \sqrt{\gamma(\xi)}$, $z = \gamma(y)$ étant la fonction qui fait la representation conforme du domaine B sur le cercle K, d'une telle façon que le point $y = x$ correspond au point $z = 0$. Donc, on a:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\xi) \sqrt{\gamma'(x)} \, \overline{\sqrt{\gamma'(\xi)}} \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} f[\varphi(z)] \sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(0)}} \, d\theta,$$

où, comme toujours, par $y = \varphi(z)$ est désignée la fonction inverse à $z = \gamma(y)$. On a évidemment ensuite:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(0)}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f[\varphi(z)] \sqrt{\varphi'(z)}}{z} \, dz$$

et

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(0)}} f[\varphi(0)] \sqrt{\varphi'(0)} = f(x),$$

car la fonction $f[\varphi(z)] \sqrt{\varphi'(z)}$ est représentable par son intégrale de Cauchy.

Ainsi nous avons reçu le developpement de la fonction $f(x)$ à l'intérieur du domaine B en série de Fourier suivant les polynomes orthogonaux.

On deduit sans peine des recherches de M. Szegö que $K_n(x, \xi)$ tend vers la fonction limite $\frac{l}{2\pi} \overline{\sqrt{\gamma'(x)}} \sqrt{\gamma(\xi)}$ uniformement non seulement par rapport à ξ, mais aussi par rapport à x, si x se trouve dans un domaine qui est situé avec son contour à l'intérieur du domaine B. On peut dire la même chose sur le développement de la fonction $f(x)$ en série de Fourier. Nous recevons ainsi un théorème, qui est entièrement analogue au théorème concernant le developpement en série de puissances:

Théorème VI. Si la fonction $f(x)$ est regulière à l'intérieur du domaine B, si elle possède presque partout sur Γ suivant les chemins non tangents les valeurs limites et s'exprime par ces valeurs à l'aide de l'intégrale de Cauchy et si, en outre, le contour Γ est une courbe analytique, $f(x)$ est développable à l'intérieur de B en série uniformement convergente de Fourier suivant les polynomes orthogonaux correspondant au contour Γ.

Supposons maintenant qu'on sait seulement, que la fonction $f(x)$ est regulière à l'intérieur de B. La fonction $f[\varphi(z)]$ est alors développable en série de Maclaurin à l'intérieur du cercle K:

$$f[\varphi(z)] = \sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s ,$$

où

$$\lim \sup \sqrt[s]{|c_s|} \leqq 1.$$

Donc, pour un nombre arbitraire R surpassant l'unité, on a l'inégalité:

$$|c_s| < AR^s. \tag{33}$$

A etant independant de s. Pour la fonction z^s on obtient le développement évident:

$$z^s = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\alpha}_s^{(j)} R_j(z), \quad (|z| < 1)$$

et on trouve, que

$$f[\varphi(z)] = \sum_{s=0}^{\infty} c_s \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\alpha}_s^{(j)} R_j(z). \tag{34}$$

Utilisons maintenant les deux résultats du mémoire mentionné ci-dessus de M. Szegö (Szegö I). Soit $x = \psi(z)$ une fonction faisant la représentation conforme de la partie du plan x, extérieure au contour Γ. sur la partie du plan z, extérieure au cercle $|z| < 1$, de sorte, que les points à l'infini des deux plans correspondent l'un à l'autre. On a le developpement:

$$x = \tau z + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\beta_s}{z^s} \quad \text{pour } |z| > 1. \tag{35}$$

Soit d'ailleurs $z = \delta(x)$ la fonction inverse. En chaque point x, se trouvant hors de Γ, les polynomes $P_n(x)$ admettent les representations: asymptotiques:

$$P_n(x) = \varepsilon \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \sqrt{\delta'(x)}\, [\delta(x)]^n \,[1 + o(1)], \tag{36}$$

où ε est une constante, égale en module à l'unité, et $o(1)$ tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment; d'ailleurs si x appartient à un domaine, se trouvant avec son contour à l'exterieur de Γ, $o(1)$ tend uniformement vers zéro. Si, au contraire, x se trouve à l'intérieur de Γ on a l'évaluation:

$$|P_n(x)| < M\rho^n, \tag{37}$$

où M et ρ, ne dependent pas de n et $0 < \rho < 1$. Tous ces résultats sont établis par Szegö pour le cas d'un contour analytique Γ. Dans ce cas les fonctions (13) sont holomrophes dans le cercle au centre en commencement et au rayon surpassant l'unité, et nous pouvons repré, senter les coefficients $\alpha_s^{(j)}$ sous forme:

$$\alpha_s^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R_1} \frac{R_j(z)}{z^{s+1}}\, dz,$$

où $R_1 > 1$ et $R_1 - 1$ est si petit que l'on veut. En tenant compte des expressions asymptotiques (36), nous recevons les évaluations pour $\alpha_s^{(j)}$:

$$|a_s^{(j)}| < CR_2^{j-s}, \tag{38}$$

où C est independant de j et de s, $R_2 > 1$ et $R_2 - 1$ est si petit que l'on veut. L'inégalité (37) donne l'évaluation:

$$|R_n(z)| < D\rho^n \tag{39}$$

pour chaque point z à l'intérieur de C. Les évaluations (33), (38) et (39) montrent que la série double du côté droit de l'équation (34) est absolument convergente. Donc, en y changeant l'ordre des sommations on obtient les developpements suivant les fonctions $R_n(z)$:

$$f[\varphi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} D_n R_n(z).$$

En divisant la dernière équation par $\sqrt{\varphi'(z)}$ nous recevons le développement d'une fonction arbitraire, holomorphe à l'intérieur de Γ, en série suivant les polynomes $P_n(x)$, mais cette série n'est pas, en général, la série de Fourier. On arrive donc au théorème:

Théorème VII. Une fonction $f(x)$ regulière à l'intérieur du domaine B, limité par un contour analytique, est developpable dans ce domaine en série absolument convergente suivant les polynomes $P_n(x)$.

§ 7. Les théorèmes du § 5 on été établis à condition de l'existence de la rélation (26). Rappelons nous la substance de cette condition. Si la fonction $x = \varphi(z)$ fait la représentation conforme du cercle K ($|z| < 1$) sur le domaine B à contour rectifiable Γ, l'existence de la rélation (26) se reduit à la condition, que la fonction $\lg|\varphi'(z)|$, harmonique à l'intérieur du cercle mentionné et possèdant les valeurs limites suivant les chemins non tangents presque partout sur la circonférence C de ce cercle, s'exprime par ces valeurs à l'aide de l'intégrale de Poisson. Nous n'avons pas réussi à démontrer qu'il est ainsi dans le cas général d'un contour rectifiable Γ et nous nous bornerons á établir, que la condition (26) est remplie pour certaines classes des contours Γ.

Si les intégrales

$$(40) \qquad \int_0^{2\pi} |\lg \varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta \quad (r<1)$$

restent bornées, la fonction $\lg \varphi'(z)$ regulière à l'intérieur du cercle K, s'exprime, comme nous venons de le dire dans le § 3, par ses valeurs limites à l'aide de l'intégrale de Poisson, et la formule (26) a lieu. Conformement à l'inégalité évidente:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqq \alpha+\beta \quad (\alpha,\ \beta \geqq 0)$$

les intégrales (40) restent bornées, si les intégrales:

$$(41) \qquad \int_0^{2\pi} \big|\lg|\varphi'(re^{i\theta})|\big|\, d\theta \quad \text{et (42):} \quad \int_0^{2\pi} |arg\, \varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta$$

jouissent de la même propriété. La fonction $\sqrt{\varphi'(z)}$ appartenant à la classe (H), le fait que les intégrales (41) sont bornées suit d'une inégalité, établie par M. Riesz dans son mémoire: „Sur ler suites des fonctions analytiques“ *). Il suffit donc pour que la formule (26) ait lieu, que les intégrales (42) soient bornées. Si le domaine B est convexe ou de la forme de l'étoile de Mittag-Leffler, on sait, que la fonction arg $\varphi'(re^{i\theta})$ reste bornée dans tous le cercle K **), et les intégrales (42) sont d'autant plus borneés. Il est aisé de voir que ce fait a lieu aussi dans le cas où le domaine B est limité par un nombre fini de segments de courbes analytiques qui se coupent sous les angles différents de zéro.

Montrons maintenant que si l'on suppose que la rélation (26) n'existe pas, les coefficients $\alpha_k^{(n)}$ des developpements des fonctions $R_n(z)$ en séries de Maclaurin ne forment pas une transformation orthogonale complète. Si la rélation (26) n'est pas juste on a le signe „$<$“ dans la formule (25) [§ 4] et les formules (22), (23) et (24) donnent:

$$(42) \qquad \sum_{s=0}^{\infty} |d_s|^2 < 1,$$

*) Acta Universit. Francisco-Joseph, t. I, fascie 2, 1923, pp. 88—98, specialement, p. 97.

**) Bieberbach: „Aufstellung und Beweise der Drehungssatzes für schlichte conforme Abbildung. Math. Zeitschr. Bd. 4; Heft 3/4; 1919; pp. 295—305, specialement 302 et 304.

où d_s sont les coefficients de Fourier des valeurs limites de la fonction $\frac{1}{K(z)}$ par rapport aux polynomes orthogonaux $p_n(z)$, que nous avons construit dans le § 4. $F(z)$ étant une fonction regulière dans le domaine $|z| \leqq 1$, par exemple un polynome, du théorème XXXV du mémoire mentionné ci-dessus (Szegö III) il suit, que

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} |K(z)|^2 \left| F(z) - \frac{1}{K(z)} \right|^2 d\theta \geqq 1 - \sum_{s=0}^{\infty} |d_s|^2 > 0.$$

Donc, en tenant compte de l'expression de la fonction $K(z)$, nous pouvons affirmer, que pour chaque polynome $F(z)$ on a l'inégalité:

$$\int\limits_{|z|=1} |1 - F(z) \sqrt{\varphi'(z)}|^2 \, d\theta > M > 0, \tag{43}$$

où M est un nombre positif bien défini. Il suit de là, que les fonctions $R_n(z)$ ne forment pas un système fermé par rapport à l'unité, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_0^{(k)}|^2 < 1.$$

En effet, si la fermeture avait lieu l'intégrale

$$I_m = \int\limits_{|z|=1} \left| 1 - \sum_{k=0}^{m} \bar{\alpha}_0^{(k)} \cdot R_k(z) \right|^2 d\theta$$

serait si petite, que l'on veut, pour les valeurs suffisamment grandes de m. Or, on a:

$$\sum_{k=0}^{m} \bar{\alpha}_0^{(k)} R_k(z) = \psi_m(z) \sqrt{\varphi'(z)},$$

où $\psi_m(z)$ est une fonction continue dans le cercle fermé K et regulière à l'intérieur de ce cercle. En se servant des résultats de M. Walsh, mentionnés dans le § 4, nous pouvons représenter la fonction $\psi_m(z)$ sous forme:

$$\psi_m(z) = \omega_m(z) + \varepsilon_m(z),$$

où $\omega_m(z)$ est polynome et $\max |\varepsilon_m(z)|$ est arbitrairement petit sur la circonférence C. Donc, on a l'inégalité évidente:

$$\int\limits_{|z|=1} |1 - \omega_m(z) \sqrt{\varphi'(z)}|^2 \, d\theta \leqq 2I_m + \tag{44}$$

$$+ 2 \int\limits_{|z|=1} |\varepsilon_m(z) \sqrt{\varphi'(z)}|^2 \, d\theta$$

où

$$\int\limits_{|z|=1} |\varepsilon_m(z) \sqrt{\varphi'(z)^2} \, d\theta \leqq \max_{|z|=1} |\varepsilon_m(z)|^2 \cdot l,$$

l étant la longueur du contour Γ. Par conséquent, en contradiction avec l'inégalité (43), les deux termes du côté droit de l'inégalité (44) peuvent être traités comme valeurs arbitrairement petites. Il en résulte que notre supposition, concernant la fermeture du système des fonctions $R_n(z)$ par rapport à l'unité serait fausse, si la formule (26) n'avait pas lieu. Inversement, si l'on sait, que le système des fonctions $R_m(z)$ est fermé par rapport à l'unité, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \overline{\alpha}_0^{(k)} \right|^2 = 1, \tag{45}$$

les intégrales I_m tendent vers zéro, quand m augmente infiniment. Donc il résulte des considérations précédentes, qu'il existe des polynomes $\omega_m(z)$ satisfaisant à la rélation:

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{|z|=1} \left| 1 - \omega_m(z) \sqrt{\varphi'(z)} \right|^2 d\theta = 0.$$

Dans ce cas, comme nous l'avons vu dans le § 4, le système $R_n(z)$ est fermé par rapport aux fonctions z^j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, et le tableau des coefficients $\alpha_k^{(m)}$ forme une transformation orthogonale complète. Par conséquent, la condition (45) est équivalente à la formule (26).

§ 8. Considérons maintenant la représentation conforme de la partie du plan se trouvant à l'extérieur de la courbe Γ sur le domaine $|z| > 1$, en posant, qu'au point à l'infini du plan z correspond le même point du plan x. Introduisons la fonction:

$$x = \psi(z) = \tau z + \tau_0 + \frac{\tau_1}{z} + \frac{\tau_2}{z^2} + \ldots \quad (|z| > 1) \tag{46}$$

faisant cette représentation conforme; d'ailleurs, sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que τ est un nombre réel positif. Soit $z = \delta(x)$ la fonction inverse pour la fonction (46). Formons ensuite les fonctions analogues aux fonctions (13):

$$S_n(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\, P_n[\psi(z)] \sqrt{\psi'(z)} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Ces fonctions sont regulières pour $|z| > 1$ et admettent les représentations de la forme:

$$S_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\beta_s^{(n)}}{z^{s-n}} \quad (|z| > 1). \tag{47}$$

Comme dans le § 4, pour le cas général d'un contour rectifiable nous recevons:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left| \beta_s^{(n)} \right|^2 = 1; \; (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{48}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s^{(m)} \overline{\beta}_{n-m+s}^{(n)} = 0 \; (m < n). \tag{49}$$

Désignons par μ^2_n le minimum des intégrales de la forme:

$$\frac{1}{l}\int\limits_{\Gamma} |\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n|^2 \, d\sigma.$$

On sait (Szegö I), que le coefficient d'après x^n dans le polynome $P_n(x)$ est égale à $\frac{1}{\mu_n}$, et par suite dans les developpements (47)

$$\beta_0^{(n)} = \frac{\tau^n}{\mu_n}\sqrt{\frac{2\pi\tau}{l}}. \tag{49}$$

Il suit de le condition (48), que $|\beta_0^{(n)}|^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire que

$$\mu_n^2 \geqslant \frac{2\pi}{l}\tau^{2n+1}. \tag{50}$$

Cette inégalite est démontrée par Szegö (Szegö I) pour le cas, où le contour Γ est analytique. Dans le même cas, comme nous l'avons déjà dit dans le § 6, Szegö a donné l'expression asymptotique des polynomes $P_n(x)$ pour les points, qui se trouvent hors de la courbe Γ:

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{l}{2n}}\sqrt{\delta'(x)}\,[\delta(x)]^n\,.\,[1+\varepsilon_n(x)], \tag{51}$$

où $\varepsilon_n(x)$ tend uniformement vers zéro, quand n augmente infiniment, dans chaque domaine, se trouvant avec son contour hors de la courbe Γ. Cette expression asymptotique est equivalente à la condition:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_0^{(n)} = 1. \tag{52}$$

En effet, la rélation (52) suit immédiatement de la rélation (51). Inversement, si l'on a la rélation (52), il résulte de la formule (48), que le plus grand des nombres $|\beta_s^{(n)}|$ $(s = 1, 2, \ldots)$ tend vers zéro, quand n augmente infiniment et, en vertu des développements (47), on resoit:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(z)}{z^n} = 1.$$

D'ailleurs $\frac{S_n(z)}{z^n}$ tend uniformement vers l'unité dans chaque domaine se trouvant avec son contour à l'intérieur du domaine $|z| > 1$, ce qui est équivalent à la relation (51). La condition (52) et l'expression asymptotique (51), etablies par Szegö dans le cas d'un contour analytique, ne subsistent pas dans le cas général d'un contour rectifiable. La condition (52) n'est pas satisfaite par exemple dans le cas, où Γ est le segment double $(-1, +1)$ (v. Szegö I). Mais il n'est pas du tout difficile de donner l'évaluation de $P_n(x)$ pour les points se trouvant hors du contour Γ dans le cas général d'un contour rectifiable *). D'après l'inégalité de Cauchy et en vertu de le rélation (48) nous avons:

$$\left| \frac{S_n(z)}{z^n} \right|^2 \leqq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^{2s}} \quad (|z| > 1)$$

d'où nous recevons l'inegalité de la forme:

$$|S_n(z)| \leqq M\, |z|^n, \tag{53}$$

M étant un nombre positif independant de n, qu'on peut fixer pour toutes les valeurs de z satisfaisant à l'inégalité:

$$|z| \geqq R_0 > 1. \tag{54}$$

Soit Δ_r la courbe du plan x correspondant à la circonférence $|z| = r > 1$. La fonction $\psi'(z)$ étant bornée dans le domaine (54), nous avons sur la courbe Δ_R l'évaluation:

$$|P_n(x)| < NR^n, \tag{55}$$

où N peut être fixé une fois pour toutes les valeurs de R, telles que:

$$R \geqq R_0 > 1.$$

De cette évaluation des polynomes $P_n(x)$ suit immédiatement le théorème sur la convergence des séries de Fourier pour la fonction $f(x)$, regulière dans le domaine fermè B. Supposons, que la fonction $f(x)$ est regulière dans le domaine fermé, limité par une courbe Δ_{R_1}. On sait, que dans ce cas il existe un système de polynomes $v_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) du dégré au plus égal à n, ces polynomes satisfaisant sur la courbe Γ à l'inégalité

$$|f(x) - v_n(x)| \leqq \frac{M_0}{R_1^n},$$

où la constante M_0 ne depend ni de x ni de n **). Il suit de là immédiatement, que les coefficients de Fourier c_n de la fonction $f(x)$ satisfont à l'inégalité de la forme:

$$|c_n| < \frac{N_0}{R_1^n}, \tag{56}$$

et, qu'en vertu de l'inégalité (55) la série de Fourier pour la fonction $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{57}$$

---

*) Nous supposons toujours que la condition (26) est remplie.

**) Walsh. „Uber den Grad der Approximation einer analytischen Funktion". Sitzungsber. Bayer. Academie; 1926 H. 2; pp. 223—229. Specialement p. 223.

est uniformement convergente dans chaque domaine B_1, qui se trouve avec son contour à l'intérieur du domaine Δ_{R_1}. La somme de cette série est égale à $f(x)$ dans le domaine B et, par conséquent, dans tous le domaine B_1. Si Δ_{R_2} est une courbe à l'intérieur de laquelle $f(x)$ est regulière et sur laquelle elle admet quelques points singuliers, nous pouvons prendre pour le domaine B_1 un domaine arbitraire se trouvant avec von contour à l'intérieur de Δ_{R_2}.

Dans l'inégalité (56) on peut prendre R_1 si proche que l'on veut a R_2 ce qui donne:

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \leqq \frac{1}{R_2}$$

Or, si nous avions $\limsup \sqrt[u]{|c_n|} < \frac{1}{R_2}$, la série (57), en vertu de (55) serait convergente uniformement à l'intérieur d'un domaine, contenant Δ_{R_2}, ce qui se trouverait en contradiction avec la condition, que $f(x)$ admet les points singuliers sur Δ_{R_2}. Donc, nous obtenons l'égalité

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R_2} \tag{58}$$

Si Γ est une courbe analytique et a est un point à l'intérieur de Γ, comme nous l'avons délà mentionné en § 6, on a l'inégalité:

$$|P_n(a)| < M\rho^n,$$

où les constantes M et $0 < \rho < 1$ ne dependent pas de n. Montrons maintenant que l'inégalité de cette forme ne peut exister que dans le cas, où la courbe Γ est analytique. En effet, si une telle inégalité existait, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{P_n(a)} \cdot P_n(x)$$

dont la somme est $\frac{l}{2\pi} \overline{\sqrt{\gamma'(a)}} \sqrt{\gamma'(x)}$ á l'intérieur de Γ, serait uniformement et absolument convergente dans un domaine contenant la courbe Γ, $\sqrt{\gamma'(x)}$ serait une fonction analytique dans ce domaine et la courbe Γ devrait être de même analytique. Or, en vertu de (55), nous avons:

$$|P_n(a)| < NR^n$$

où R est un nombre surpassant l'unité, la différence $R - 1$ étant si petite que l'on veut. Il suit donc des considérations précédentes que dans le cas, où la courbe Γ n'est par analytique on a:

$$\limsup \sqrt[n]{|P_n(a)|} = 1,$$

où a est un point arbitraire á l'intérieur de Γ.

К теории ортогональных полиномов комплексного переменного.

В. И. Смирнов.

Пусть Γ — простая, замкнутая и спрямляемая кривая длины l на плоскости комплексного переменного x. Ортогональные полиномы $P_n(x)$ $(n=0, 1, 2,...)$ степени n, соответствующие кривой Γ, определяются из условий

$$\frac{1}{l}\int_\Gamma P_n(x)\,\overline{P_m(x)}\,d\sigma = \varepsilon_{n,m} \quad (\varepsilon_{n,m}=0, \text{ если } n\neq m;\ \varepsilon_{n,n}=1),$$

где $d\sigma$—дифференциал дуги, и $\overline{\alpha}$ обозначает комплексное число, сопряженное с α. Теория таких полиномов была разработана Szegö для того случая, когда Γ—аналитическая кривая (Math. Zeitschr. Bd. 9; Heft 3/4; p. 227). Автор дает новый метод, который применяется без труда к контурам, отличным от аналитических, и дает общие теоремы разложения по полиномам $P_n(x)$. Основная идея метода состоит в следующем: пусть $x=\varphi(z)$—функция, совершающая конформное преобразование области B, ограниченной кривой Γ, на круг $|z|<1$. Автор строит функции

$$R_n(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\,P_n[\varphi(z)]\sqrt{\varphi'(z)} \quad (n=0, 1, 2,...,)$$

и доказывает, что таблица коэффициентов разложений этих функций в ряд Maclorin'a есть таблица полного ортогонального преобразования. Аналогичное построение производится и для функции, совершающей конформное преобразование части плоскости, лежащей вне Γ, на область $|z|>1$. Это дает теоремы разложения вне области Γ функций, регулярных в замкнутой области B.

Замеченные опечатки.

Стран.:	Строка:	Напечатано:	Следует читать:
161	12 сверху	$\frac{1}{l}\int_\Gamma \pi(\xi)\sqrt{P_s(\xi)}\,d\sigma$	$\frac{1}{l}\int_\Gamma \pi(\xi)\,\overline{P_s(\xi)}\,d\sigma$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цена выпуска 3 р.